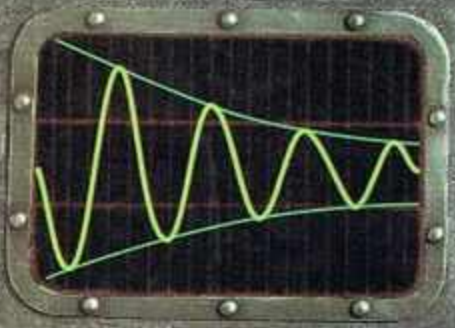


CON EJERCICIOS PARA CALCULADORA Y GRAFICADORA

MATEMÁTICAS PREVIAS AL CÁLCULO

LEITHOLD

TERCERA EDICIÓN

FUNCIONES, GRÁFICAS Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

Productos notables

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Factorización de polinomios

$ax + ay + az = a(x + y + z)$

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy)$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Exponentes

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad a \neq 0$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$

$a^0 = 1 \quad a \neq 0$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad a \neq 0$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Radicales

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \quad b \neq 0$

$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{if } n \text{ is odd} \\ |a| & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Desigualdades

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

Si $b > 0$, $|x| < b$ es equivalente a $-b < x < b$

Si $b > 0$, $|x| > b$ es equivalente a $x > b$ o $x < -b$

Logaritmos

$y = \log_b x$ si y sólo si $x = b^y$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$

$\log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$

$\log_b u^n = n \log_b u$

$\ln x = \log_e x$

Teorema del binomio

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \ldots + {}_nC_n b$$

donde $${}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)!r!}$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Fórmula de la distancia

La **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmulas del punto medio

Si $M(x, y)$ es el **punto medio** del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$, entonces

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ecuaciones de una circunferencia

La **circunferencia** con **centro** en (h, k) y **radio** r tiene como una ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Pendiente de una recta

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta no vertical, entonces la **pendiente** de la recta es m, y está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de una recta

La **forma punto-pendiente** para una recta que tiene pendiente m y que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La **forma pendiente-intercepción** para una recta que tiene pendiente m e intercepción y igual a b es

$$y = mx + b$$

Contenido

Prólogo xiii

1 Números, expresiones algebraicas y gráficas de ecuaciones 1

1.1 Conjunto de números reales 2
1.2 Expresiones algebraicas 16
1.3 Conjunto de números complejos 31
1.4 Plano numérico 42
1.5 Gráficas de ecuaciones 50
Revisión del Capítulo 1 59

2 Ecuaciones y desigualdades 63

2.1 Ecuaciones lineales con una incógnita 64
2.2 Ecuaciones cuadráticas con una incógnita 73
2.3 Ecuaciones como modelos matemáticos 88
2.4 Otras ecuaciones con una incógnita 98
2.5 Desigualdades lineales 109
2.6 Desigualdades polinomiales 117
2.7 Ecuaciones y desigualdades que implican valor absoluto 126
Revisión del Capítulo 2 135

3 Rectas, parábolas, circunferencias y traslación de ejes 139

3.1 Rectas 140

3.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 153
3.3 Parábolas 165
3.4 Circunferencias 171
3.5 Traslación de ejes 178
Revisión del Capítulo 3 186

4 Funciones y sus gráficas 190

4.1 Funciones 191
4.2 Gráficas de funciones 198
4.3 Funciones cuadráticas 209
4.4 Funciones como modelos matemáticos 221
4.5 Funciones compuestas 230
Revisión del Capítulo 4 236

5 Funciones polinomiales y racionales 242

5.1 Gráficas de funciones polinomiales 243
5.2 Teorema del factor y sustitución sintética 254
5.3 Ceros racionales de funciones polinomiales 264
5.4 Ceros complejos de funciones polinomiales 274
5.5 Funciones racionales 285
Revisión del Capítulo 5 298

6 Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas 302

6.1 Funciones inversas 303
6.2 Exponentes y número e 315
6.3 Funciones exponenciales 327
6.4 Funciones logarítmicas 337
6.5 Propiedades de las funciones y ecuaciones logarítmicas 348
6.6 Ecuaciones exponenciales 358
Revisión del Capítulo 6 366

7 Funciones trigonométricas de números reales **371**

7.1 Funciones seno y coseno 372
7.2 Valores de las funciones seno y coseno y funciones periódicas 382
7.3 Gráficas de las funciones seno y coseno y de otras ondas senoidales 392
7.4 Aplicaciones de las funciones seno y coseno a fenómenos periódicos 407
7.5 Otras gráficas que implican a las funciones seno y coseno 416
7.6 Funciones tangente, cotangente, secante y cosecante 422
7.7 Periodicidad y gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante 432
Revisión del Capítulo 7 444

8 Funciones trigonométricas de ángulos **449**

8.1 Ángulos y su medición 450
8.2 Funciones trigonométricas de medidas angulares 460
8.3 Solución de triángulos rectángulos 477
8.4 Ley de los senos 488
8.5 Ley de los cosenos 500
Revisión del Capítulo 8 508

9 Trigonometría analítica **513**

9.1 Identidades trigonométricas 514
9.2 Identidades de suma y diferencia 522
9.3 Identidades de valor múltiple 535
9.4 Identidades para el producto, suma y diferencia de seno y coseno 548
9.5 Funciones trigonométricas inversas 555
9.6 Ecuaciones trigonométricas 570
Revisión del Capítulo 9 580

10 Vectores, ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y números complejos 585

10.1 Vectores 586
10.2 Funciones vectoriales y ecuaciones paramétricas 598
10.3 Coordenadas polares 606
10.4 Gráficas de ecuaciones polares 614
10.5 Forma polar de números complejos 625
10.6 Potencias y raíces de números complejos y teorema de De Moivre 634
Revisión del Capítulo 10 647

11 Secciones cónicas 651

11.1 Elipses 652
11.2 Hipérbolas 664
11.3 Ecuación general de segundo grado en dos variables y rotación de ejes 678
11.4 Sistemas que implican ecuaciones cuadráticas 688
11.5 Tratamiento unificado de las secciones cónicas y ecuaciones polares de las cónicas 698
Revisión del Capítulo 11 708

12 Temas de álgebra 712

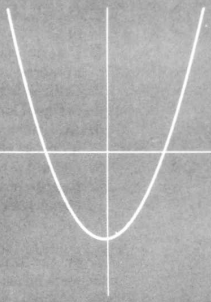
12.1 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices 713
12.2 Propiedades de las matrices y solución de sistemas lineales por medio de matrices inversas 730
12.3 Fracciones parciales 746
12.4 Sucesiones, series y notación sigma 754
12.5 Inducción matemática 763
12.6 Sucesiones y series aritméticas y geométricas 773
12.7 Teorema del binomio 789
12.8 Introducción a las series infinitas 801
Revisión del Capítulo 12 811

Apéndice: propiedades de los números reales 817
Respuestas a los ejercicios impares 824
Índice de materias 895

Capítulo

1

Números, expresiones algebraicas y gráficas de ecuaciones



VISIÓN PRELIMINAR

Aun cuando usted haya tomado un curso intermedio de álgebra o el equivalente, es necesario un repaso de algunos de los contenidos, aunque no se vuelvan a desarrollar completamente. Por tanto, el repaso es rápido para los temas de álgebra que aparecen en este capítulo. Las secciones pueden ser cubiertas en detalle, tratadas como un repaso, o bien omitidas.

Si la Sección 1.1 no se trata en clase, se recomienda que la lea, ya que en este texto y en su curso de Cálculo necesitará conocer aspectos relativos al conjunto de números reales y sus subconjuntos. Debido a que las gráficas y las graficadoras o calculadoras desempeñan un papel importante en este texto, deberá familiarizarse con el contenido de la Sección 1.5.

Sumario

1.1 Conjunto de números reales
1.2 Expresiones algebraicas
1.3 Conjunto de números complejos
1.4 Plano numérico
1.5 Gráficas de ecuaciones

1.1 CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

OBJETIVOS

1. **Aprender acerca de los números reales y sus subconjuntos.**
2. **Aprender las propiedades del sistema numérico real.**
3. **Establecer la correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos en la recta numérica real.**
4. **Aprender la notación de intervalos para definir un conjunto de números.**
5. **Determinar si un conjunto de números es subconjunto de otro.**
6. **Determinar la unión o intersección de dos conjuntos de números.**
7. **Utilizar la notación de conjuntos y los símbolos de desigualdad para denotar un conjunto de números.**
8. **Ilustrar un conjunto de números sobre la recta numérica de números reales.**
9. **Definir el valor absoluto de un número real.**
10. **Representar números por medio de puntos sobre la recta numérica real y determinar las distancias entre puntos.**

El álgebra y la aritmética involucran números sobre los cuales se realizan operaciones tales como adición, sustracción, multiplicación y división. Mientras la aritmética trata operaciones con números específicos, por ejemplo, $2 + 5$, u $8 \cdot 9$; en álgebra se estudian operaciones sobre números no especificados o desconocidos. Éstos son designados por medio de símbolos o letras, como x, y, z, a, b, o c. La palabra **álgebra** proviene del vocablo árabe *al-jabr*, que está en el título de un trabajo publicado a inicios del siglo IX, *ilm al-jabr w' al muqâbalah* (traducido como "la ciencia de la reducción y cancelación"). El simbolismo algebraico usado para generalizar las operaciones de la aritmética, fue formulado en los siglos XVI y XVII.

Ocasionalmente, se utilizará alguna notación y terminología de conjuntos. Se puede decir que un **conjunto** es una colección de objetos, y los objetos de un conjunto se llaman **elementos del conjunto.** Cada objeto particular podrá estar o no en el conjunto.

Las llaves, { }, utilizadas con palabras o símbolos, pueden describir un conjunto. Si S es el conjunto de números naturales menores que 6, el conjunto S puede representarse así:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

El conjunto S también puede simbolizarse como:

$$\{x, \text{ tal que } x \text{ es un número natural menor que } 6\}$$

donde el símbolo x recibe el nombre de *variable*. Una **variable** es un símbolo que se utiliza para representar cualquier elemento de un conjunto dado, y a éste se le denomina **dominio (conjunto de reemplazo)**

de la variable. Otra manera de representar el conjunto anterior S consiste en aplicar la **notación constructiva para conjuntos,** en la cual se utiliza una barra vertical en lugar de las palabras *tal que*. Con la notación constructiva para conjuntos, el conjunto S se representa como:

$$\{x | x \text{ es un número natural menor que } 6\}$$

lo cual se lee como "el conjunto de todas las x tal que x es un número natural menor que 6".

Se dice que dos conjuntos A y B son **iguales,** lo cual se escribe $A = B$, si y sólo si A y B tienen los mismos elementos. Por ejemplo,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

La **unión** de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$ y que se lee "A unión B", es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B o tanto en A como en B. La **intersección** de A y B, que se denota por medio de $A \cap B$ y se lee "A intersección B", es el conjunto de todos los elementos que están tanto en A como en B. El conjunto que no contiene elementos recibe el nombre de **conjunto vacío** y se denota por $\varnothing$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Suponga que $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$ y $C = \{2, 10\}$. Entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \qquad A \cap B = \{4\}$$
$$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\} \qquad B \cap C = \varnothing \quad \blacktriangleleft$$

Observe que en este ejemplo ilustrativo la intersección de los conjuntos B y C es el conjunto vacío. Estos dos conjuntos no tienen elementos en común y se les llama **conjuntos ajenos.**

El símbolo $\in$ se utiliza para indicar que un elemento específico pertenece a un conjunto. De ahí que para el conjunto C del ejemplo ilustrativo 1 pueda escribirse $2 \in C$, lo cual se lee "2 es un elemento de C". La notación $a, b \in S$ indica que tanto a como b son elementos de S. El símbolo $\notin$ se lee "no es un elemento de". Por tanto, $5 \notin A$ se lee "5 no es un elemento de A".

Si todos los elementos de un conjunto S son también elementos de un conjunto T, entonces S es un **subconjunto** de T y se escribe $S \subseteq T$. En este ejemplo ilustrativo, todos y cada uno de los elementos de C son también elementos de A; de este modo, C es un subconjunto de A y se escribe $C \subseteq A$. El símbolo $\not\subseteq$ se lee "no es un subconjunto de". Así pues, puede escribirse $\{1, 2, 3, 4\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$.

Se ha hecho referencia al conjunto de **números naturales,** que se denota por N, de modo que

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

donde los tres puntos se emplean para indicar que la lista continúa interminablemente.

El número *cero*, el cual se representa con el símbolo 0, es aquel que tiene la propiedad de que si se suma a cualquier otro número, el resultado es este mismo número. El conjunto de números cuyos elementos son los números naturales y el cero recibe el nombre de conjunto de los **números cabales.*** Al conjunto de números naturales también se le denomina conjunto de los **enteros positivos**. En particular, el número natural 14 es el mismo que el entero positivo 14.

En correspondencia, con cada entero positivo n existe un entero negativo, tal que si éste se suma a n, el resultado es 0. Por ejemplo, el entero negativo -5, que se lee "menos cinco", es el número que cuando se suma a 5, da como resultado 0. El conjunto de los **enteros negativos** puede denotarse por $\{-1, -2, -3, \ldots\}$. Al conjunto de números cuyos elementos son los enteros positivos, los enteros negativos y el cero se llama **conjunto de los enteros.** Si se denota este conjunto por Z, se tiene

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Luego, el conjunto de enteros es la unión de tres subconjuntos ajenos: los enteros positivos, los enteros negativos y el conjunto que consta únicamente del número 0. Obsérvese que el 0 es un entero, pero no es positivo ni negativo. Algunas veces se hace referencia al conjunto de **enteros no negativos,** el cual consta de los enteros positivos y el 0, o de forma equivalente, el conjunto de números cabales. Asimismo, el conjunto de **enteros no positivos** es aquel que consta de los enteros negativos y el 0.

Considérese ahora el conjunto cuyos elementos son números que se representan por el cociente de dos enteros p y q, donde q es diferente de 0, es decir, los números que se representan simbólicamente como

$$\frac{p}{q} \quad \text{donde } q \text{ es distinto de } 0$$

A este conjunto de números se le denomina conjunto de los **números racionales,**** el cual se denota por Q. Así pues

$$Q = \left\{ x \mid x \text{ pueda representarse por } \frac{p}{q};\ p \in Z,\ q \in Z;\ q \text{ no es } 0 \right\}$$

Algunos números contenidos en el conjunto Q son 1/2, 3/4, 11/5, $-2/3$ y $-31/12$. Todo entero es un número racional debido a que cualquier entero puede representarse como el cociente de sí mismo y de 1; por ejemplo, 8 puede representarse por 8/1; 0 puede representarse por 0/1, y -15, por $-15/1$. Por tanto, $Z \subseteq Q$.

* **N. del S.** Se emplean en esta versión notaciones más universales para los diferentes conjuntos de números. Los enteros no negativos se llaman en inglés *whole numbers*, es decir, números cabales. Suelen denotarse con W.

** **N. del S.** Las denominaciones de racional e irracional se refieren sólo al concepto matemático de razón (relación por cociente) y no al de razón como facultad de discutir y juzgar. El término *razón* proviene del latín *ratio*, que se pronuncia "racio".

Cualquier número racional puede escribirse como un decimal. Se supone que el lector conoce bien el proceso aritmético de dividir para verificar esto. Por ejemplo, 3/10 puede escribirse como 0.3; 9/4, como 2.25; y 83/16, como 5.1875. A estos decimales se les denomina **decimales finitos.** Hay números racionales cuya representación decimal es infinita y periódica; por ejemplo, 1/3 tiene la representación decimal 0.333 . . . , donde el dígito 3 se repite indefinidamente, y 47/11 puede representarse como 4.272727 . . . , donde los dígitos 2 y 7 se repiten sucesivamente en ese orden. Puede demostrarse que la representación decimal de todo número racional es un decimal finito, o bien, un decimal infinito periódico. En la Sección 12.8 se demostrará que todo decimal infinito periódico es la representación de un número racional.

Ahora surge la pregunta siguiente: ¿existen números cuya representación decimal sea infinita y no periódica? La respuesta es afirmativa, y un ejemplo de tal número es la raíz cuadrada principal de 2, que se denota simbólicamente por $\sqrt{2}$ y se representa mediante un decimal infinito y no periódico como 1.41421. . . . Otro número de este tipo es π (pi), que es la razón del perímetro de un círculo a su diámetro y se indica por medio de un decimal infinito y no periódico: 3.14159. . . . Los números cuya representación decimal sea infinita y no periódica carecen de expresión como el cociente de dos enteros, y por tanto, no son números racionales. A este conjunto de números se le denomina **conjunto de los números irracionales,** y se denotará por I.

La unión del conjunto de los números racionales y el de los números irracionales es el conjunto de los **números reales.** Si este conjunto se denota por R, simbólicamente se define por medio de

$$R = Q \cup I$$

La Figura 1.1 muestra las relaciones entre los conjuntos de números anteriormente discutidos. Ejemplos de cada una de las clasificaciones de números aparecen en el rectángulo correspondiente.

► **EJEMPLO 1** ***Determinación de si un conjunto de números es un subconjunto de otro***

Los conjuntos N, Z, Q, I, R son los conjuntos de números definidos en esta sección. Inserte $\subseteq$ o $\not\subseteq$ para hacer que el enunciado sea correcto.

(a) N ____ Z; **(b)** Q ____ Z; **(c)** $\{\sqrt{2}, \pi, 3.5\}$ ____ I; **(d)** $\{0\}$ ____ Q; **(e)** N ____ R.

Solución

(a) Como todo número natural (o entero positivo) es un entero, $N \subseteq Z$.
(b) Puesto que hay números racionales que no son enteros, $Q \not\subseteq Z$.
(c) $\sqrt{2}$ y π son números irracionales, pero 3.5 es racional; por consiguiente, $\{\sqrt{2}, \pi, 3.5\} \not\subseteq I$.
(d) Cero es un número racional, y por tanto $\{0\} \subseteq Q$.
(e) Todo entero positivo es un número real; de aquí que $N \subseteq R$. ◄

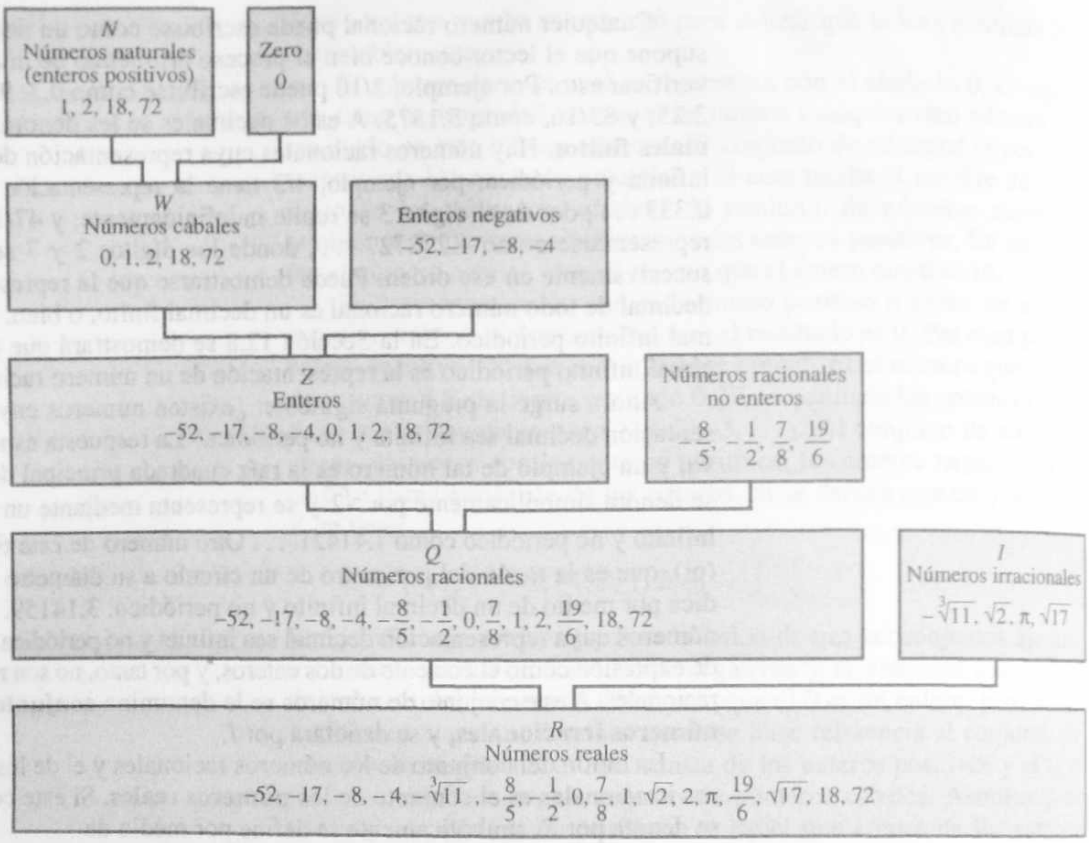


FIGURA 1.1

► EJEMPLO 2 *Determinación de la unión o intersección de dos conjuntos de números*

En cada uno de los casos siguientes, determine cuál de los conjuntos N, Z, Q, I, R y $\varnothing$ es igual al conjunto dado: **(a)** $Z \cup Q$; **(b)** $Z \cap Q$; **(c)** $N \cap I$; **(d)** $I \cup R$.

Solución

(a) La unión de Z y Q es el conjunto de números que son enteros, o bien, racionales. Debido a que el conjunto de los enteros es un subconjunto de los números racionales, esta unión es el conjunto de los números racionales. Por tanto, $Z \cup Q = Q$.

(b) La intersección de Z y Q es el conjunto de números que son tanto enteros como racionales. Esta intersección es el conjunto de los enteros y, de este modo $Z \cap Q = Z$.

(c) Debido a que el conjunto de los enteros positivos y el de los números irracionales no tienen elementos en común, $N \cap I = \varnothing$.

(d) La unión de I y R es el conjunto de números que son tanto irracionales como reales. Debido a que el conjunto de números irracionales es un subconjunto del de los números reales, $I \cup R = R$. ◄

El **sistema numérico real** consta del conjunto R de números reales y dos operaciones denominadas **adición** y **multiplicación.** La adición se denota por medio del símbolo +, y la multiplicación por el símbolo · (o bien, ×). Si $a, b \in R$, entonces $a + b$ denota la **suma** de a y b, y $a \cdot b$ (o bien, ab) denota su **producto.** Como se indicó en la introducción, la Sección A.1 del apéndice contiene un estudio del sistema numérico real.

La sustracción y la división de números reales son definidas en términos de adición y multiplicación respectivamente. La definición de sustracción es como sigue: si a y b son números reales, la operación de **sustracción** asigna para a y b un número real, denotado por $a - b$ llamado la **diferencia** de a y b, tal que

$$a - b = d \quad \text{si y sólo si} \quad a = b + d$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

$7 - 4 = 3$ porque $7 = 4 + 3$ ◄

En la definición anterior, la frase "si y sólo si" es usada para combinar dos proposiciones:

1. $a - b = d$ si $a = b + d$.
2. $a - b = d$ sólo si $a = b + d$, la cual es equivalente a la proposición $a = b + d$ si $a - b = d$.

Ahora se define la división.

Si a y b son números reales y $b \neq 0$ la operación de **división**, asigna para a y b un número real, denotado por $a \div b$ llamado el **cociente** de a y b tal que

$$a \div b = q \quad \text{si y sólo si} \quad a = bq \tag{1}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

$24 \div 6 = 4$ porque $24 = 6 \cdot 4$ ◄

Observe en la definición de división que $b \neq 0$. La razón para esta restricción puede ser vista permitiendo que b sea 0 en el inciso (1). Por ejemplo, si en (1) $b = 0$ y $a = 3$ (cualquier otro valor de a diferente de 0 puede ser usado en lugar de 3).

$$3 \div 0 = q \quad \text{si y sólo si} \quad 3 = 0 \cdot q$$

Por supuesto que no hay valor de q que satisfaga esta proposición porque $0 \cdot q = 0$, y $3 \neq 0$. Además si en (1) $b = 0$ y $a = 0$, la proposición queda:

$$0 \div 0 = q \quad \text{si y sólo si} \quad 0 = 0 \cdot q$$

Debido a que $0 \cdot q = 0$ para cualquier valor de q, $0 \div 0$ puede ser igual a cualquier número real; de aquí que $0 \div 0$ es indeterminado. Por tanto, para cualquier número real a, no existe un significado fijo para $a \div 0$. De aquí que

la división entre cero no está definida.

Los elementos del conjunto de los números reales se pueden ordenar mediante una relación denotada por los símbolos $<$ (léase "menor que") y $>$ (léase "mayor que"). En la definición siguiente de estos símbolos se emplea el concepto de número positivo dado por el Axioma 8 en la Sección A.1.

DEFINICIÓN **Los símbolos $<$ y $>$**

Si a y b son números reales,

(i) $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo
(ii) $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

$3 < 5$ puesto que $5 - 3 = 2$, y 2 es positivo,

$-10 < -6$ debido a que $-6 - (-10) = 4$ y 4 es positivo,

$7 > 2$ porque $7 - 2 = 5$, y 5 es positivo,

$-2 > -7$ ya que $-2 - (-7) = 5$, y 5 es positivo,

$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ debido a que $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$, y $\frac{1}{12}$ es positivo. ◀

Observe que

$3 > 0$ porque $3 - 0 = 3$, y 3 es positivo,

$-4 < 0$ porque $0 - (-4) = 4$, y 4 es positivo.

Estas proposiciones son casos especiales de las siguientes propiedades obtenidas a partir de las definiciones de $>$ y $<$:

$a > 0$	si y sólo	si a es positivo
$a < 0$	si y sólo	si a es negativo

Si escribimos $a \leq b$ (léase "a es menor que o igual a b") se quiere decir que a es menor que b o $a = b$. De manera similar, $a \geq b$ (léase como "a es mayor que o igual a b") indica que a es mayor que b o $a = b$.

Los enunciados $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, y $a \geq b$ son llamados **desigualdades.** En particular, $a < b$ y $a > b$ son **desigualdades estrictas,** mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ son **desigualdades no estrictas.**

Un número x está **entre** a y b si $a < x$ y $x < b$. Se puede escribir lo anterior como una **desigualdad continua** de la forma siguiente:

$$a < x < b$$

Por tanto

$$2 < 3 < 4 \qquad -5 < 1 < \frac{4}{3} \qquad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

Otra desigualdad continua es

$$a \leq x \leq b$$

lo cual significa que $a \leq x$ y $x \leq b$. Otras desigualdades continuas son $a \leq x < b$ y $a < x \leq b$.

► **EJEMPLO 3** ***Empleo de la notación de conjuntos y símbolos de desigualdad para denotar un conjunto de números***

Utilice la notación para conjuntos y uno o más de los símbolos, $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ para denotar cada uno de los conjuntos siguientes: **(a)** el conjunto de todas las x tales que x está entre -2 y 2; **(b)** el conjunto de todas las t tales que $4t - 1$ sea no negativo; **(c)** el conjunto de todas las y tales que $y + 3$ sea positivo y menor que o igual a 15; **(d)** el conjunto de todas las z tales que $2z$ sea mayor que o igual a -5 y menor que -1.

Solución

(a) $\{x \mid -2 < x < 2\}$ **(b)** $\{t \mid 4t - 1 \geq 0\}$

(c) $\{y \mid 0 < y + 3 \leq 15\}$ **(d)** $\{z \mid -5 \leq 2z < -1\}$ ◄

Ahora, se proporcionará una interpretación geométrica del conjunto R de los números reales mediante su asociación a puntos sobre una recta horizontal denominada **eje** (*véase* la Figura 1.2). Se elige un punto (arbitrario) sobre el eje para representar el número 0. A este punto se le denomina **origen.** Se selecciona arbitrariamente una unidad de distancia. Después, cada entero positivo n se representa por el punto situado a una distancia de n unidades a la derecha del origen y cada entero negativo $-n$ se representa por el punto situado a una distancia de n unidades a la izquierda del origen. A estos puntos se les conoce como **puntos unidad.** Éstos se designan mediante los números con los

FIGURA 1.2

cuales se asocian. Por ejemplo, 4 se representa por el punto que está 4 unidades a la derecha del origen, y -4 se representa por el punto que está 4 unidades a la izquierda del origen. La Figura 1.2 muestra los puntos unidad que representan a 0 y los primeros doce enteros positivos y sus correspondientes enteros negativos.

Los números racionales se asocian con puntos sobre el eje de la Figura 1.2 al dividir los segmentos entre los puntos que representan enteros sucesivos. El segmento del eje de 0 a 1 puede dividirse en siete partes iguales. El extremo derecho de la primera de tales subdivisiones se asocia al número $\frac{1}{7}$. Asimismo, el extremo derecho de la segunda subdivisión se asocia a $\frac{2}{7}$, etc. El punto asociado al número $\frac{24}{7}$ se encuentra a veinticuatro séptimos a la derecha del origen, que está a tres séptimos de la distancia desde el punto unidad 3 hasta el punto unidad 4. También, un número racional negativo se asocia a un punto situado a la izquierda del origen. La Figura 1.3 muestra algunos de los puntos asociados a números racionales.

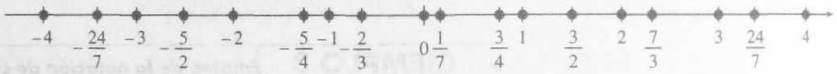


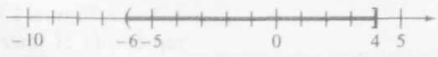
FIGURA 1.3

Las construcciones geométricas pueden utilizarse para encontrar puntos correspondientes a ciertos números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, y otros (*véase* los ejercicios 35 y 36). Los puntos correspondientes a otros números irracionales pueden encontrarse mediante aproximaciones decimales, por ejemplo, un punto correspondiente al número π puede aproximarse empleando algunos de los dígitos en la representación decimal 3.14159 . . . .

Todo número irracional puede asociarse a un punto único sobre el eje, y todo punto que no corresponda a un número racional puede ser asociado a un número irracional. Ello indica que puede establecerse una correspondencia *uno a uno* entre el conjunto de los números reales y los puntos ubicados sobre el eje horizontal. Por esto se hace referencia al eje horizontal como la **recta numérica real.** Debido a que los puntos situados sobre la recta numérica real se identifican con los números que representan, se utiliza el mismo símbolo para el número y el punto.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Considere el conjunto $\{x \mid -6 < x \leq 4\}$. Este conjunto está representado sobre la recta numérica real de la Figura 1.4. El corchete en 4 indica que 4 está en el conjunto, y el paréntesis en -6 indica que -6 no está en el conjunto.



$\{x \mid -6 < x \leq 4\}$

FIGURA 1.4 ◀

Al conjunto de todos los números x que satisfacen la desigualdad continua $a < x < b$ se le denomina **intervalo abierto** y se denota por (a, b). Por tanto,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

El **intervalo cerrado** de a a b es el intervalo abierto (a, b) junto con los dos puntos extremos a y b, y se denota por $[a, b]$. Así pues,

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

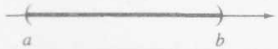


FIGURA 1.5

La Figura 1.5 ejemplifica el intervalo abierto (a, b), y la Figura 1.6 representa el intervalo cerrado $[a, b]$.

El **intervalo abierto** (o **semiabierto**) **por la izquierda** es el intervalo abierto (a, b) junto con el punto extremo derecho b. Se denota por $(a, b]$; así

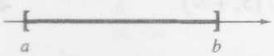


FIGURA 1.6

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

Se define un **intervalo abierto por la derecha** de manera similar y se denota por $[a, b)$. De este modo

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

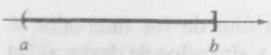


FIGURA 1.7

La Figura 1.7 muestra el intervalo $(a, b]$ y la Figura 1.8 presenta el intervalo $[a, b)$.

Se empleará el símbolo $+\infty$ (infinito positivo) y el símbolo $-\infty$ (infinito negativo); sin embargo, téngase cuidado de no confundir estos símbolos con números reales, ya que no cumplen con las propiedades de dichos números. Se tienen los intervalos siguientes:

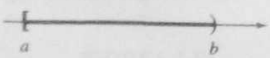


FIGURA 1.8

$$\begin{aligned}
(a, +\infty) &= \{x \mid x > a\} \\
(-\infty, b) &= \{x \mid x < b\} \\
[a, +\infty) &= \{x \mid x \geq a\} \\
(-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\} \\
(-\infty, +\infty) &= R
\end{aligned}$$

La Figura 1.9 ejemplifica el intervalo $(a, +\infty)$ y la Figura 1.10 representa el intervalo $(-\infty, b)$. Obsérvese que $(-\infty, +\infty)$ denota el conjunto de todos los números reales.

FIGURA 1.9

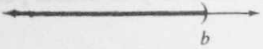


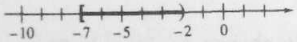
FIGURA1.10

▸ EJEMPLO 4 *Ilustración de un conjunto de números sobre la recta de números reales y definición del conjunto por medio de la notación de intervalo*

Marque sobre la recta numérica real cada uno de los conjuntos siguientes, y mediante notación para intervalos, represente el conjunto:

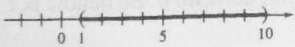
(a) $\{x \mid -7 \leq x < -2\}$ **(b)** $\{x \mid x > 1 \text{ y } x < 10\}$
(c) $\{x \mid x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$ **(d)** $\{x \mid x \geq 2\} \cap \{x \mid x < 9\}$
(e) $\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 3\}$

Solución Los conjuntos se muestran sobre la recta numérica real en la Figura 1.11 (a), (b), (c), (d) y (e), respectivamente. Con notación para intervalos se tiene



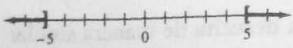
$\{x \mid -7 \leq x < -2\}$

(a)



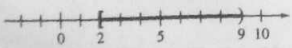
$\{x \mid x > 1 \text{ y } x < 10\}$

(b)



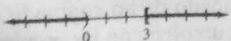
$\{x \mid x \leq -5 \text{ o bien } x \geq 5\}$

(c)



$\{x \mid x \geq 2\} \cap \{x \mid x < 9\}$

(d)



$\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 3\}$

(e)

FIGURA 1.11

(a) $(-2, 4) = \{x \mid -2 < x < 4\}$ **(b)** $[3, 7] = \{x \mid 3 \leq x \leq 7\}$
(c) $[1, 6) = \{x \mid 1 \leq x < 6\}$ **(d)** $(-4, 0] = \{x \mid -4 < x \leq 0\}$
(e) $[0, +\infty) = \{x \mid x \geq 0\}$ **(f)** $(-\infty, 5) = \{x \mid x < 5\}$ ◂

▸ EJEMPLO 5 *Ilustración de un conjunto de números sobre la recta de números reales y definición del conjunto por medio de los símbolos de la notación de conjuntos y desigualdad*

Marque sobre la recta numérica real cada uno de los intervalos siguientes, y mediante notación de conjuntos y símbolos de desigualdad, denote los intervalos: **(a)** $(-2, 4)$; **(b)** $[3, 7]$; **(c)** $[1, 6)$; **(d)** $(-4, 0]$; **(e)** $[0, +\infty)$; **(f)** $(-\infty, 5)$.

Solución Los intervalos se indican sobre la recta numérica real de la Figura 1.12 (a), (b), (c), (d), (e) y (f), respectivamente. Con notación de conjuntos se tiene

Asociado a cada número real hay un número no negativo, denominado su *valor absoluto.*

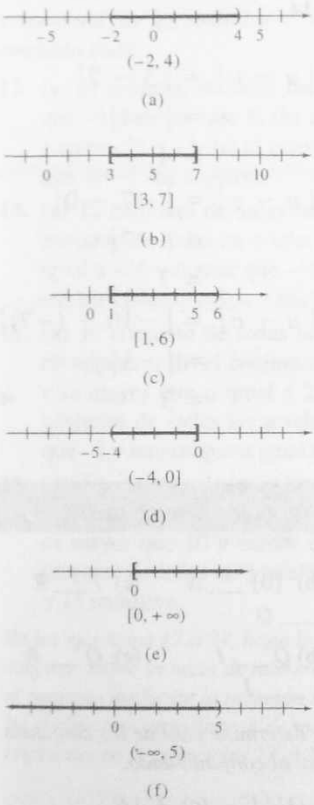


FIGURA 1.12

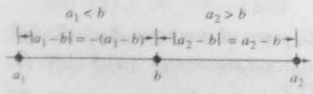


FIGURA 1.13

DEFINICIÓN **Valor absoluto**

Si a es un número real, el **valor absoluto** de a, denotado por $|\ a\ |$, es a, si a es no negativo, y es $-a$, si a es negativo. Con símbolos se escribe

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Si en la definición anterior se toma a a como 6, 0 y -6, se tiene

$$|6| = 6 \qquad |0| = 0 \qquad |-6| = -(-6) = 6 \quad \blacktriangleleft$$

El valor absoluto de un número a se puede considerar su distancia (sin tener en cuenta el sentido, a la izquierda o a la derecha) desde el origen. En particular, los puntos 6 y -6 se encuentran cada uno a seis unidades desde el origen.

Por la definición de valor absoluto se tiene

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a-b \geq 0 \\ -(a-b) & \text{si } a-b < 0 \end{cases}$$

o bien, de manera equivalente,

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a \geq b \\ b-a & \text{si } a < b \end{cases}$$

Este valor absoluto puede interpretarse como la *distancia* entre los puntos a y b de la recta numérica real sin importar el sentido. *Véase* la Figura 1.13.

▶ EJEMPLO 6 *Representación de números por medio de puntos sobre la recta numérica real y determinación de la distancia entre los puntos*

Marque los puntos correspondientes a los números -10, -7, -5, -3, 0, 3, 5, 7 y 10 sobre la recta numérica real. Halle la distancia entre u y v en cada uno de los casos siguientes:

(a) $u = 10$, $v = 3$; **(b)** $u = 3$, $v = 7$; **(c)** $u = 5$, $v = -3$;
(d) $u = -7$, $v = 0$; **(e)** $u = -3$, $v = -5$; **(f)** $u = -10$, $v = -7$.

Solución La Figura 1.14 muestra los puntos correspondientes a los números dados sobre la recta numérica real. En cada inciso la distancia entre u y v es $|u - v|$ unidades:

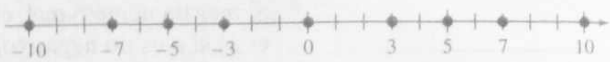


FIGURA 1.14

(a) $|u - v| = |10 - 3|$
$= |7|$
$= 7$

(b) $|u - v| = |3 - 7|$
$= |-4|$
$= 4$

(c) $|u - v| = |5 - (-3)|$
$= |8|$
$= 8$

(d) $|u - v| = |-7 - 0|$
$= |-7|$
$= 7$

(e) $|u - v| = |-3 - (-5)|$
$= |2|$
$= 2$

(f) $|u - v| = |-10 - (-7)|$
$= |-3|$
$= 3$ ◀

EJERCICIOS 1.1

En los ejercicios 1 a 10, recuerde que N es el conjunto de números naturales, Z es el conjunto de enteros, Q es el conjunto de números racionales. I es el conjunto de números irracionales y R es el conjunto de números reales.

En los ejercicios 1 y 2, inserte $\in$, o bien, $\notin$ en el espacio vacío para que el enunciado sea correcto.

1. (a) $15 \_\_\_ N$ (b) $1.41421 \_\_\_ I$ (c) $-3 \_\_\_ Z$ (d) $\pi \_\_\_ Q$

2. (a) $0 \_\_\_ Q$ (b) $2007 \_\_\_ Z$ (c) $\frac{3}{7} \_\_\_ R$ (d) $-5 \_\_\_ I$

En los ejercicios 3 y 4, utilice el símbolo $\subseteq$ para dar el enunciado correcto que comprenda a los dos conjuntos dados.

3. (a) N y Q (b) R y Q (c) Z y N (d) Z y R

4. (a) R y N (b) Z y Q (c) I y R (d) $\{0\}$ y Z

En los ejercicios 5 y 6, inserte $\subseteq$, o bien, $\not\subseteq$ para hacer el enunciado correcto.

5. (a) $Z \_\_\_ R$ (b) $\{0\} \_\_\_ N$ (c) $I \_\_\_ R$ (d) $\{0, \frac{1}{3}, 1.732\} \_\_\_ Q$

6. (a) $N \_\_\_ Q$ (b) $Q \_\_\_ I$ (c) $Q \_\_\_ R$ (d) $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\} \_\_\_ I$

En los ejercicios 7 y 8, determine cuál de los conjuntos N, Z, Q, I, R y $\varnothing$ es igual al conjunto dado.

7. (a) $Q \cap R$ (b) $Q \cup I$ (c) $Z \cup N$ (d) $I \cap Z$

8. (a) $I \cap R$ (b) $Q \cup R$ (c) $I \cap Q$ (d) $Z \cap N$

En los ejercicios 9 y 10, para el conjunto dado S, defina cada uno de los conjuntos siguientes: (a) $S \cap N$; (b) $S \cap Q$; (c) $S \cap I$; (d) $S \cap Z$.

9. $S = \{12, \frac{5}{3}, \sqrt{7}, 0, -38, -\sqrt{2}, 571, \pi, -\frac{1}{10}, 0.666\ldots, 16.34\}$

10. $S = \{-\frac{1}{4}, 26, \sqrt{3}, 1.23, -\sqrt{9}, -0.333\ldots, -6214, \frac{1}{2}\pi, \frac{4}{7}, 1\}$

En los ejercicios 11 y 12, acomode los elementos del subconjunto dado de R en el mismo orden que sus pun-

tos correspondientes de izquierda a derecha sobre la recta numérica real.

11. $\{-2, 3, 21.5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -\frac{7}{4}, -\sqrt{5}, -10, 0, \frac{3}{4}, -\frac{5}{3}, -1\}$

12. $\{\frac{11}{3}, \pi, -8, -\sqrt{2}, 3, -\sqrt{3}, 4, \frac{21}{4}, -\frac{3}{2}, 1.26, \frac{1}{2}\pi\}$

En los ejercicios 13 a 16, utilice notación de conjuntos y uno o más de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ para denotar el conjunto dado.

13. (a) El conjunto de todas las x tales que x es mayor que -9 y menor que 8; (b) el conjunto de todas las y entre -12 y -3; (c) el conjunto de todas las z tales que $4z - 5$ sea negativo.

14. (a) El conjunto de todas las x entre -5 y 3; (b) el conjunto de todas las y tales que y sea mayor que o igual a -26 y menor que -16; (c) el conjunto de todas las t tales que $8t - 4$ sea positivo.

15. (a) El conjunto de todas las x tales que $2x + 4$ es no negativo; (b) el conjunto de todas las r tales que r es mayor que o igual a 2 y menor que 8; (c) el conjunto de todas las a tales que $a - 2$ es mayor que -5 y menor que o igual a 7.

16. (a) El conjunto de todas las s tales que $2s + 3$ es no positivo; (b) el conjunto de todas las x tales que $3x$ es mayor que 10 y menor que o igual a 20; (c) el conjunto de todas las z tales que $2z + 5$ esté entre -1 y 15 inclusive.

En los ejercicios 17 a 24, haga lo siguiente: (i) muestre el conjunto sobre la recta de números reales; (ii) represente el conjunto mediante la notación de intervalo; (iii) describa el conjunto en palabras de manera similar a las descripciones en los ejercicios 13 al 16.

17. (a) $\{x \mid x > 2\}$ (b) $\{x \mid -4 < x \leq 4\}$

18. (a) $\{x \mid x \leq 8\}$ (b) $\{x \mid 3 < x < 9\}$

19. (a) $\{x \mid x > 2 \text{ y } x < 12\}$
(b) $\{x \mid x \leq -4 \text{ o bien } x > 4\}$

20. (a) $\{x \mid x \geq -5 \text{ y } x \leq 5\}$
(b) $\{x \mid x < 3 \text{ o bien } x > 6\}$

21. (a) $\{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x < 12\}$
(b) $\{x \mid x \leq -4\} \cup \{x \mid x > 4\}$

22. (a) $\{x \mid x \geq -5\} \cap \{x \mid x \leq 5\}$
(b) $\{x \mid x < 3\} \cup \{x \mid x > 6\}$

23. (a) $\{x \mid x > -4\} \cap \{x \mid x \leq 0\}$
(b) $\{x \mid x \leq 0\} \cup \{x \mid x \leq 7\}$

24. (a) $\{x \mid x > -8\} \cap \{x \mid x \leq 0\}$
(b) $\{x \mid x > 2\} \cup \{x \mid x > 10\}$

En los ejercicios 25 a 28, marque sobre la recta numérica real el intervalo dado y utilice notación para conjuntos y símbolos de desigualdad para denotar el intervalo.

25. (a) $(2, 7)$ (b) $[-3, 6]$
(c) $(-5, 4]$ (d) $[-10, -2)$

26. (a) $(-5, 5)$ (b) $[1, 9]$
(c) $[-8, 3)$ (d) $(-7, 0]$

27. (a) $[3, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0)$
(c) $(-4, +\infty)$ (d) $(-\infty, +\infty)$

28. (a) $(-\infty, -2]$ (b) $(-1, +\infty)$
(c) $(-\infty, 10)$ (d) $[0, +\infty)$

En los ejercicios 29 y 30, determine el valor absoluto en cada inciso.

29. (a) $|7|$ (b) $|-\frac{3}{4}|$
(c) $|3 - \sqrt{3}|$ (d) $|\sqrt{3} - 3|$

30. (a) $|\frac{1}{3}|$ (b) $|-8|$
(c) $|\pi - 2|$ (d) $|3 - \pi|$

En los ejercicios 31 a 34, marque los puntos correspondientes a u y v sobre la recta numérica real y después determine la distancia entre u y v.

31. (a) $u = 8$, $v = 2$ (b) $u = -8$, $v = 2$
(c) $u = 8$, $v = -2$ (d) $u = -8$, $v = -2$

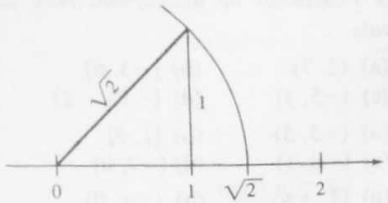
32. (a) $u = 6$, $v = 4$ (b) $u = -6$, $v = 4$
(c) $u = 6$, $v = -4$ (d) $u = -6$, $v = -4$

33. (a) $u = t$, $v = 2t$, y $t > 0$
(b) $u = t$, $v = 2t$, y $t < 0$

34. (a) $u = t$, $v = \frac{1}{2}t$, y $t > 0$
(b) $u = t$, $v = \frac{1}{2}t$, y $t < 0$

35. Para deteminar el punto en la recta numérica real correspondiente al número irracional $\sqrt{2}$, use la construcción indicada en la figura de abajo: desde el punto 1, se dibuja un segmento de recta de longitud unitaria y perpendicular al eje. Al unir el extremo superior de este segmento con el origen se forma un triángulo rectángulo. La longitud de la hipotenusa de este triángulo rectángulo es $\sqrt{2}$ unidades. (Este hecho se deduce a partir del **teorema de Pitágoras,** el cual establece que c^2 tiene el mismo valor que $a^2 + b^2$, donde c unidades es la longitud de la hipotenusa y a unidades y b unidades son las longitudes de los otros dos lados). Después se dibuja un arco de la circunferencia que tiene su centro en el origen y un radio de $\sqrt{2}$; el punto don-

de este arco corta el eje es $\sqrt{2}$. Emplee este método para determinar el punto correspondiente a $\sqrt{5}$.



36. Determine el punto sobre la recta numérica real correspondiente al número irracional $\sqrt{10}$. (*Sugerencia*: *veáse* el ejercicio 35).

37. Escriba una descripción del conjunto de números reales especificando las relaciones entre los conjuntos de números mostrados en la Figura 1.1.

1.2 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

OBJETIVOS

1. **Aprender la notación y terminología asociada con expresiones algebraicas.**
2. **Simplificar expresiones racionales complejas similares a los tipos encontrados en cálculo.**
3. **Aprender las leyes de los exponentes racionales.**
4. **Aplicar las leyes de los exponentes para simplificar expresiones algebraicas.**
5. **Aprender las propiedades de los radicales.**
6. **Simplificar expresiones algebraicas comunes en cálculo.**
7. **Racionalizar los numeradores de fracciones encontradas en cálculo.**

En esta sección se discuten las operaciones con polinomios y expresiones racionales, entre ellas las leyes de exponentes y radicales. Primero se revisarán algunas notaciones y terminología.

A fin de indicar un producto, se utiliza el punto centrado (o a media altura), $\cdot$, o algunas veces se omite el símbolo de multiplicación. Por ejemplo, el producto de a y b puede escribirse de las formas siguientes:

$$a \cdot b \quad (a)(b) \quad a(b) \quad (a)b \quad ab$$

Los números a y b reciben el nombre de **factores** del producto ab.

Suponga que se tiene el producto de dos factores idénticos de x. Puede utilizarse la notación x^2 para indicarse este producto, donde el numeral 2 escrito en la esquina superior derecha del símbolo x se conoce como *exponente* e indica que el número representado por x se utilizará en dos ocasiones como factor; es decir,

$$x^2 = x \cdot x$$

En particular, $3^2 = 3 \cdot 3$; esto es, $3^2 = 9$.

En términos generales, si a es un número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ (n \text{ factores iguales a } a)$$

donde a n se le denomina **exponente,** a se conoce como **base** y a^n recibe el nombre de ***n*-ésima potencia de *a*.** Por ejemplo, x^2 es la segunda potencia de x y y^5 es la quinta potencia de y, donde

$$y^5 = y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$$

La cuarta potencia de -2 se denota por $(-2)^4$ y

$$\begin{aligned}(-2)^4 &= (-2)(-2)(-2)(-2)\\ &= 16\end{aligned}$$

Cuando un símbolo se escribe sin exponente, se entiende que éste es 1. De aquí que $x = x^1$. Se acostumbra leer x^2, la segunda potencia de x, como "x cuadrada", y x^3, la tercera potencia de x, como "x cúbica".

La representación de potencias enteras positivas fue introducida, en 1637, por **René Descartes** (1596-1650).

En la Sección 1.1, se expresó que una **variable** es un símbolo que se utiliza para representar cualquier elemento de un conjunto de reemplazo determinado. Si tal conjunto es R, entonces la variable representa un número real. Una **constante** es un símbolo cuyo conjunto de reemplazo contiene sólo un elemento. Por ejemplo, si se escribe la suma

$$6x^2 + 2x + 5$$

la letra x es el símbolo correspondiente a una variable y los numerales 6, 2 y 5 son símbolos para constantes. Algunas veces las letras se usan como símbolos para constantes si éstas designan números fijos, pero no especificados. Por ejemplo, puede escribirse la suma

$$ax + b$$

donde a y b son símbolos para constantes, y x es un símbolo para una variable.

La suma $6x^2 + 2x + 5$ es una *expresión algebraica.* El término **expresión algebraica** se utiliza para representar una constante, una variable o una combinación de variables y constantes que implican un número finito de operaciones indicadas (adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencia y extracción de raíz) sobre ellas. Ejemplos de expresiones algebraicas son los siguientes:

$$3x^2y^5 \qquad 5x^2 - 8x + 2 \qquad \frac{3x^2 - 6xy + y^2}{x + 2y} \qquad \frac{\sqrt{x + y} - 4}{(z + 2)^3 - \sqrt[3]{x}}$$

Una expresión algebraica que comprenda *únicamente potencias enteras no negativas* de una o más variables y que *no contenga variable*

alguna *en el denominador* recibe el nombre de **polinomio.** Por ejemplo,

$$2x \qquad 5x^2 - 8x + 2 \qquad 4x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

son polinomios en la variable x. Ejemplos de polinomios en las variables x y y son

$$3x^2y^5 \qquad 6x^2 + 8y^2 \qquad 8xy - 7x + y - 3$$

Un **término** de un polinomio es una constante, o bien, una constante multiplicada por potencias enteras no negativas de variables. A un polinomio se le puede considerar como la suma de un número finito de términos. Por ejemplo, $5x^2 - 8x + 2$ puede escribirse como $5x^2 + (-8x) + 2$, y los términos son $5x^2$, $-8x$ y 2. El polinomio $8xy - 7x + y - 3$ puede escribirse como $8xy + (-7x) + y + (-3)$ y los términos son $8xy$, $-7x$, y, y -3.

Se dice que cualquier factor de un producto es el **coeficiente** de los otros factores. Por ejemplo, en el producto $5xyz$ el coeficiente de yz es $5x$, el coeficiente de x es $5yz$, el coeficiente de $5z$ es xy, etc. Si un coeficiente es una constante, entonces se conoce como **coeficiente constante.** De aquí que en el producto $5xyz$, 5 es el coeficiente constante de xyz. A los términos que difieren sólo en sus coeficientes constantes se les denomina **términos semejantes.** Por ejemplo, $6x^2$ y $3x^2$ son términos semejantes, como lo son x y $-4x$. Los términos semejantes de un polinomio se combinan* algebraicamente utilizando la ley distributiva. En particular,

$$\begin{aligned} 6x^2 + x + 7 + 3x^2 - 4x &= (6x^2 + 3x^2) + (x - 4x) + 7 \\ &= (6 + 3)x^2 + (1 - 4)x + 7 \\ &= 9x^2 - 3x + 7 \end{aligned}$$

Si después de combinar los términos semejantes, un polinomio queda con un solo término, a éste se le denomina **monomio;** si tiene dos términos se le llama **binomio;** y si tiene tres términos, se conoce como **trinomio.** Los polinomios $2x$ y $3x^2y^5$ son monomios, $6x^2 + 8y^2$ es un binomio y $5x^2 - 8x + 2$ es un trinomio.

Con la expresión **grado de un monomio** en una variable se hace referencia al exponente de dicha variable. En particular, el monomio $5x^3$ es de grado 3. Si un monomio tiene más de una variable, el **grado** del monomio es la suma de los exponentes de todas las variables que aparecen en él. Por ejemplo, el grado del monomio $3x^2y^5$ es 7. El grado del monomio $-2xyz$ es 3. El grado de un monomio constante distinto de cero es 0. La constante 0 no tiene grado.

El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de sus términos. Por tanto, $7x^2 - 4x + 2$ es un polinomio de segundo grado, y $3x + 6$ es un polinomio de primer grado. El grado de $6x^2y^2 - 4x^3 + 2y$ es 4 debido a que $6x^2y^2$ es el término con el mayor grado, 4.

N. d

N. del R. Al proceso de combinar términos semejantes se le llama *reducción de términos semejantes.*

Si a y b son números reales y $b \neq 0$ la división de a entre b puede representarse por

$$\frac{a}{b}$$

Otras notaciones para la división de a entre b son

$$a \div b \quad \text{y} \quad a/b$$

Las expresiones $\frac{a}{b}$ y a/b son denominadas **fracciones,** el número a es llamado **numerador** y a b se le conoce como **denominador.** Si el numerador y el denominador de una fracción son polinomios, entonces se le llama **expresión racional.** Los siguientes son ejemplos de expresiones racionales

$$\frac{5}{y-7} \qquad \frac{3x+2}{x^2-4} \qquad \frac{2}{5rs} \qquad \frac{3t^2+t+5}{t^4+1}$$

Debido a que el denominador no puede ser cero, se entiende que en las expresiones racionales anteriores, $y \neq 7$, $x \neq \pm 2$, $r \neq 0$ y $s \neq 0$; ya que una expresión racional denota un cociente de números reales, las propiedades de las fracciones también serán válidas para expresiones racionales.

Si una fracción contiene otra fracción, ya sea en el numerador, en el denominador o en ambos, se le conoce como **fracción compleja.** En contraste, una fracción que no es compleja se conoce como una **fracción simple.**

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La fracción

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{4}{7}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}}$$

es compleja. Se encuentra una fracción simple equivalente multiplicando el numerador y el denominador por el **mínimo común denominador (MCDn)** de las fracciones presentes.*

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{4}{7}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}} = \frac{105\cdot\frac{3}{5}-105\cdot\frac{4}{7}}{105\cdot\frac{2}{5}+105\cdot\frac{1}{3}} = \frac{63-60}{42+35} = \frac{3}{77} \quad \blacktriangleleft$$

* N. del R. Para determinar el MCDn se obtiene el MCM de los denominadores de las fracciones.

$\int\int \frac{dy}{dx}$

▸ EJEMPLO 1 *Simplificación de una expresión racional compleja*

Simplifique

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} \qquad h \neq 0$$

la cual es una expresión encontrada en Cálculo.

Solución El MCDn es $x^2(x+h)^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} &= \frac{x^2(x+h)^2\dfrac{1}{(x+h)^2} - x^2(x+h)^2\dfrac{1}{x^2}}{x^2(x+h)^2h} \\
&= \frac{x^2 - (x+h)^2}{hx^2(x+h)^2} \\
&= \frac{x^2 - (x^2 + 2hx + h^2)}{hx^2(x+h)^2} \\
&= \frac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{hx^2(x+h)^2} \\
&= \frac{-h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2} \\
&= -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}
\end{aligned}$$

◂

Ahora se establecerán cinco leyes de exponentes enteros positivos, las cuales aprendió en los cursos previos de álgebra. Cada ley será seguida por un ejemplo ilustrativo que mostrará su aplicación.

Si n y m son enteros positivos y a es un número real,

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

▹ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$
$= 2^5$
$= 32$

(b) $x^4 \cdot x = x^{4+1}$
$= x^5$

(c) $y^3 \cdot y^7 = y^{3+7}$
$= y^{10}$

◂

Si n y m son enteros positivos y a es un número real,

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2}$
$= 2^6$
$= 64$

(b) $(y^4)^6 = y^{4\cdot 6}$
$= y^{24}$ ◀

Si n y m son enteros positivos y a es un número real donde $a \neq 0$,

$$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{si } n > m \\ \dfrac{1}{a^{m-n}} & \text{si } n < m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) $\dfrac{x^6}{x^2} = x^{6-2}$
$= x^4$

(b) $\dfrac{x^3}{x^7} = \dfrac{1}{x^{7-3}}$
$= \dfrac{1}{x^4}$

(c) $\dfrac{x^5}{x^5} = 1$ ◀

Si n es un entero positivo y a y b son números reales,

$$(ab)^n = a^n b^n$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$
$= 8 \cdot 125$
$= 1\,000$

(b) $(x^3y^5)^4 = (x^3)^4 (y^5)^4$
$= x^{12}y^{20}$ ◀

Si n es un entero positivo y a y b son números reales donde $b \neq 0$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

(a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{2^5}{3^5}$
$= \dfrac{32}{243}$

(b) $\left(\dfrac{x^4z^2}{y^3}\right)^3 = \dfrac{(x^4z^2)^3}{(y^3)^3}$
$= \dfrac{(x^4)^3(z^2)^3}{y^9}$
$= \dfrac{x^{12}z^6}{y^9}$ ◀

La definición de a^n como el producto de n factores iguales a a sólo tiene significado cuando n es un entero positivo. Si el exponente es cero o un entero negativo, entonces, se debe definir a^n de otra manera. Estas definiciones deben hacerse de tal forma que las mismas leyes que se aplican para exponentes enteros positivos también sean válidas para exponentes enteros negativos y cero. En particular, en la fórmula $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es adecuada para un exponente cero, entonces si $a \neq 0$,

$$a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$$

$$a^n \cdot a^0 = a^n$$

Debido a que 1 es el número que tiene la propiedad que $a^n \cdot 1 = a^n$, se debe definir a^0 como 1.

Ahora suponga que n es un entero positivo, y que $-n$ es un entero negativo. Si la fórmula $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es adecuada para un exponente entero negativo, entonces

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0$$

$$a^n \cdot a^{-n} = 1$$

De aquí que se deba definir a^{-n} como $\frac{1}{a^n}$. A continuación se establecen las definiciones formalmente.

DEFINICIÓN **Exponentes enteros negativos y cero**

Si n es un entero positivo y a es un número real donde $a \neq 0$,

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

(a) $6^0 = 1$ **(b)** $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ **(c)** $(-5)^0(-2)^{-3} = 1 \cdot \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

Las leyes para exponentes enteros positivos también se aplican para exponentes enteros negativos y cero.

▸ EJEMPLO 2 *Aplicación de las leyes de los exponentes para exponentes enteros negativos*

Escriba la cantidad como un número racional con exponente 1:

(a) $(2^{-3} \cdot 3^{-2})^{-1}$ **(b)** $(2^{-3} + 3^{-2})^{-1}$

Solución

(a) $(2^{-3} \cdot 3^{-2})^{-1} = 2^{-3(-1)} \cdot 3^{-2(-1)}$
$= 2^3 \cdot 3^2$
$= 72$

(b) $(2^{-3} + 3^{-2})^{-1} = \dfrac{1}{(2^{-3} + 3^{-2})^1}$
$= \dfrac{1}{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2}}$
$= \dfrac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}$
$= \dfrac{1}{\frac{17}{72}}$
$= \dfrac{72}{17}$ ◂

Antes de discutir los exponentes fraccionarios, se definirá la raíz n-ésima de un número real.

DEFINICIÓN **Raíz n-ésima de un número real**

Si n es un entero positivo mayor que 1, y a y b son números reales tales que

$$b^n = a$$

entonces b es la **raíz n-ésima** de a.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

(a) Dado que $2^2 = 4$, 2 es una raíz cuadrada de 4; además, debido a que $(-2)^2 = 4$, -2 también es una raíz cuadrada de 4.
(b) Como $3^4 = 81$, 3 es una raíz cuarta de 81. También debido a que $(-3)^4 = 81$, -3 es una raíz cuarta de 81.
(c) Dado que $4^3 = 64$, 4 es la raíz cúbica de 64.
(d) Debido a que $(-4)^3 = -64$, -4 es la raíz cúbica de -64. ◂

Observe que en el inciso (a) del ejemplo ilustrativo 8, hay dos raíces cuadradas de 4; y en la parte (b), hay dos raíces cuartas de 81. En tales casos, para distinguir entre las dos raíces, se introduce el concepto de **raíz *n*-ésima principal.**

DEFINICIÓN **La raíz *n*-ésima principal de un número real**

Si n es un entero positivo mayor que 1, a es un número real, y $\sqrt[n]{a}$ representa la raíz n-ésima principal de a, entonces

(i) si $a > 0$, $\sqrt[n]{a}$ es la n-ésima raíz positiva de a,

(ii) si $a < 0$ y n es impar, $\sqrt[n]{a}$ es la n-ésima raíz negativa de a, y

(iii) $\sqrt[n]{0} = 0$.

En la definición anterior, el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama **signo radical.** La expresión completa $\sqrt[n]{a}$ se denomina **radical,** donde el número a es el **radicando,** el número n es el **índice** y representa el **orden** del radical. Si n no aparece, se deberá entender que el orden es 2.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

En los incisos (a), (b) y (c) se emplea lo establecido en la parte (i) de la definición anterior, y en la parte (d) se utiliza (ii).

(a) $\sqrt{4} = 2$ (léase "la raíz cuadrada principal de 4 es igual a 2").
Observe que aunque -2 también es una raíz cuadrada de 4 no es la raíz cuadrada principal. Sin embargo, se puede escribir $-\sqrt{4} = -2$.

(b) $\sqrt[4]{81} = 3$ (léase "la raíz cuarta principal de 81 es igual a 3").
El número -3 es también una raíz cuarta de 81 y es posible escribir $-\sqrt[4]{81} = -3$.

(c) $\sqrt[3]{64} = 4$ (léase "la raíz cúbica principal de 64 es igual a 4").

(d) $\sqrt[3]{-64} = -4$ (léase "la raíz cúbica principal de -64 es igual -4"). ◀

Observe que si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ está definida únicamente si n es impar. Por ejemplo, $\sqrt{-16}$ no está definida como un número real, debido a que no existe un número real cuyo cuadrado sea -16. Para definir una raíz de orden impar de un número negativo, son necesarios los *números complejos*, los cuales serán discutidos en la Sección 1.3.

La raíz n-ésima principal de un número real b es un número racional si y sólo si b es la n-ésima potencia de un número racional. Por ejemplo, $\sqrt[4]{625} = 5$ debido a que $5^4 = 625$, y $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$ porque $(-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

En la Sección 1.1, se dijo que un número real que no es racional se llama **número irracional** y no puede ser representado por un número decimal finito o por un decimal infinito periódico. Debido a que 3 no es el cuadrado de un número racional, $\sqrt{3}$ es un número irracional. Otros ejemplos de números irracionales son

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{-5} \quad \sqrt[4]{15}$$

Ahora estamos preparados para definir un exponente racional de la forma $1/n$ donde n es un entero positivo. Si la fórmula $(a^m)^n = a^{mn}$ es válida cuando m es igual a $1/n$, entonces se tiene

$$(a^{1/n})^n = a^{n/n}$$
$$(a^{1/n})^n = a$$

La igualdad anterior establece que la n-ésima potencia de $a^{1/n}$ es igual a a. Así, se define $a^{1/n}$ como la raíz n-ésima principal de a.

DEFINICIÓN $a^{1/n}$

Si n es un entero positivo mayor que 1, y a es un número real, entonces si $\sqrt[n]{a}$ es un número real,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

(a) $25^{1/2} = \sqrt{25}$ $= 5$ **(b)** $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8}$ $= -2$ **(c)** $\left(\frac{1}{81}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ $= \frac{1}{3}$ ◀

Considere ahora cómo se deben definir expresiones tales como

$$9^{3/2} \quad 8^{2/3} \quad (-27)^{4/3} \quad 7^{3/4}$$

Si la fórmula $a^{pq} = (a^p)^q$ es aplicable tanto para números racionales como para exponentes enteros, entonces $a^{m/n}$ puede ser definida de forma tal que

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

En la definición se tiene la restricción de que m y n son primos relativos, lo cual significa que ambos no tienen factores comunes enteros y positivos diferentes de 1.

DEFINICIÓN $a^{m/n}$

Si m y n son enteros positivos que son primos relativos y a es un número real, entonces si $\sqrt[n]{a}$ es un número real,

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \iff a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

La doble flecha $\iff$ se usa para establecer que el primer enunciado equivale al segundo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 11

A continuación se aplica la definición de $a^{m/n}$.

(a) $9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$ **(b)** $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ **(c)** $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$

Como la ley conmutativa establece para exponentes racionales que $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$. Entonces, $a^{m/n}$ puede evaluarse determinando ya sea $(\sqrt[n]{a})^m$ o $\sqrt[n]{a^m}$. Sin embargo, el cálculo de $(\sqrt[n]{a})^m$ es más simple que para $\sqrt[n]{a^m}$. *Véase* los ejercicios 17 y 18.

Las leyes de los exponentes enteros positivos son satisfechas por exponentes racionales positivos con una excepción. Si $a < 0$, para ciertos valores de p y q, $(a^p)^q \neq a^{pq}$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 12

(a) $[(-9)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$ y $(-9)^{2(1/2)} = (-9)^1 = -9$

Por tanto, $[(-9)^2]^{1/2} \neq (-9)^{2(1/2)}$.

(b) $[(-9)^2]^{1/4} = 81^{1/4} = 3$ y $(-9)^{2(1/4)} = (-9)^{1/2}$ (no es un número real)

Por tanto, $[(-9)^2]^{1/4} \neq (-9)^{2(1/4)}$.

Los problemas encontrados en el ejemplo ilustrativo 12 se evitan adoptando la regla siguiente: si m y n son enteros positivos pares y a es un número real,

$$(a^m)^{1/n} = |a|^{m/n}$$

Un caso particular de esta igualdad ocurre cuando $m = n$. Entonces se tiene

$$(a^n)^{1/n} = |a| \text{ (si } n \text{ es un entero positivo par)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ (si } n \text{ es par)}$$

Si n es 2, se obtiene

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 13

(a) $[(-9)^2]^{1/2} = |-9| = 9$

(b) $[(-9)^2]^{1/4} = |-9|^{2/4} = 9^{1/2} = 3$ ◀

Para la fórmula $a^{pq} = (a^p)^q$ que se aplica para exponentes enteros negativos, se tiene

$$a^{-m/n} = (a^{1/n})^{-m}$$

De la definición de un número entero con exponente negativo, si $a \neq 0$,

$$(a^{1/n})^{-m} = \frac{1}{(a^{1/n})^m}$$

Por tanto, se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN **Exponente racional negativo**

Si m y n son enteros positivos y además primos relativos entre sí, a es un número real, y $a \neq 0$, entonces si $\sqrt[n]{a}$ es un número real,

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

La primera explicación completa sobre los exponentes fraccionarios negativos fue propuesta por **John Wallis** (1616-1703) en 1655.

Sir **Isaac Newton** (1642-1727) también utilizó tales exponentes en su trabajo.

Los exponentes racionales (positivos, negativos y cero) satisfacen las leyes de los exponentes enteros positivos con el supuesto que $(a^m)^{1/n} = |a|^{m/n}$ cuando m y n son enteros positivos pares.

▸ EJEMPLO 3 *Simplificación de una expresión algebraica aplicando las leyes de los exponentes*

Simplifique las expresiones siguientes. Cada variable puede ser un número real.

(a) $(u^2v^4)^{1/4}$ **(b)** $[(-x)^2\,(y-3)^2]^{1/2}$

Solución

(a)
$$\begin{aligned}(u^2v^4)^{1/4} &= (u^2)^{1/4}(v^4)^{1/4}\\ &= |u|^{2/4}|v|^{4/4}\\ &= |u|^{1/2}|v|\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}&[(-x)^2\,(y-3)^2]^{1/2}\\ &= [(-x)^2]^{1/2}\,[(y-3)^2]^{1/2}\\ &= |-x|\;|y-3|\\ &= |x|\;|y-3|\end{aligned}$$

▸ EJEMPLO 4 *Simplificación de una expresión algebraica encontrada en Cálculo*

Simplifique:

$$\frac{4x^3(x^2+1)^{1/2} - x^4[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)]}{[(x^2+1)^{1/2}]^2}$$

Solución Los dos términos del numerador contienen el factor común $(x^2+1)^{-1/2}$.

$$\begin{aligned}\frac{4x^3(x^2+1)^{1/2} - x^4[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)]}{[(x^2+1)^{1/2}]^2} &= \frac{(x^2+1)^{-1/2}[4x^3(x^2+1) - x^5}{x^2+1}\\ &= \frac{4x^5 + 4x^3 - x^5}{(x^2+1)^{1/2}(x^2+1)}\\ &= \frac{3x^5 + 4x^3}{(x^2+1)^{3/2}}\end{aligned}$$

En Cálculo, algunas veces es necesario *racionalizar el numerador* de una fracción; si se desea obtener una fracción equivalente que no contenga algún radical en el numerador.

Recordando el producto

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

EJERCIC

En los ejer compleja e sentes en Cálculo. presión racional si

1. $\dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$

3. $\dfrac{\frac{1}{3x+3h+}}{}$

4. $\dfrac{\frac{1}{2x+2h-}}{h}$

Cada factor es llamado el *conjugado* del otro. El concepto de **conjugado** es usado para racionalizar el numerador de una fracción cuando el numerador es un binomio que contiene un radical de orden 2. En el ejemplo siguiente se muestra el procedimiento.

▸ EJEMPLO 5 *Racionalización del numerador de una fracción encontrada en Cálculo*

Racionalice el numerador de:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \qquad \text{donde } x>0,\ x+h>0 \text{ y } h\neq 0$$

Solución Multiplique el numerador y el denominador por el conjugado del numerador.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(\sqrt{x+h})^2-\sqrt{x}\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\sqrt{x+h}-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

◂

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios 1 a 8, la expresión racional compleja es similar al tipo de expresiones presentes en Cálculo. En cada ejercicio, encuentre una expresión racional simple equivalente, considere que $h\neq 0$.

1. $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

2. $\dfrac{\dfrac{3+h}{4+h}-\dfrac{3}{4}}{h}$

3. $\dfrac{\dfrac{1}{3x+3h+2}-\dfrac{1}{3x+2}}{h}$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{2x+2h-5}-\dfrac{1}{2x-5}}{h}$

5. $\dfrac{\dfrac{1}{(4+h)^2}-\dfrac{1}{16}}{h}$

6. $\dfrac{\dfrac{x+h}{(x+h)^2+1}-\dfrac{x}{x^2+1}}{h}$

7. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^3}-\dfrac{1}{x^3}}{h}$

8. $\dfrac{\dfrac{1}{(1+h)^3+1}-\dfrac{1}{2}}{h}$

En los ejercicios 9 a 16, escriba la cantidad como un número racional con exponente 1.

9. (a) $(3^2)^4$ (b) $(2 \cdot 3)^5$

(c) $(\frac{7}{13})^2$ (d) $\left(\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{5}\right)^3$

10. (a) $(2^2)^5$ (b) $(3 \cdot 5)^4$

(c) $(\frac{3}{11})^3$ (d) $\left(\dfrac{2^4 \cdot 5^2}{7}\right)^2$

11. (a) $(-5)^{-3}$ (b) $(-6)^{-2}$

(c) $36^{1/2}$ (d) $27^{2/3}$

12. (a) $\dfrac{2}{4^{-3}}$ (b) $9 \cdot 3^0$

(c) $(-8)^{1/3}$ (d) $(\frac{2}{5})^{-4}$

13. (a) $(-\frac{1}{8})^{-2/3}$ (b) $-0.16^{3/2}$

(c) $2^{-3} \cdot 7^{-1}$ (d) $2^{-4} - 2^4$

14. (a) $(-\frac{1}{125})^{-4/3}$ (b) $-0.0016^{-3/4}$

(c) $\dfrac{(-3)^{-4}}{(-4)^{-3}}$ (d) $(4^{-1} \cdot 2^{-3})^{-1}$

15. (a) $\dfrac{2^{-3} + 3^{-2}}{2^{-4} + 3^{-1}}$ (b) $[(-9)^2]^{1/2}$

16. (a) $\dfrac{6^{-1} + 2^{-3}}{5^0 + 4^{-2}}$ (b) $[(-36)^2]^{1/4}$

17. En el ejemplo ilustrativo 11, se aplicó la definición: $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$. Realice los cálculos en las partes (a)-(c) considerando que $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

18. Simplifique de dos formas diferentes:

(i) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$; (ii) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, las expresiones siguientes:

(a) $4^{3/2}$ (b) $16^{3/4}$ (c) $(-125)^{2/3}$

En los ejercicios del 19 al 24, simplifique la expresión donde cada variable puede ser cualquier número real.

19. (a) $(x^6y^8)^{1/4}$

(b) $(4s^4t^{10})^{1/2}$

20. (a) $(9x^2y^4)^{1/2}$

(b) $(a^4b^{12})^{1/4}$

21. (a) $[(-3y)^4(y - 2)^2]^{1/2}$

(b) $[(-2)^8(x - 2)^8(2 - y)^4]^{1/4}$

22. (a) $[(-2a)^4(b + 2)^8]^{1/4}$

(b) $[(-3)^6x^2(x^2 + 9)^2]^{1/2}$

23. $[(-4)^4(u + 1)^8(u - 4)^4]^{1/4}$

24. $\left[\dfrac{(-5)^6x^2}{(x^2 + 4)^2}\right]^{1/2}$

En los ejercicios 25 a 30, la expresión aparece en Cálculo. Simplifíquela de manera similar al ejemplo 4.

25. $\dfrac{(x + 1)^{1/2} - x[\frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2}]}{[(x + 1)^{1/2}]^2}$

26. $\dfrac{(x - 1)^{2/3} - x[\frac{2}{3}(x - 1)^{-1/3}]}{[(x - 1)^{2/3}]^2}$

27. $\dfrac{3x^2(2x + 5)^{1/2} - x^3[\frac{1}{2}(2x + 5)^{-1/2}(2)]}{[(2x + 5)^{1/2}]^2}$

28. $\dfrac{5(x^2 - 1)^{1/2} - 5x[\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2}(2x)]}{[(x^2 - 1)^{1/2}]^2}$

29. $\dfrac{4x^3(3x^2 + 1)^{1/2} - x^4[\frac{1}{2}(3x^2 + 1)^{-1/2}(6x)]}{[(3x^2 + 1)^{1/2}]^2}$

30. $\dfrac{\frac{1}{3}(3x + 1)^{-2/3}(3)(2x - 3)^{1/2} - (3x + 1)^{1/3}[\frac{1}{2}(2x - 3)^{-1/2}(2)]}{[(2x - 3)^{1/2}]^2}$

En los ejercicios 31 a 38, la expresión es común en Cálculo. Racionalice el numerador. Todos los radicandos y todas las variables representan números positivos; ninguno de los denominadores es cero.

31. $\dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$ **32.** $\dfrac{\sqrt{3 + h} - \sqrt{3}}{h}$

33. $\dfrac{\sqrt{2(x + h) + 1} - \sqrt{2x + 1}}{h}$

34. $\dfrac{\sqrt{3(x + h) - 2} - \sqrt{3x - 2}}{h}$

35. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x + h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$ **36.** $\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{2h + 9}} - \dfrac{2}{3}}{h}$

37. $\dfrac{\dfrac{h + 2}{\sqrt{h + 1}} - 2}{h}$ **38.** $\dfrac{\dfrac{\sqrt{h + 2}}{h + 1} - \sqrt{2}}{h}$

En los ejercicios 39 y 40, emplee la expresión siguiente:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

39. Racionalice el numerador de $\dfrac{\sqrt[3]{x + h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

40. Racionalice el numerador de $\dfrac{(h + 1)^{2/3} - 1}{h}$

41. (a) Simplifique la expresión

$$(x^2 + 6x + 9)^{1/2} - (x^2 - 6x + 9)^{1/2}$$

(b) ¿Para qué valores de x, la expresión del inciso (a) es equivalente a 6?

42. (a) Simplifique la expresión

$$(x^2 - 8x + 16)^{1/2} + (x^2 + 8x + 16)^{1/2}$$

(b) ¿Para qué valores de x, la expresión del inciso (a) es equivalente a $2x$?

43. Si $b^n = a$ y b y $\sqrt[n]{a}$ son números reales explique por qué no se puede concluir que $b = \sqrt[n]{a}$. En su explicación incluya un ejemplo numérico particular.

44. Un exponente entero positivo de un número real a puede ser definido de la manera siguiente: $a^1 = a$, y si k es cualquier entero positivo tal que a^k está definido, entonces $a^{k+1} = a^k \cdot a$. Explique por qué esta definición es equivalente a

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a. \quad (n \text{ factores iguales a } a)$$

donde n es cualquier entero positivo.

1.3 CONJUNTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

OBJETIVOS

1. **Aprender acerca del conjunto de números complejos.**
2. **Definir la raíz cuadrada de cualquier número real.**
3. **Definir la raíz cuadrada principal de un número negativo.**
4. **Aprender las propiedades de los números complejos.**
5. **Realizar cálculos con números complejos.**
6. **Calcular potencias de *i*.**

Aun cuando en Cálculo sólo se trabaja con números reales, es importante que se familiarice con el *conjunto de números complejos*. Esto será evidente en el capítulo siguiente cuando los números complejos aparezcan como soluciones para algunas ecuaciones. Además, se utilizan raíces complejas de ecuaciones para resolver ciertas ecuaciones diferenciales en Cálculo. Consecuentemente, se dedica esta sección a un estudio informal de los números complejos.

En la Sección 1.2, se definió la n-ésima raíz de un número real. Dicha definición establece que si n es un entero positivo mayor que 1 y a y b son números reales tales que

$$b^n = a$$

entonces b es la n-ésima raíz de a. Se ha indicado que si $a < 0$ y n es un entero positivo par, no existe raíz n-ésima real de a debido a que una potencia par de un número real siempre es un número positivo o cero. Por ejemplo, suponga que se tiene la ecuación

$$b^2 = -25$$

No hay un número real que pueda ser sustituido por b en esta ecuación. Por tanto, no existe una raíz cuadrada real de -25. Por consiguiente no existe, de manera similar, raíz cuadrada real de cualquier número negativo.

A fin de considerar raíces cuadradas de números negativos, se deben tratar con números diferentes a los números reales. Se debe tener un conjunto de números que contenga al conjunto R de números reales como un subconjunto y que también contenga raíces cuadradas de números negativos. Dicho conjunto de números se denota por C y se hace referencia a él como el conjunto de **números complejos.** Lo primero que se requiere es que el conjunto C sea tal que el número real -1 tenga raíz cuadrada. Sea i un símbolo para un número en C cuyo cuadrado es -1; es decir

$$i^2 = -1$$

Debido a que cada número real es un elemento de C, se deduce que si $b \in R$, entonces $b \in C$. Se desea que el conjunto C sea cerrado bajo las operaciones de adición y multiplicación. Para que la ley de la cerradura de la multiplicación se cumpla, el número $b \cdot i$, abreviado bi, debe ser un elemento de C. Además, si $a \in R$, entonces $a \in C$, y si la ley de la cerradura de la adición es aplicable, el número $a + bi$ será un elemento de C. Ahora se tiene un conjunto C, al que se llamará **conjunto de números complejos,** el cual se representa en símbolos como

$$C = \{a + bi \mid a, b \in R, i^2 = -1\}$$

Para el número complejo $a + bi$, el número a se conoce como la **parte real** y el número b se denomina la **parte imaginaria.**

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) El número $-3 + 6i$ es un número complejo cuya parte real es -3 y la parte imaginaria es 6.
(b) El número $7 + (-4)i$ es un número complejo cuya parte real es 7 y la parte imaginaria es -4. ◂

Si $-p$ es un número negativo, entonces el número complejo $a + (-p)i$ puede escribirse como $a - pi$. Por tanto

$$7 + (-4)i = 7 - 4i$$

Un número real es un número complejo cuya parte imaginaria es 0; o sea, que si a es un número real,

$$a = a + 0i$$

Por tanto, R es un subconjunto de C. Otro subconjunto de C es el conjunto $\mathcal{I}$ de **números imaginarios** definidos por

$$\mathcal{I} = \{a + bi \mid a, b \in R, i^2 = -1, b \neq 0\}$$

El número $0 + bi$ se puede escribir más fácilmente como bi, o sea, que

$$bi = 0 + bi$$

Este número se denomina **número imaginario puro.**

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) El número complejo $-5 + 2i$ es un número imaginario.
(b) El número complejo $8i$ es un número imaginario puro.
(c) El número real -3 es un número complejo, y puede ser escrito como $-3 + 0i$.
(d) El número real 0 es un número complejo, y puede ser escrito como $0 + 0i$. ◀

El término *número imaginario* es una elección histórica poco afortunada, y proviene del hecho de que una ecuación tal como $x^2 = -1$ no tiene solución en el conjunto de números reales. Desde el siglo XV, los matemáticos encontraron conveniente el considerar una ecuación como $x^2 = -1$ de la misma manera que una ecuación como $x^2 = 4$, la cual tiene soluciones reales. Desde su punto de vista, un número cuyo cuadrado es -1 no era real sino algo imaginario. **René Descartes,** en 1637, introdujo las palabras real (*vraye*) e imaginario (*imaginaire*) relacionadas con los conjuntos de números, y **Leonhard Euler** (1707-1783) en 1748 empleó, el símbolo i para representar un número cuyo cuadrado es -1. El término y la simbología han permanecido, aun cuando los números imaginarios son "cosas reales" como los números $7, -4$ y $\sqrt{3}$.

Ahora se establecerá una definición que permite que cualquier número real (positivo, negativo o cero) tenga una raíz cuadrada.

DEFINICIÓN **Raíz cuadrada de cualquier número real**

Se dice que el número s es una **raíz cuadrada** de un número real r si y sólo si

$$s^2 = r$$

Se sabe que cualquier número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa, y el número 0 tiene sólo una raíz cuadrada, 0. ¿Qué hay acerca de la raíz cuadrada de un número negativo? En particular considérese el número -2. Entonces

$$(i\sqrt{2})^2 = i^2(\sqrt{2})^2 \quad \text{y} \quad (-i\sqrt{2})^2 = (-1)^2 i^2 (\sqrt{2})^2$$
$$= (-1)(2) \qquad\qquad = (1)(-1)(2)$$
$$= -2 \qquad\qquad = -2$$

por lo que a partir de la definición, tanto $i\sqrt{2}$ como $-i\sqrt{2}$ son raíces cuadradas de -2. De manera más general si $-p$ es cualquier número negativo, entonces p es un número positivo y tanto $i\sqrt{p}$ como $-i\sqrt{p}$ son raíces cuadradas de $-p$. Al igual que con las raíces cuadradas de los números positivos, se distingue entre las dos raíces cuadradas usando el concepto de raíz *cuadrada principal*.

DEFINICIÓN **Raíz cuadrada principal de un número negativo**

Si p es un número positivo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-p$, denotada por $\sqrt{-p}$, está definida por

$$\sqrt{-p} = i\sqrt{p}$$

Las dos raíces cuadradas de $-p$ se escriben como $\sqrt{-p}$ y $-\sqrt{-p}$, o como $i\sqrt{p}$ y $-i\sqrt{p}$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$

Las dos raíces cuadradas de -5 son $i\sqrt{5}$ y $-i\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt{-16} = i\sqrt{16}$

$= 4i$

Las dos raíces cuadradas de -16 son $4i$ y $-4i$.

(c) $\sqrt{-1} = i\sqrt{1}$

$= i$

Las dos raíces cuadradas de -1 son i y $-i$. ◂

Se dice que un número complejo está en su **forma estándar** cuando se escribe como $a + bi$, donde a y b son números reales.

▸ EJEMPLO 1 *Expresión de un número complejo en la forma estándar*

Escriba en la forma estándar $a + bi$. **(a)** $\sqrt{-9}$; **(b)** $5 - 6\sqrt{-4}$; **(c)** $-\sqrt{\frac{16}{49}} + \sqrt{-25}$; **(d)** $\sqrt{24} + 5\sqrt{-27}$.

Solución

(a) $\sqrt{-9} = i\sqrt{9}$

$= 3i$

$= 0 + 3i$

(b) $5 - 6\sqrt{-4} = 5 - 6(i\sqrt{4})$

$= 5 - 6(2i)$

$= 5 + (-12i)$

(c) $-\sqrt{\frac{16}{49}} + \sqrt{-25} = -\frac{4}{7} + i\sqrt{25}$
$= -\frac{4}{7} + 5i$

(d) $\sqrt{24} + 5\sqrt{-27} = \sqrt{4}\sqrt{6} + 5(i\sqrt{9}\sqrt{3})$
$= 2\sqrt{6} + 5(i \cdot 3\sqrt{3})$
$= 2\sqrt{6} + 15\sqrt{3}i$ ◀

DEFINICIÓN **Igualdad de dos números complejos**

Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Si

$$x + 4i = -6 + yi$$

Entonces $x = -6$ y $y = 4$. ◀

Se desea definir la adición y la multiplicación de números complejos, de tal forma que sean validos los axiomas para estas operaciones en el conjunto de números reales. A fin de llegar a tales definiciones, se consideran dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ como si fueran polinomios en i y luego se simplifica el resultado considerando $i^2 = -1$. De esta manera

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di$$
$$= (a + c) + (b + d)i$$

y

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Entonces se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN **Suma y producto de dos números complejos**

Si $a + bi$ y $c + di$ son números complejos, entonces

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Mediante la anterior definición se puede demostrar que el conjunto C es cerrado bajo las operaciones de adición y multiplicación. También puede probarse que la adición y multiplicación en C son conmutativas y asociativas, y que la multiplicación es distributiva sobre la adición; esto es, si $u, v, w \in C$, entonces

$$u + v = v + u \qquad uv = vu$$
$$(u + v) + w = u + (v + w) \qquad (uv)w = u(vw)$$
$$u(v + w) = uv + uw$$

Más que memorizar las definiciones, se sugiere que realice cálculos con números complejos, como en el ejemplo siguiente.

▸ EJEMPLO 2 *Suma y multiplicación de números complejos*

Encuentre la suma y producto de los siguientes números complejos:

$$5 - 4i \quad \text{y} \quad -2 + 6i$$

Solución

$$\begin{aligned}(5 - 4i) + (-2 + 6i) &= 5 - 2 - 4i + 6i \\ &= 3 + 2i \\ (5 - 4i)(-2 + 6i) &= -10 + 30i + 8i - 24i^2 \\ &= -10 + 38i - 24(-1) \\ &= -10 + 38i + 24 \\ &= 14 + 38i\end{aligned}$$

El **elemento neutro** (o **idéntico**) **aditivo** en el conjunto de números complejos es 0, el cual puede escribirse como $0 + 0i$. El **inverso aditivo** de un número complejo $a + bi$ es $-a - bi$, debido a que

$$\begin{aligned}(a + bi) + (-a - bi) &= [a + (-a)] + [b + (-b)]i \\ &= 0 + 0i\end{aligned}$$

Por tanto,

$$-(a + bi) = -a - bi$$

Como en los número reales, la resta de números complejos está definida en términos de adición; es decir,

$$\begin{aligned}(a + bi) - (c + di) &= (a + bi) + [-(c + di)] \\ &= (a + bi) + (-c - di) \\ &= (a - c) + (b - d)i\end{aligned}$$

▸ EJEMPLO 3 *Sustracción de números complejos*

Encuentre la diferencia de los números complejos del ejemplo 2.

Solución

$$(5 - 4i) - (-2 + 6i) = 5 - 4i + 2 - 6i$$
$$= 7 - 10i \quad \blacktriangleleft$$

Como

$$(a + bi)(1 + 0i) = a \cdot 1 + a \cdot 0i + 1 \cdot bi + bi \cdot 0i$$
$$= a + 0i + bi + 0i^2$$
$$= a + bi$$

se deduce que el **neutro** (o **idéntico**) **multiplicativo** en C es $1 + 0i$, el cual es el número real 1.

El **conjugado** del número complejo $a + bi$ es $a - bi$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) El conjugado de $3 + 2i$ es $3 - 2i$.
(b) El conjugado de $-4 - 5i$ es $-4 - (-5i)$ o de forma equivalente $-4 + 5i$. ◂

Ahora se calculará la suma y el producto de un número complejo y su conjugado:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a \qquad (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2$$
$$= a^2 - b^2(-1)$$
$$= a^2 + b^2$$

Observe que en ambos casos se obtiene un número real. El concepto del conjugado es útil en ciertos cálculos con números complejos. Por ejemplo, para representar el cociente

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

en forma estándar $u + vi$, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Esta operación se realiza en el ejemplo siguiente.

▸ EJEMPLO 4 *División de números complejos*

Encuentre el cociente de los números complejos $5 - 4i$ y $-2 + 6i$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{5-4i}{-2+6i} &= \frac{(5-4i)(-2-6i)}{(-2+6i)(-2-6i)}\\ &= \frac{-10-22i+24i^2}{4-36i^2}\\ &= \frac{-10-22i+24(-1)}{4-36(-1)}\\ &= \frac{-34-22i}{40}\\ &= -\frac{17}{20}-\frac{11}{20}i\end{aligned}$$

El **inverso multiplicativo** (o **recíproco**) del número complejo $a + bi$ es $\dfrac{1}{a+bi}$. Usando el método del ejemplo 4, como se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo, se puede expresar el inverso multiplicativo en forma estándar.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

El inverso multiplicativo de $4 - 3i$ es $\frac{1}{4-3i}$. Para representar este número complejo en la forma estándar $a + bi$, multiplique el numerador y el denominador por el conjugado de $4 - 3i$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-3i} &= \frac{1\cdot(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}\\ &= \frac{4+3i}{16-9i^2}\\ &= \frac{4+3i}{16-9(-1)}\\ &= \tfrac{4}{25}+\tfrac{3}{25}i\end{aligned}$$

Así, el inverso multiplicativo de $4 - 3i$ es $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$. Por lo que

$$\begin{aligned}(4-3i)(\tfrac{4}{25}+\tfrac{3}{25}i) &= \tfrac{16}{25}+\tfrac{12}{25}i-\tfrac{12}{25}i-\tfrac{9}{25}i^2\\ &= \tfrac{16}{25}-\tfrac{9}{25}(-1)\\ &= \frac{16+9}{25}\\ &= 1\end{aligned}$$

En resumen, se tienen las propiedades siguientes del conjunto C.

El conjunto de números complejos

1. El conjunto C es cerrado bajo las operaciones de adición y multiplicación.
2. La adición y la multiplicación en C son conmutativas y asociativas; la multiplicación es distributiva sobre la adición.
3. Hay un elemento idéntico para la adición y un elemento idéntico para la multiplicación.
4. Cada elemento en C tiene un inverso aditivo y cada elemento en C, excepto $0 + 0i$, tiene un inverso multiplicativo.

Estas propiedades son los axiomas de campo discutidos en la Sección A.1 del Apéndice. Por tanto, el conjunto C es un campo bajo las operaciones de adición y multiplicación. Consecuentemente, las leyes de los exponentes se aplican a potencias positivas enteras de i.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 i & i^4 &= i^2 i^2 & i^5 &= i^4 i & i^6 &= i^4 i^2 \\ &= (-1)i & &= (-1)(-1) & &= (1)i & &= (1)(-1) \\ &= -i & &= 1 & &= i & &= -1 \end{aligned}$$ ◀

En el ejemplo ilustrativo 7, se ve que los resultados obtenidos son i, $-i$, 1, y -1. Al observar que $i^4 = 1$, se puede encontrar cualquier potencia positiva entera de i, y es uno de los cuatro números obtenidos en el ejemplo ilustrativo 7.

► EJEMPLO 5 *Cálculo de potencias de i*

Encuentre: **(a)** i^9; **(b)** i^{23}; **(c)** $1/i^3$.

Solución

(a) $$\begin{aligned} i^9 &= i^8 i \\ &= (i^4)^2 i \\ &= (1)^2 i \\ &= i \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} i^{23} &= i^{20} i^2 i \\ &= (i^4)^5 (-1) i \\ &= (1)^5 (-1) i \\ &= -i \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} \frac{1}{i^3} &= \frac{1}{-i} \\ &= \frac{1 \cdot i}{-i^2} \\ &= \frac{i}{-(-1)} \\ &= i \end{aligned}$$ ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

$$\begin{aligned}\sqrt{-4}\sqrt{-25} &= (i\sqrt{4})(i\sqrt{25}) \\ &= (2i)(5i) \\ &= 10i^2 \\ &= -10\end{aligned}$$ ◂

Observe que en el ejemplo ilustrativo 8 antes de multiplicar se ha expresado $\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-25}$ como $i\sqrt{4}$ e $i\sqrt{25}$, respectivamente. A fin de evitar cometer un error, se recomienda reemplazar el símbolo $\sqrt{-p}$ cuando $p > 0$, por $i\sqrt{p}$ antes de realizar cualquier multiplicación o división (*véase* los ejercicios 49 y 50).

► EJEMPLO 6 *Multiplicación y división de números complejos que contienen radicales*

Haga las operaciones indicadas y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

(a) $\sqrt{-5}(\sqrt{15} - \sqrt{-5})$ **(b)** $(2 - \sqrt{-9}) \div (2 + \sqrt{-9})$

Solución

(a)
$$\begin{aligned}\sqrt{-5}(\sqrt{15} - \sqrt{-5}) &= i\sqrt{5}(\sqrt{3 \cdot 5} - i\sqrt{5}) \\ &= i\sqrt{3 \cdot 5^2} - i^2\sqrt{5^2} \\ &= i\sqrt{5^2}\sqrt{3} - (-1)\sqrt{5^2} \\ &= 5 + 5i\sqrt{3}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{2 - \sqrt{-9}}{2 + \sqrt{-9}} &= \frac{(2 - 3i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{4 - 6i - 6i + 9i^2}{4 - 9i^2} \\ &= \frac{4 - 12i + 9(-1)}{4 - 9(-1)} \\ &= \frac{-5 - 12i}{13} \\ &= -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i\end{aligned}$$ ◂

EJERCICIOS 1.3

En los ejercicios 1 a 4, escriba el número complejo en la forma $a + bi$

1. **(a)** 5 **(b)** $\sqrt{-49}$ **(c)** $3 + \sqrt{-25}$ **(d)** $3 - \sqrt{-25}$

2. **(a)** -4 **(b)** $\sqrt{-36}$ **(c)** $-2 + \sqrt{-16}$ **(d)** $-2 - \sqrt{-16}$

* **N. de R.** El resultado de ejemplo 6(a) es $5 + 5i\sqrt{3}$, en donde se ha colocado a i entre 5 y $\sqrt{3}$ esto se hace así para evitar posibles confusiones.

3. (a) $8 - 5\sqrt{-1}$ (b) $-8 + 5\sqrt{-1}$
(c) $-\sqrt{36} + \sqrt{-36}$ (d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\sqrt{-45}$

4. (a) $-4 + \sqrt{-4}$ (b) $48 - \sqrt{-48}$
(c) $2 - \sqrt{-\frac{25}{16}}$ (d) $54 + \sqrt{-162}$

En los ejercicios 5 a 36, realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en la forma a + bi.

5. (a) $(5 + 2i) + (7 + i)$
(b) $(3 - 6i) - (2 - 4i)$

6. (a) $(4 - 3i) + (-6 + 8i)$
(b) $(7 + 10i) - (1 - 5i)$

7. (a) $(-9 - 4i) + (3 + 4i)$ (b) $7i - (5 - i)$

8. (a) $(3 + 8i) + (-3 - 6i)$ (b) $9 - (2 - 4i)$

9. $(5 + 2\sqrt{-9}) + (3 + 4\sqrt{-25})$

10. $(4 - 3\sqrt{-16}) + (-1 - \sqrt{-4})$

11. $(-3 - \sqrt{-20}) - (6 - \sqrt{-45})$

12. $(4 - \sqrt{-18}) - (2 - \sqrt{-2})$

13. (a) $\sqrt{-9}\sqrt{-25}$ (b) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}$

14. (a) $\sqrt{-4}\sqrt{-16}$ (b) $\sqrt{-5}\sqrt{-75}$

15. $\sqrt{-12}\sqrt{-16}\sqrt{-27}$

16. $\sqrt{-27}\sqrt{-54}\sqrt{-162}$

17. $\sqrt{-8}(3\sqrt{-9} - \sqrt{-8})$

18. $\sqrt{-18}(\sqrt{-2} - 9\sqrt{-18})$

19. $(2 - 7i)(2 + 7i)$

20. $(4 - 3i)(-1 + 2i)$

21. $(3 + 2\sqrt{-3})(-2 + 3\sqrt{-3})$

22. $(2 - \sqrt{-2})(2 - 3\sqrt{-2})$

23. $(-3 - 3\sqrt{-3})^2$

24. $(\sqrt{-3} - \sqrt{-2})^2$ **25.** $-5 \div i$

26. $7 \div 3i$ **27.** $1 \div (2i - 3)$

28. $-4 \div (6 + i)$ **29.** $(3 + 2i) \div (2 - i)$

30. $(2 - 5i) \div 3i$ **31.** $(3 + 2i) \div 4i$

32. $(2 - 6i) \div (2i - 3)$

33. $1 \div (3 + \sqrt{-2})$

34. $(\sqrt{-5} - 3)(2\sqrt{-5} + 4)$

35. $1 \div (3 + 2i)^2$ **36.** $1 \div (4 - 2i)^2$

En los ejercicios 37 a 44, simplifique la expresión.

37. (a) i^{11} (b) i^{33} (c) i^{26}

38. (a) i^{22} (b) i^{37} (c) i^{47}

39. (a) $\frac{1}{i^5}$ (b) $\frac{1}{i^{15}}$ (c) $\frac{1}{i^6}$

40. (a) $\frac{1}{i^7}$ (b) $\frac{1}{i^9}$ (c) $\frac{1}{i^{14}}$

41. $(i^4 + i^3 - i^2 + 1)^2$

42. $(2i + 3i^3 - 4i^5 - i^7)^2$

43. $(2i + 3i^2 + 4i^3 - i^6)^3$

44. $(i - 1)^2 - (-i - 1)^2 + i^4$

En los ejercicios 45 a 48, encuentre el valor de la expresión para el valor indicado de x.

45. $x^2 - 2x + 3;\ x = 1 - i\sqrt{2}$

46. $x^2 - 2x + 4;\ x = 1 - \sqrt{-3}$

47. $4x^2 + 4x + 3;\ x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-2})$

48. $3x^2 - 2x + 2;\ x = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{-5})$

49. Calcule:
(a) $\sqrt{4}\sqrt{25}$ y $\sqrt{4 \cdot 25}$
(b) $\sqrt{-4}\sqrt{-25}$ y $\sqrt{(-4)(-25)}$
(c) $\sqrt{4}\sqrt{-25}$ y $\sqrt{4(-25)}$
(d) ¿En qué condiciones $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ y $\sqrt{ab}$ son iguales?

50. Calcule:
(a) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$ y $\sqrt{\frac{16}{4}}$
(b) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}$ y $\sqrt{\frac{-16}{-4}}$
(c) $\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{4}}$ y $\sqrt{\frac{-16}{4}}$
(d) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}$ y $\sqrt{\frac{16}{-4}}$
(e) ¿En qué condiciones $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ y $\sqrt{\frac{a}{b}}$ son iguales?

1.4 PLANO NUMÉRICO

OBJETIVOS

1. **Establecer el sistema rectangular de coordenadas cartesianas.**
2. **Aplicar y familiarizarse con el teorema de Pitágoras.**
3. **Aprender y aplicar la fórmula de distancia.**
4. **Aprender y aplicar las fórmulas de punto medio.**
5. **Probar algunos teoremas de geometría plana por medio de geometría analítica.**

El origen de la geometría analítica es acreditado a **René Descartes** (1596-1650), matemático y filósofo francés. En su libro *Geometría*, publicado en 1635, Descartes estableció la unión del álgebra y la geometría por medio del *sistema coordenado cartesiano rectangular* (llamado así en honor a Descartes). Este sistema coordenado utiliza *pares ordenados* de números reales.

Dos números reales cualesquiera forman un **par,** y cuando el orden de los números tiene significado se denomina **par ordenado.** Si x es el primer número real y y es el segundo, este par ordenado es denotado por (x, y). Observe que el par ordenado (5, 2) es diferente del par ordenado (2, 5).

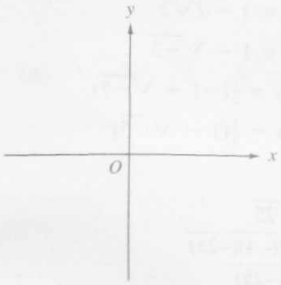


FIGURA 1.15

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales se llama **plano numérico,** denotado por R^2, y cada par ordenado (x, y) es un **punto** en el plano numérico. De la misma manera que R, el conjunto de números reales, puede ser identificado con puntos sobre un eje (espacio unidimensional), se puede identificar R^2 con puntos en un plano geométrico (espacio bidimensional). Para ello, se eligen dos rectas en el plano geométrico, una horizontal, llamada **eje x,** y otra vertical, denominada **eje y.** El punto de intersección de los ejes x y y recibe el nombre de **origen** y se representa por la letra O. Las unidades de medida en los dos ejes es comúnmente la misma. Se establece que el sentido positivo del eje x es hacia la derecha del origen y el sentido positivo en el eje y es hacia arriba del origen. *Véase* la Figura 1.15.

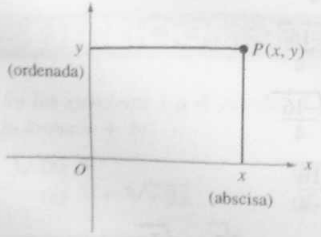


FIGURA 1.16

Ahora se asociará un par ordenado de números reales (x, y) con un punto en el plano geométrico. En el punto x sobre el eje horizontal y el punto y sobre el eje vertical, se trazan segmentos de recta perpendiculares a los ejes respectivos. La intersección de estos dos segmentos de recta perpendiculares es el punto P asociado con el par ordenado (x, y), *véase* la Figura 1.16. El primer número, x, del par recibe el nombre de **abscisa** (o bien, **coordenada x**) de P y al segundo número, y, se le denomina **ordenada** (o **coordenada y**) de P. Si la abscisa es positiva, P se encuentra a la derecha del eje y; y si es negativa, P se encuentra a la izquierda del eje y. Si la ordenada es positiva, P está por arriba del eje x; y si es negativa, P se halla por debajo del eje x. La abscisa y la ordenada de un punto reciben el nombre de **coordenadas cartesianas rectangulares del punto.** Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos ubicados en un plano geométrico y R^2; es decir, a cada punto le corresponde un único par ordenado (x, y) y con cada par ordenado (x, y)

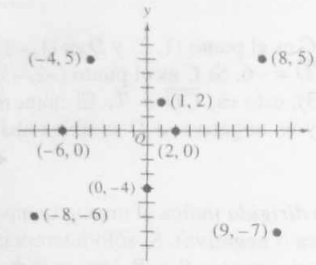


FIGURA 1.17

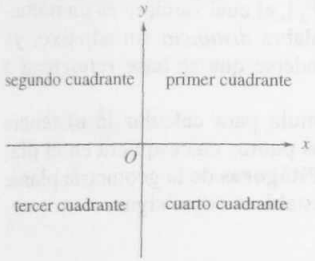


FIGURA 1.18

está asociado sólo un punto. A esta correspondencia uno a uno se le conoce como **sistema coordenado cartesiano rectangular.** La Figura 1.17 representa un sistema coordenado cartesiano rectangular con algunos puntos localizados gráficamente.

A los ejes x y y se les llama **ejes coordenados.** Éstos dividen el plano en cuatro partes que se donominan **cuadrantes.** El primer cuadrante es aquél en el cual las abscisas y las ordenadas son positivas; esto es, el cuadrante superior derecho. Los otros cuadrantes se numeran en el sentido opuesto al giro de las manecillas del reloj, por lo cual el cuarto cuadrante es el inferior derecho. *Véase* la Figura 1.18.

Debido a la correspondencia uno a uno se identifica a R^2 con el plano geométrico. Por esta razón, a un par ordenado (x, y) se le denomina punto.

Ahora se discutirá el problema de encontrar la distancia entre dos puntos en R^2. Si A es el punto (x_1, y_1) y B es el punto (x_2, y_1), donde A y B tienen la misma ordenada, pero diferente abscisa, la **distancia dirigida** de A a B se denota por $\overline{AB}$, y se define como

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Refiérase a la Figura 1.19 (a), (b) y (c). Si A es el punto (3, 4) y B es el punto (9, 4), entonces $\overline{AB} = 9 - 3$; o sea que $\overline{AB} = 6$. Si A es el punto (−8, 0) y B es el punto (6, 0), en consecuencia $\overline{AB} = 6 - (-8)$; de donde $\overline{AB} = 14$. Si A es el punto (4, 2) y B es (1, 2), entonces $\overline{AB} = 1 - 4$; y por tanto, $\overline{AB} = -3$. Se observa que $\overline{AB}$ es positivo si B está a la derecha de A, y $\overline{AB}$ es negativo si B se ubica a la izquierda de A.

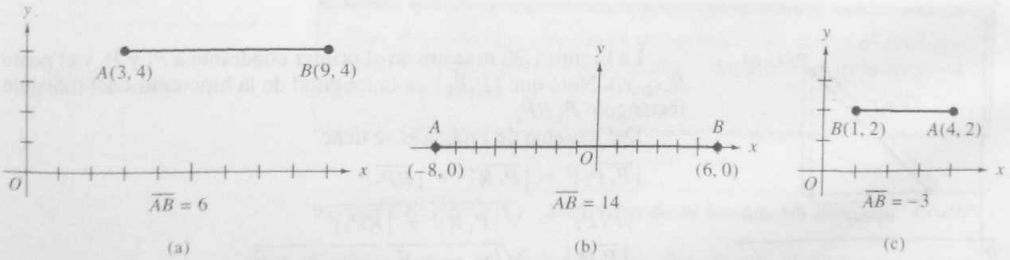


FIGURA 1.19 ◂

Si C es el punto (x_1, y_1) y D es el punto (x_1, y_2), entonces la **distancia dirigida** de C a D, denotada por $\overline{CD}$, está definida por

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

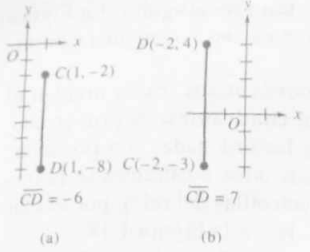


FIGURA 1.20

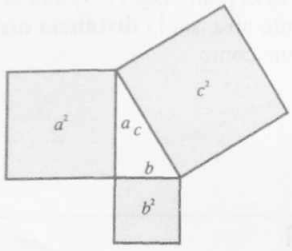


FIGURA 1.21

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Refiérase a la Figura 1.20 (a) y (b). Si C es el punto $(1, 2)$ y D es $(1, -8)$, entonces $\overline{CD} = -8 - (-2)$; o sea que $\overline{CD} = -6$. Si C es el punto $(-2, -3)$ y D es $(-2, 4)$, entonces $\overline{CD} = 4 - (-3)$; esto es, $\overline{CD} = 7$. El número $\overline{CD}$ es positivo si D está arriba de C, y es negativo si D se ubica abajo de C.

Observe que el término *distancia dirigida* indica al mismo tiempo una distancia y una dirección* (positiva o negativa). Si sólo interesa la longitud del segmento de recta entre los dos puntos P_1 y P_2 (que es la distancia entre los puntos P_1 y P_2 sin considerar la dirección), entonces se utiliza el término *distancia no dirigida*. Para representar la **distancia no dirigida** de P_1 a P_2 se utilizará $|\overline{P_1P_2}|$, el cual siempre es un número positivo o cero. Si se emplea la palabra *distancia* sin adjetivo, ya sea *dirigida* o *no dirigida*, debe entenderse que se hace referencia a una distancia no dirigida.

Ahora se desea obtener una fórmula para calcular la distancia $|\overline{P_1P_2}|$, si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera en el plano. Para ello, se utiliza el **teorema de Pitágoras** de la geometría plana, mostrado en la Figura 1.21, el cual se establece como sigue.

TEOREMA *Teorema de Pitágoras*

En un triángulo rectángulo, si a y b son las longitudes de los lados perpendiculares y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

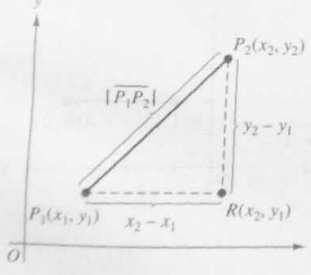


FIGURA 1.22

La Figura 1.22 muestra en el primer cuadrante a P_1 y P_2 y el punto $R(x_2, y_1)$. Note que $|\overline{P_1P_2}|$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo P_1RP_2.

Del teorema de Pitágoras se tiene

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1R}|^2 + |\overline{RP_2}|^2$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1R}|^2 + |\overline{RP_2}|^2}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En esta fórmula no se tiene el símbolo $\pm$ frente del radical debido a que $|\overline{P_1P_2}|$ es un número no negativo. La fórmula es válida para todas las posibles posiciones de P_1 y P_2 en los cuatro cuadrantes. La longitud

* **N. del R.** Esta dirección, positiva o negativa, puede interpretarse como el sentido en que se recorre un segmento. Por ejemplo, $\overline{AB}$ indica que el segmento, cuyos extremos son A y B, se recorre de A a B; mientras que $\overline{BA}$ es recorrido de B a A.

de la hipotenusa siempre es $|\overline{P_1P_2}|$, y las longitudes de los catetos siempre son $|\overline{P_1R}|$ y $|\overline{RP_2}|$. Entonces se tiene la fórmula siguiente.

Fórmula de distancia

La distancia entre dos puntos* $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

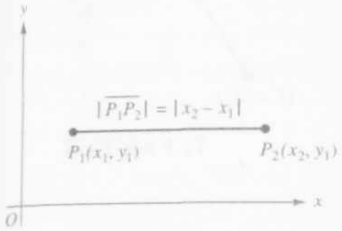


FIGURA 1.23

Si P_1 y P_2 están sobre la misma recta horizontal, como en la Figura 1.23, entonces $y_2 = y_1$ y

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1| \quad \text{(porque } \sqrt{a^2} = |a|\text{)}$$

Además, si P_1 y P_2 están sobre la misma recta vertical, como en la Figura 1.24, entonces $x_2 = x_1$ y

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad |\overline{P_1P_2}| = |y_2 - y_1|$$

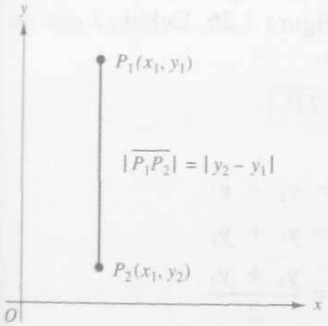


FIGURA 1.24

En el ejemplo siguiente, se emplea el recíproco** del teorema de Pitágoras.

TEOREMA *Recíproco del teorema de Pitágoras*

Si a, b y c son las longitudes de un triángulo, y $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo, y c es la longitud de la hipotenusa.

▸ EJEMPLO 1 *Aplicación de la fórmula de distancia*

Compruebe que los puntos $P(1, 2)$, $Q(4, 7)$ y $R(-9, 8)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

* **N. del R.** La distancia entre los puntos P_1 y P_2 también suele denotarse como $d(P_1, P_2)$.

** **N. del R.** Generalmente, un teorema se enuncia en la forma *si P entonces Q* en la que a P se le llama *hipótesis* y a Q, *tesis*. El *recíproco* de un teorema es el teorema que resulta al intercambiar la hipótesis y la tesis en el teorema original. Debe tenerse en cuenta que el recíproco de un teorema no siempre es verdadero.

Solución En la Figura 1.25 se muestra el triángulo. Calcule las longitudes de los lados aplicando la fórmula de distancia.

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(4-1)^2 + (7-2)^2} \qquad |\overline{PR}| = \sqrt{(-9-1)^2 + (8-2)^2}$$
$$= \sqrt{9+25} \qquad = \sqrt{100+36}$$
$$= \sqrt{34} \qquad = \sqrt{136}$$
$$|\overline{QR}| = \sqrt{(-9-4)^2 + (8-7)^2}$$
$$= \sqrt{169+1}$$
$$= \sqrt{170}$$

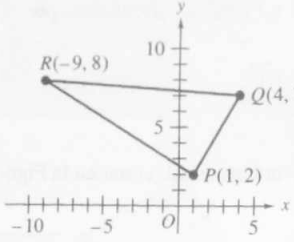


FIGURA 1.25

Por tanto,

$$|\overline{PQ}|^2 + |\overline{PR}|^2 = 34 + 136$$
$$= 170$$
$$= |\overline{QR}|^2$$

Así, el triángulo es un triángulo rectángulo, y la hipotenusa es el lado que conecta los puntos Q y R.

Ahora se obtendrán las fórmulas para determinar el punto medio de un segmento de recta.

Suponga que $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$. Refiérase a la Figura 1.26. Debido a que los triángulos P_1RM y MTP_2 son congruentes,

$$|\overline{P_1R}| = |\overline{MT}| \quad \text{y} \quad |\overline{RM}| = |\overline{TP_2}|$$

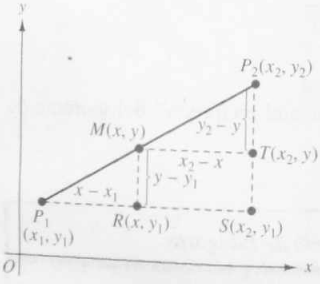


FIGURA 1.26

De este modo

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad y - y_1 = y_2 - y$$
$$2x = x_1 + x_2 \qquad 2y = y_1 + y_2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Fórmulas de punto medio

Si $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$, entonces

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

En la deducción de las fórmulas, se ha considerado que $x_2 > x_1$ y $y_2 > y_1$. Se obtienen las mismas fórmulas usando cualquier orden para estos números.

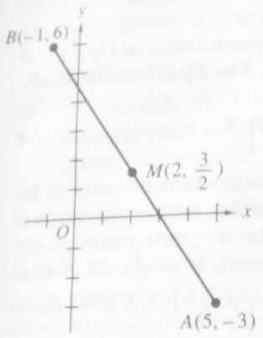


FIGURA 1.27

► **EJEMPLO 2** ***Aplicación de las fórmulas de punto medio y distancia***

(a) Determine las coordenadas del punto medio M del segmento de recta que va de $A(5, -3)$ a $B(-1, 6)$.

(b) Localice los puntos A, M y B, y demuestre que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$.

Solución

(a) De las fórmulas de punto medio, si M es el punto (x, y) entonces

$$x = \frac{5 + (-1)}{2} \qquad y = \frac{-3 + 6}{2}$$

$$= 2 \qquad = \frac{3}{2}$$

Por tanto, M es el punto $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

(b) La Figura 1.27 muestra los puntos A, M y B. Aplicando la fórmula de distancia se obtiene

$$|\overline{AM}| = \sqrt{(2 - 5)^2 + \left(\frac{3}{2} + 3\right)^2} \qquad |\overline{MB}| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + \left(6 - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9 + \frac{81}{4}} \qquad = \sqrt{9 + \frac{81}{4}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{13} \qquad = \frac{3}{2}\sqrt{13}$$

Por tanto, $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$. ◄

Los teoremas de geometría plana pueden ser probados mediante la geometría analítica utilizando coordenadas y técnicas de álgebra. El ejemplo siguiente muestra el procedimiento.

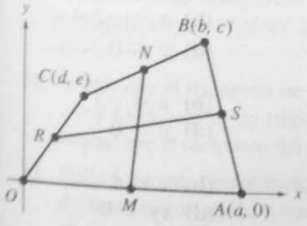


FIGURA 1.28

► **EJEMPLO 3** ***Prueba de un teorema de geometría plana por medio de geometría analítica***

Emplee geometría analítica para demostrar que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero se bisectan mutuamente.

Solución Dibuje un cuadrilátero general. Debido a que los ejes coordenados pueden elegirse en cualquier parte del plano, y como la elección de la posición de los ejes no afecta la validez del teorema, se toma al origen como un vértice y la prolongación de un lado, que contenga al origen sobre el eje x. Estas elecciones simplifican las coordenadas de los dos vértices sobre el eje x. *Véase* la Figura 1.28.

Ahora se establecen las hipótesis y la tesis del teorema.

Hipótesis: $OABC$ es un cuadrilátero. M es el punto medio de OA; N es el punto medio de CB; R es el punto medio de OC y S es el punto medio de AB.

Conclusión: MN y RS se bisectan mutuamente.

Demostración Para comprobar que dos segmentos de recta se bisectan mutuamente, se debe demostrar que ambos segmentos tienen el mismo punto medio. A partir de las fórmulas de punto medio se obtienen las coordenadas de M, N, R y S. El punto M es $(\frac{1}{2}a, 0)$, N es el punto $(\frac{1}{2}(b+d), \frac{1}{2}(c+e))$, R es el punto $(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}e)$, y S es el punto $(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}c)$.

La abscisa del punto medio de MN es $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(b+d)] = \frac{1}{4}(a+b+d)$.
La ordenada del punto medio de MN es $\frac{1}{2}[0+\frac{1}{2}(c+e)] = \frac{1}{4}(c+e)$.
Por tanto, el punto medio de MN es el punto $(\frac{1}{4}(a+b+d), \frac{1}{4}(c+e))$.
La abscisa del punto medio de RS es $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}(a+b)] = \frac{1}{4}(a+b+d)$.
La ordenada del punto medio de RS es $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}c] = \frac{1}{4}(c+e)$.
Por tanto, el punto medio de RS es el punto $(\frac{1}{4}(a+b+d), \frac{1}{4}(c+e))$.
Así, el punto medio de MN es el mismo que el punto medio de RS.
Por tanto, MN y RS se bisectan mutuamente. ∎

EJERCICIOS 1.4

En los ejercicios 1 y 2, localice el punto P sobre un sistema coordenado cartesiano rectangular y establezca el cuadrante en el cual se ubica.

1. (a) $P(3, 7)$ (b) $P(-4, -6)$ (c) $P(2, -5)$ (d) $P(-1, 4)$

2. (a) $P(5, 6)$ (b) $P(8, -1)$ (c) $P(-7, -2)$ (d) $P(-9, 3)$

En los ejercicios 3 a 8, localice en un sistema coordenado cartesiano rectangular el punto P y cada uno de los puntos siguientes: (a) El punto Q tal que la recta que pasa por Q y P es perpendicular al eje x y es bisectada por él. Dé las coordenadas de Q. (b) El punto R tal que la recta que pasa a través de P y R es perpendicular al eje y y es bisectada por este eje. Dé las coordenadas de R. (c) El punto S tal que la recta que pasa por P y S es bisectada por el origen. Dé las coordenadas de S. (d) El punto T tal que la recta que pasa a través de P y T es perpendicular y bisectada por una recta de 45° que pasa por el origen bisectando el primero y el tercer cuadrante. Dé las coordenadas de T.

3. $P(1, -2)$ **4.** $P(-2, 2)$ **5.** $P(2, 2)$
6. $P(-2, -2)$ **7.** $P(-1, -3)$ **8.** $P(0, -3)$

En los ejercicios 9 a 12, describa el conjunto de puntos $P(x, y)$ en un sistema coordenado cartesiano rectangular que satisfagan la condición dada.

9. (a) $y = 4$ (b) $x = -2$ (c) $x > 0$ (d) $y \leq 0$

10. (a) $x = 7$ (b) $y = -3$ (c) $x \leq 0$ (d) $y > 0$

11. (a) $x = 0$ (b) $x < 4$ (c) $y \geq -2$ (d) $xy > 0$

12. (a) $y = 0$ (b) $x \geq 3$ (c) $y < -1$ (d) $xy < 0$

En los ejercicios 13 a 16, para los puntos A y B, encuentre las distancias dirigidas (a) $\overline{AB}$; (b) $\overline{BA}$

13. $A(-1, 7)$ y $B(6, 7)$
14. $A(-2, 3)$ y $B(-4, 3)$
15. $A(3, -4)$ y $B(3, -8)$
16. $A(-4, -5)$ y $B(-4, 6)$
17. Si A es el punto $(-2, 3)$ y B es el punto $(x, 3)$ encuentre x tal que **(a)** $\overline{AB} = -8$; **(b)** $\overline{AB} = -8$.
18. Si A es el punto $(-4, y)$ y B es el punto $(-4, 3)$ encuentre y tal que **(a)** $\overline{AB} = -3$; **(b)** $\overline{BA} = -3$.

En los ejercicios 19 a 22, haga lo siguiente: (a) localice los puntos A y B y dibuje el segmento de recta entre ellos; (b) encuentre la distancia entre A y B; (c) halle el punto medio del segmento de recta que va de A a B.

19. $A(1, 3)$ y $B(-2, 7)$
20. $A(-4, -1)$ y $B(4, 5)$
21. $A(8, 5)$ y $B(3, -7)$
22. $A(6, -5)$ y $B(2, -2)$

En los ejercicios 23 a 26, haga lo siguiente: (a) determine las coordenadas del punto medio del segmento de recta que va de A a B; (b) localice los puntos A, M, y B y demuestre que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$.

23. $A(-4, 7)$ y $B(1, -3)$
24. $A(3, 4)$ y $B(4, -3)$
25. $A(1, 3)$ y $B(4, 0)$
26. $A(0, -2)$ y $B(2, 0)$

En los ejercicios 27 y 28, dibuje el triángulo con sus vértices en A, B, y C, y encuentre las longitudes de los lados.

27. $A(4, -5)$, $B(-2, 3)$, $C(-1, 7)$
28. $A(2, 3)$, $B(3, -3)$, $C(-1, -1)$
29. Una mediana de un triángulo es un segmento de recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto. Encuentre la longitud de las medianas del triángulo cuyos vértices son $A(2, 3)$, $B(3, -3)$ y $C(-1, -1)$.
30. Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$ y $C(-1, -4)$.
31. Pruebe que el triángulo de vértices $A(3, -6)$, $B(8, -2)$ y $C(-1, -1)$ es un triángulo rectángulo. (*Sugerencia*: use el recíproco del teorema de Pitágoras.)
32. Halle los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 5)$ y $(3, 1)$.
33. Pruebe que los puntos $A(-7, 2)$, $B(3, -4)$ y $C(1, 4)$ son los vértices de un triángulo isósceles.
34. Compruebe que los puntos $A(-4, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 5)$ son los vértices de un rectángulo.
35. Emplee la fórmula de distancia para probar que los puntos $(-3, 2)$, $(1, -2)$ y $(9, -10)$ se ubican en una recta.
36. Determine si los puntos $(14, 7)$, $(2, 2)$ y $(-4, -1)$ se encuentran en una recta, use la fórmula de distancia.
37. Pruebe que los puntos $A(6, -13)$, $B(-2, 2)$, $C(13, 10)$ y $D(21, -5)$ son los vértices de un cuadrado. Encuentre la longitud de una diagonal.
38. Si uno de los extremos de un segmento de recta es el punto $(-4, 2)$ y el punto medio es $(3, -1)$, encuentre las coordenadas del otro extremo del segmento de línea recta.
39. Si uno de los extremos de un segmento de recta es el punto $(6, -2)$ y el punto medio es $(-1, 5)$, determine las coordenadas del otro extremo del segmento de recta.
40. Pruebe que los tres puntos $A(-5, 0)$, $B(3, 0)$ y $C(-1, 4\sqrt{3})$ son los vértices de un triángulo equilátero, para ello muestre que los tres lados tienen la misma longitud. Dibuje el triángulo.
41. La abscisa de un punto es -6, y su distancia al punto $(1, 3)$ es $\sqrt{74}$. Encuentre la ordenada del punto.
42. Dados los dos puntos $A(-3, 4)$ y $B(2, 5)$, obtenga las coordenadas de un punto P que está sobre la recta que pasa por A y B, y que no se encuentra entre A y B, tal que **(a)** la distancia de P a A sea el doble que la de P a B, **(b)** la distancia de P a B sea el doble que la de P a A.

En los ejercicios 43 a 46, utilice la geometría analítica para probar el teorema dado de geometría plana.

43. Las longitudes de las diagonales de un rectángulo son iguales.
44. El punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo equidista de los vértices del triángulo.
45. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilátero y el segmento de recta que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero, se bisectan mutuamente.
46. Para un paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados.

1.5 GRÁFICAS DE ECUACIONES

OBJETIVOS

1. **Aprender la definición de la gráfica de una ecuación.**
2. **Representar gráficamente ecuaciones en una graficadora o calculadora gráfica.**
3. **Elegir el rectángulo de inspección adecuado en una graficadora.**
4. **Aprender la definición de simetría.**
5. **Aprender y aplicar las pruebas de simetría.**

En la Sección 1.4, se mostró cómo puede utilizarse un sistema coordenado cartesiano rectangular para obtener hechos geométricos mediante el álgebra. Ahora se verá cómo un sistema coordenado nos permite asociar una *gráfica* (concepto geométrico) con una *ecuación* (concepto algebraico).

Una **ecuación algebraica** con dos variables x y y es un enunciado en el que se establece la igualdad de dos expresiones algebraicas, las cuales contienen a las variables x y y. Cuando x y y se sustituyen por números específicos, digamos a y b, el enunciado resultante puede ser verdadero o falso. Si es verdadero, se dice que el par ordenado (a, b) es una solución de la ecuación.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Considere la ecuación

$$y = 3x - 2$$

donde (x, y) es un punto en R^2. Si x se sustituye por el numeral 2 en la ecuación, se observa que $y = 4$; así el par ordenado $(2, 4)$ es una solución. Si cualquier número es sustituido por x en el lado derecho de la Ecuación (1), se obtiene el valor de y correspondiente al de x. Por tanto, la Ecuación (1) tiene un número ilimitado de soluciones. Las soluciones obtenidas de la Tabla 1 son $(-2, -8)$, $(-1, -5)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 7)$.

Tabla 1

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3x - 2$	-8	-5	-2	1	4	7

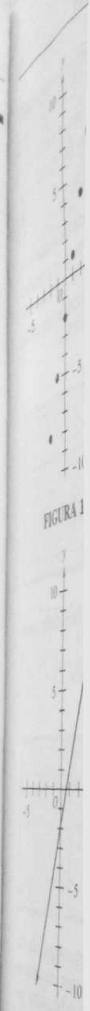
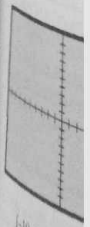


FIGURA 1

FIGURA 1.


[-10, 10] por [-1
FIGURA 1.

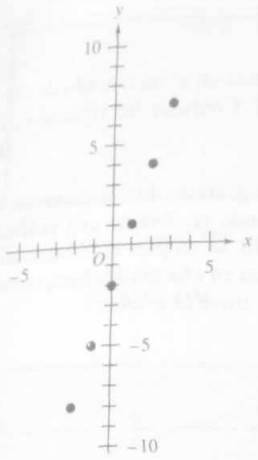


FIGURA 1.29

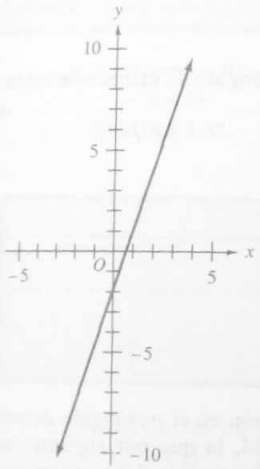
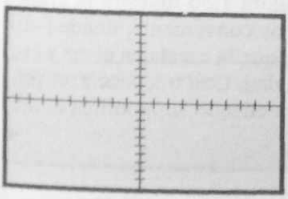


FIGURA 1.30



[-10, 10] por [-10, 10]
FIGURA 1.31

DEFINICIÓN **Gráfica de una ecuación**

La **gráfica de una ecuación** en R^2 es el conjunto de todos los puntos en R^2, cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación.

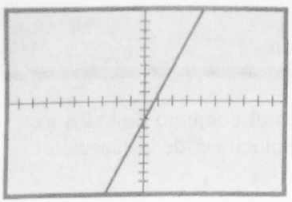
Debido a que la Ecuación (1) tiene un número ilimitado de soluciones, su gráfica consiste de un número ilimitado de puntos. Los seis puntos dados en la Tabla 1 y mostrados en la Figura 1.29, aparecen ubicados en una recta. De hecho, aprenderá en la Sección 3.1 que cada solución de la Ecuación (1) corresponde a un punto sobre la recta, y recíprocamente, las coordenadas de cada punto sobre la recta satisfacen la Ecuación (1).

La recta es, por tanto, la gráfica de la ecuación. Dicha gráfica se muestra en la Figura 1.30, donde las puntas de las flechas indican que la recta continúa en ambos sentidos. Las coordenadas de cualquier punto sobre la recta (x, y) satisfacen (1), y las coordenadas de cualquier punto que no esté ubicado sobre la recta no satisfacen la ecuación.

Los instrumentos automáticos de alta velocidad capaces de ilustrar gráficas, como las calculadoras gráficas o graficadoras y las computadoras con *software* adecuado, nos permiten observar gráficas en un instante. Se tomarán las ventajas de estos instrumentos y se aplicarán a través del desarrollo del texto. Las calculadoras y computadoras operan de manera similar, pero para uso de los estudiantes, las calculadoras gráficas son obviamente más prácticas que las computadoras de escritorio. Por tanto, se hará referencia a *calculadoras gráficas o graficadoras* en el entendido de que se pueden utilizar, con el mismo fin, computadoras personales con *software* para elaborar gráficas.

Estrictamente, las calculadoras gráficas, no son automáticas ya que requieren de un operador humano para pulsar teclas específicas, pero en virtud de que las teclas mencionadas dependen del fabricante y modelo de la graficadora, será necesario la consulta del manual del usuario para obtener la información de cómo realizar operaciones específicas.

Lo que se exhibe en la pantalla de su calculadora muestra una porción del plano numérico R^2 llamado **rectángulo de inspección.** El rectángulo de inspección denotado por $[X_{mín}, X_{máx}]$ por $[Y_{mín}, Y_{máx}]$ es el conjunto de puntos en R^2 para los cuales $X_{mín} \le x \le X_{máx}$ y $Y_{mín} \le y \le Y_{máx}$. La Figura 1.31 muestra el rectángulo de inspección [–10, 10] por [–10, 10] que son los valores estándar por omisión y son los empleados en la mayoría de calculadoras, en el caso de que el usuario no especifique otra cosa. Al rectángulo antes mencionado, se denomina **rectángulo de inspección estándar.** En la Figura 1.31 la escala sobre cada eje, la distancia entre cada marca en los ejes coordenados, es de 1 unidad. Al cambiar la escala se afecta la distancia entre las marcas pero no se altera el tamaño del rectángulo de inspección.

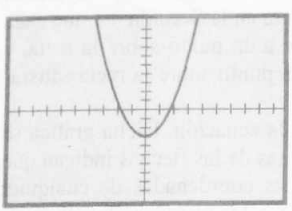


[–10, 10] por [–10, 10]
$y = 3x - 2$
FIGURA 1.32

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La gráfica de la ecuación $y = 3x - 2$, mostrada en el rectángulo de inspección estándar, aparece en la Figura 1.32. Compare las figuras 1.32 y 1.30, las cuales muestran la misma recta.*

Como se mencionó, se pueden obtener gráficas de dos maneras: a mano y por medio de una graficadora. Cuando se obtiene una gráfica a mano, como la mostrada en la Figura 1.30, se emplea el término *dibuje la gráfica*. Cuando se obtenga la gráfica en una graficadora, como la mostrada en la Figura 1.32, se le solicita: *trace la gráfica*.



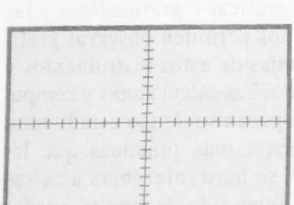
[–10, 10] por [–10, 10]
$y = x^2 - 3$
FIGURA 1.33

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La gráfica de la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

aparece en la Figura 1.33, trazada en el rectángulo de inspección estándar.



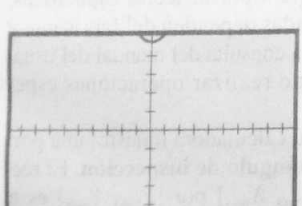
[–10, 10] por [–10, 10]
$y = x^2 + 14$
FIGURA 1.34

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Considere la ecuación

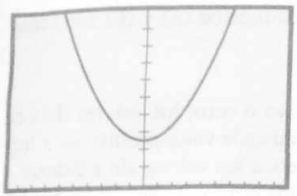
$$y = x^2 + 14$$

Si se intenta trazar la gráfica de esta ecuación en el rectángulo de inspección estándar, se obtiene la Figura 1.34, la que por supuesto no contiene puntos sobre la gráfica. Este hecho no nos debe causar sorpresa, porque el valor más pequeño para y en la ecuación es 14, el cual se presenta cuando $x = 0$. Cambiando el rectángulo de inspección de [–10, 10] por [–15, 15] nos da la Figura 1.35 la que muestra sólo una pequeña porción de la gráfica. La Figura 1.36 muestra la gráfica trazada en un rectángulo de inspección más conveniente, donde [–10, 10] ha sido cambiado por [0, 50]. Observe que la escala en el eje y es 5 unidades, mientras que en el eje x es 1 unidad. Con frecuencia, es provechoso cambiar las escalas sobre los ejes cuando se modifica el rectángulo de inspección.



[–10, 10] por [–15, 15]
$y = x^2 + 14$
FIGURA 1.35

* **N. del R.** Al comparar las gráficas indicadas, se observa que la de la calculadora está un poco más "acostada". Esto se debe a que en sus ejes no se toma la misma longitud para la unidad de medición; en la graficadora, la unidad del eje x es más larga que la del eje y. Esto mismo ocurre con la computadora.



[–10, 10] por [0, 50]
$y = x^2 + 14$
FIGURA 1.36

Las gráficas de las ecuación de los ejemplos ilustrativos 3 y 4 son *parábolas*. Se discutirán las parábolas con detalle en la Sección 3.3.

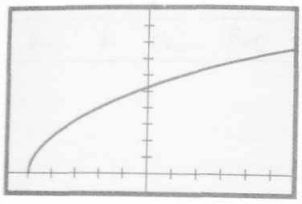
► EJEMPLO 1 *Elección del rectángulo para trazar la gráfica de una ecuación*

Trace la gráfica de la ecuación

$$y = \sqrt{x + 25}$$

eligiendo el rectángulo de inspección apropiado.

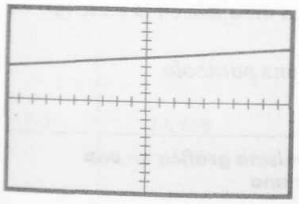
Solución Debido a que y es la raíz cuadrada principal de un número, y no debe ser negativa. Por tanto, como el radicando es $x + 25$ el cual no puede ser un número negativo, x debe ser un número mayor a -25. Así, un rectángulo de inspección apropiado será $[-30, 30]$ por $[-1, 10]$. La Figura 1.37 muestra la gráfica de la ecuación trazada en este rectángulo de inspección, donde la escala sobre el eje x es 5. ◄



[–30, 30] por [–1, 10]
$y = \sqrt{x + 25}$
FIGURA 1.37

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

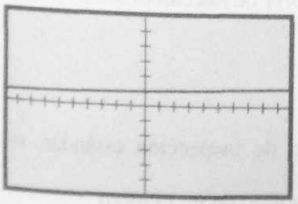
Si se traza la gráfica de la ecuación del ejemplo 1 en el rectángulo de inspección estándar, se obtiene la Figura 1.38, la cual es una imagen distorsionada de la gráfica, semejante a una recta. La Figura 1.39 muestra otra imagen distorsionada de la gráfica trazada en un rectángulo de inspección que es $[-10, 10]$ por $[-30, 30]$, donde la escala sobre el eje y es 5. ◄



[–10, 10] por [–10, 10]
$y = \sqrt{x + 25}$
FIGURA 1.38

Los ejemplos ilustrativos 4 y 5 y el ejemplo 1 muestran la importancia de la selección del rectángulo de inspección cuando se trazan gráficas en graficadoras.

La mayoría de las graficadoras pueden trazar gráficas para más de una ecuación en el mismo rectángulo de inspección. Esto se hace en el ejemplo siguiente.



[–10, 10] por [–30, 30]
$y = \sqrt{x + 25}$
FIGURA 1.39

► EJEMPLO 2 *Obtención de la misma gráfica, a mano y mediante graficadora*

(a) Dibuje la gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4x$$

y localice los puntos para los cuales x es 0, 1, 2, 3 y 4, una estos puntos mediante una curva.

(b) Trace las gráficas de las dos ecuaciones

$$y = 2\sqrt{x} \quad \text{y} \quad y = -2\sqrt{x}$$

en el mismo rectángulo de inspección.

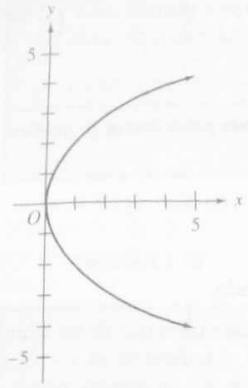


FIGURA 1.40

(c) ¿Por qué las curvas obtenidas en los incisos (a) y (b) son idénticas?

Solución

(a) Debido a que y^2 es un número positivo o cero, los valores de x se restringen a números no negativos. Para cada valor positivo de x hay dos valores de y. La Tabla 2 nos muestra los valores de y cuando x es 0, 1, 2, 3, y 4. Al localizar y unir los puntos, cuyas coordenadas son los valores de x y y de la tabla, se obtiene la gráfica dibujada en la Figura 1.40.

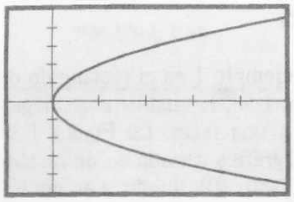
Tabla 2

x	0	1	1	2	2	3	3	4	4
$y^2 = 4x$	0	2	−2	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	4	−4

(b) En la graficadora se tiene

$$y_1 = 2\sqrt{x} \quad \text{y} \quad y_2 = -2\sqrt{x}$$

y trazando las gráficas de estas ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección [−1, 5] por [−5, 5] como se muestra en la Figura 1.41.



[−1, 5] por [−5, 5]
$y_1 = 2\sqrt{x}$ y $y_2 = -2\sqrt{x}$

FIGURA 1.41

(c) La ecuación $y^2 = 4x$ es equivalente a las dos ecuaciones $y = 2\sqrt{x}$ y $y = -2\sqrt{x}$. Por tanto, la unión de las gráficas de y_1 y y_2 trazadas en el inciso (b) es la misma que la gráfica dibujada en la parte (a). ◀

La curva en el ejemplo 2 es también una *parábola*.

► **EJEMPLO 3** ***Obtención de la misma gráfica en una graficadora y a mano***

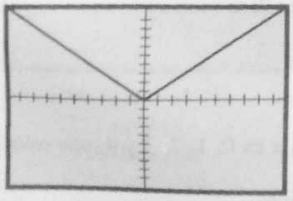
(a) Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.
(b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).

Solución

(a) El cálculo del valor absoluto de un número es efectuado internamente en la graficadora y en la mayoría de las calculadoras se denota por ABS.
Consideremos

$$y = \text{ABS}(x)$$

su gráfica, trazada en el rectángulo de inspección estándar, se muestra en la Figura 1.42.



[−10, 10] por [−10, 10]
$y = \text{ABS}(x)$

FIGURA 1.42

(b) A partir de la definición del valor absoluto de un número

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La Tabla 3 muestra algunos valores de x y y que satisfacen la ecuación, y la gráfica está dibujada en la Figura 1.43, la cual está de acuerdo con la Figura 1.42.

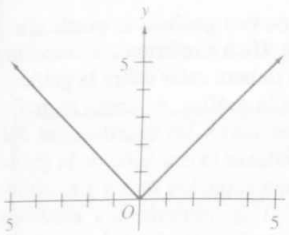


FIGURA 1.43

Tabla 3

x	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
$y = \lvert x \rvert$	0	1	2	3	4	1	2	3	4

◀

La simetría es una propiedad importante de las gráficas, especialmente auxilia cuando éstas se dibujan.

DEFINICIÓN **Simetría de dos puntos**

Se dice que dos puntos P y Q son **simétricos con respecto a una recta,** si y sólo si la recta es la bisectriz perpendicular del segmento de recta PQ. Se dice que dos puntos P y Q son **simétricos con respecto a un tercer punto,** si y sólo si el tercer punto es el punto medio del segmento de recta PQ.

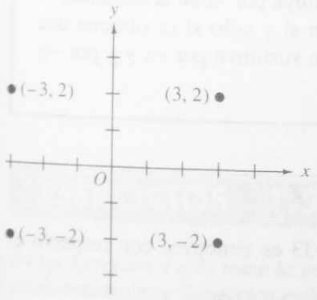


FIGURA 1.44

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Los puntos (3, 2) y (3, −2) son simétricos con respecto al eje x, los puntos (3, 2) y (−3, 2) son simétricos con respecto al eje y; y los puntos (3, 2) y (−3, −2) son simétricos con respecto al origen. *Véase* la Figura 1.44. ◀

En general, los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos con respecto al eje x, (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos con respecto al eje y, y (x, y) y $(-x, -y)$ son simétricos con respecto al origen.

DEFINICIÓN **Simetría de una gráfica**

La gráfica de una ecuación es **simétrica con respecto a la recta** l si y sólo si para cada punto P en la gráfica hay un punto Q, también sobre la gráfica, tal que P y Q son simétricos con respecto a l. La gráfica de una ecuación es **simétrica con respecto al punto** R si y sólo si para cada punto P sobre la gráfica existe un punto S, también sobre la gráfica, tal que P y S son simétricos con respecto a R.

La Figura 1.45 muestra una gráfica simétrica con respecto al eje x, la Figura 1.46 muestra una simétrica con respecto al eje y y la Figura 1.47 una simétrica con respecto al origen.

A partir de la definición de simetría de una gráfica, se puede afirmar que si un punto (x, y) está sobre una gráfica simétrica con respecto al eje x, entonces el punto $(x,-y)$ también deberá estar sobre la gráfica. Y si los puntos (x, y) y $(x, -y)$ están sobre la gráfica, entonces la gráfica es simétrica con respecto al eje x. Por tanto, las coordenadas del punto $(x, -y)$, así como (x, y) deberán satisfacer la ecuación de la gráfica. De esto se deduce que la gráfica de una ecuación en x y y es simétrica con respecto al eje x, si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando y se sustituye por $-y$, en la ecuación. Hemos comprobado la parte **(i)** de las pruebas de simetría siguientes. Las comprobaciones de las partes **(ii)** y **(iii)** son similares.

FIGURA 1.45

Pruebas de simetría

La gráfica de una ecuación en x y y es

(i) simétrica con respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando y se sustituye por $-y$ en la ecuación;

(ii) simétrica con respecto al eje y si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando x se sustituye por $-x$ en la ecuación;

(iii) simétrica con respecto al origen si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando x se sustituye por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación.

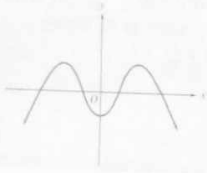


FIGURA 1.46

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

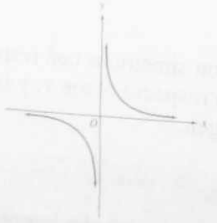


FIGURA 1.47

La gráfica que aparece en la Figura 1.33 es simétrica con respecto al eje y y tiene la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

Si x se sustituye por $-x$, se obtiene la ecuación

$$y = (-x)^2 - 3$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 - 3$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

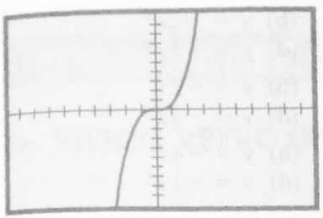
La gráfica dibujada en la Figura 1.40 es simétrica con respecto al eje x y su ecuación es

$$y^2 = 4x$$

Sustituyendo y por $-y$ en esta ecuación se obtiene

$$(-y)^2 = 4x$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 4x$$

◀



[−10, 10] por [−10, 10]
$y = \frac{1}{2}x^3$

FIGURA 1.48

▶ **EJEMPLO 4** *Aplicación de las pruebas de simetría y trazo de una gráfica*

Compruebe la simetría de la gráfica cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{2}x^3$$

Entonces trace la gráfica.

Solución Se comprueba la simetría. En la ecuación anterior, si x se sustituye por $-x$ y y por $-y$ se obtiene

$$-y = \frac{1}{2}(-x)^3$$
$$-y = -\frac{1}{2}x^3$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^3$$

Por tanto, de acuerdo con la prueba de simetría (iii), la gráfica es simétrica con respecto al origen. Se puede verificar que la gráfica no es simétrica con respecto a los ejes x y y aplicando las pruebas de simetría (i) y (ii).

En la Figura 1.48, aparece la gráfica de la ecuación anterior, trazada en el rectángulo de inspección estándar. Observe la simetría con respecto al origen. ◀

EJERCICIOS 1.5

En los ejercicios 1 a 8, trace la gráfica de la ecuación en el rectángulo de inspección estándar.

1. (a) $y = x + 2$ (b) $y = 5 - 2x$ (c) $y = 5$
2. (a) $y = 5 - x$ (b) $y = 4x - 3$ (c) $y = -4$
3. (a) $y = -\frac{1}{3}x - 6$ (b) $y = 4 + 7x$ (c) $y = -\frac{1}{2}x$
4. (a) $y = \frac{1}{2}x - 3$ (b) $y = 2x + 8$ (c) $y = \frac{1}{4}x$
5. (a) $y = x^2$ (b) $y = 2x^2$ (c) $y = x^2 + 2$
6. (a) $y = -x^2$ (b) $y = -2x^2$ (c) $y = -x^2 - 2$
7. (a) $y = 4 - x^2$ (b) $y = x^2 - 4$ (c) $y = (x - 4)^2$
8. (a) $y = x^2 + 2$ (b) $y = -x^2 - 2$ (c) $y = (x + 2)^2$

En los ejercicios 9 a 16, trace la gráfica de la ecuación eligiendo un rectángulo de inspección estándar adecuado.

9. (a) $y = x + 15$ (b) $y = x - 15$ (c) $y = 15 - x$

10. (a) $y = x + 30$ (b) $y = x - 30$
(c) $y = 30 - x$

11. (a) $y = 7x + 20$ (b) $y = \frac{1}{5}x - 2$
(c) $y = -\frac{1}{5}x + 18$

12. (a) $y = 9x + 24$ (b) $y = \frac{1}{10}x - 5$
(c) $y = -\frac{1}{8}x + 12$

13. (a) $y = \sqrt{x + 16}$ (b) $y = \sqrt{x - 16}$
(c) $y = \sqrt{16 - x}$

14. (a) $y = \sqrt{x + 27}$ (b) $y = \sqrt{x - 27}$
(c) $y = \sqrt{27 - x}$

15. (a) $y = \sqrt{x} + 16$ (b) $y = \sqrt{x} - 16$
(c) $y = 16 - \sqrt{x}$

16. (a) $y = \sqrt{x} + 27$ (b) $y = \sqrt{x} - 27$
(c) $y = 27 - \sqrt{x}$

En los ejercicios 17 a 24, haga lo siguiente: (a) pruebe la simetría de la gráfica de la ecuación (i); (b) dibuje la gráfica de la ecuación (i); (c) trace las gráficas de las ecuaciones (ii) y (iii) en el mismo rectángulo de inspección; (d) compare las curvas obtenidas en los incisos (b) y (c).

17. (i) $y^2 = 9x$ (ii) $y = 3\sqrt{x}$
(iii) $y = -3\sqrt{x}$

18. (i) $y^2 = \frac{1}{4}x$ (ii) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
(iii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

19. (i) $y^2 = -\frac{1}{4}x$ (ii) $y = \frac{1}{2}\sqrt{-x}$
(iii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{-x}$

20. (i) $y^2 = -4x$ (ii) $y = 2\sqrt{-x}$
(iii) $y = -2\sqrt{-x}$

21. (i) $y^2 = 1 - x^2$ (ii) $y = \sqrt{1 - x^2}$
(iii) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

22. (i) $y^2 = 9 - x^2$ (ii) $y = \sqrt{9 - x^2}$
(iii) $y = -\sqrt{9 - x^2}$

23. (i) $y^2 = x^2 - 4$ (ii) $y = \sqrt{x^2 - 4}$
(iii) $y = -\sqrt{x^2 - 4}$

24. (i) $y^2 = x^2 - 16$ (ii) $y = \sqrt{x^2 - 16}$
(iii) $y = -\sqrt{x^2 - 16}$

En los ejercicios 25 y 26, trace la gráfica de la ecuación.

25. (a) $y = |x - 2|$ (b) $y = |x + 2|$
(c) $y = |x| - 2$ (d) $y = |x| + 2$

26. (a) $y = 2|x - 3|$ (b) $y = 2|x + 3|$
(c) $y = 2|x| - 6$ (d) $y = 2|x| + 6$

En los ejercicios 27 a 30, pruebe la simetría de la ecuación y después trace la gráfica.

27. (a) $y = x^3$ (b) $y = -x^3$
(c) $y = \frac{1}{8}x^3$ (d) $y = -\frac{1}{8}x^3$

28. (a) $y = 2x^3$ (b) $y = -2x^3$
(c) $y = \frac{1}{6}x^3$ (d) $y = -\frac{1}{6}x^3$

29. (a) $y = 2x^4$ (b) $y = -2x^4$
(c) $y = \frac{1}{4}x^4$ (d) $y = -\frac{1}{4}x^4$

30. (a) $y = 4x^4$ (b) $y = -4x^4$
(c) $y = \frac{1}{2}x^4$ (d) $y = -\frac{1}{2}x^4$

En los ejercicios 31 a 38, trace la gráfica de la ecuación. Experimente hasta que tenga un rectángulo de inspección apropiado que muestre las características importantes de la gráfica.

31. $y = 4x^4 - 8x - 1$ **32.** $y = 2x^2 + 8x + 4$

33. $y = x^3 - 3x$ **34.** $y = 3x^3 + 2x - 5$

35. $y = 2x^4 - 50$ **36.** $y = 100 - x^4$

37. $y = x^4 - 8x^2 + 17$ **38.** $y = 4x^4 - 16x^2 - 20$

En los ejercicios 39 a 44, trace la gráfica de cada ecuación en el mismo rectángulo de inspección.

39. $y = x^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x - 4)^2$

40. $y = x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 - 4$

41. $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = 4x^2$

42. $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, $= \frac{1}{4}x^2$

43. $y = |x|$, $y = |x| + 3$, $y = |x| - 3$, $y = |x| - 4$

44. $y = |x|$, $y = |x + 3|$, $y = |x - 3|$, $y = |x - 4|$

45. Basándose en el ejercicio 39 describa en qué son similares y en qué diferentes las gráficas obtenidas. Haga lo mismo para las gráficas obtenidas en el ejercicio 41.

46. Siga las instrucciones del ejercicio 45 para las gráficas obtenidas en los ejercicios 40 y 42.

47. Siga las instrucciones del ejercicio 45 para las gráficas obtenidas en los ejercicios 43 y 44.

48. Use las definiciones de simetría para explicar por qué una gráfica simétrica con respecto a ambos ejes coordenados es también simétrica con respecto al origen.

49. Explique por qué en el ejemplo ilustrativo 5 se obtuvieron imágenes distorsionadas de la gráfica

de la ecuación $y = \sqrt{x + 25}$ en el rectángulo de inspección estándar y en el rectángulo [−10, 10] por [−30, 30].

50. Trace la gráfica de $\sqrt{x + 50}$ en cada uno de los siguientes rectángulos de inspección: [−10, 10] por [−10, 10]; [−100, 100] por [−10, 10]; [−10, 10] por [−100, 100]. ¿Cuál de todos estos rectángulos de inspección es apropiado para mostrar las características importantes de la gráfica? Explique por qué los otros dos rectángulos dan una imagen distorsionada de la gráfica.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 1

▶ VISIÓN RETROSPECTIVA

1.1 Se discutió el conjunto de números reales y sus subconjuntos, los números racionales e irracionales. Se asoció los números reales con puntos sobre un eje llamado recta numérica real, y se empleó esta representación geométrica para definir intervalos cerrados y abiertos. El valor absoluto de un número real se consideró como una distancia no dirigida del número a partir del origen.

1.2 Las expresiones algebraicas tratadas en esta sección fueron polinomiales y racionales. Se definieron términos asociados con estas expresiones y se simplificaron varios tipos de expresiones racionales que frecuentemente se encuentran en Cálculo.

1.3 La introducción a los números complejos fue motivada por la necesidad de considerar la raíz cuadrada de un número negativo. Demostrando que el conjunto C de números complejos satisface los axiomas de un campo, y se realizaron operaciones algebraicas con estos números.

1.4 Después de introducir el sistema coordenado cartesiano rectangular en el plano, se utilizó para obtener la distancia entre dos puntos y el punto medio de un segmento de recta. Se mostró cómo emplear el sistema coordenado para probar por medio de la geometría analítica algunos teoremas de la geometría plana.

1.5 En esta sección se enfatizó el uso de la calculadora gráfica o graficadora para trazar gráficas. También se discutió la simetría de las gráficas y las pruebas para simetría, las cuales son importantes cuando se dibujan gráficas a mano.

▶ EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios del 1 al 4, N es el conjunto de números naturales, Z es el conjunto de los enteros, Q es el conjunto de los números racionales, I es el conjunto de los números irracionales, y R es el conjunto de números reales. En los ejercicios 1 y 2, determine cuál de estos conjuntos y $\varnothing$ es igual al conjunto dado. En los ejercicios 3 y 4 liste los elementos del conjunto si

$$S = \{-4, \sqrt{2}, 15, \frac{3}{4}, 7\pi, 0.5, 0\}$$

y

$$T = \left\{-\frac{1}{3}, 2, -\sqrt{3}, -5, 0.75, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi\right\}$$

1. (a) $N \cup Q$ (b) $Q \cap I$
   (c) $Z \cap N$ (d) $Q \cup Z$
2. (a) $Q \cap Z$ (b) $Z \cup N$
   (c) $Z \cap I$ (d) $Q \cup I$
3. (a) $S \cap N$ (b) $S \cap Z$
   (c) $T \cap Q$ (d) $T \cap I$
4. (a) $S \cap Q$ (b) $S \cap I$
   (c) $T \cap N$ (d) $T \cap Z$

En los ejercicios 5 y 6, muestre el conjunto sobre la recta numérica real y represente el conjunto mediante la notación de intervalos.

5. (a) $\{x \mid x \le 4\}$ (b) $\{x \mid 2 < x < 8\}$
   (c) $\{x \mid x \le 0\} \cup \{x \mid x > 2\}$
   (d) $\{x \mid x > 1\} \cap \{x \mid x \le 5\}$

6. (a) $\{x \mid x > 5\}$ (b) $\{x \mid -2 < x \le 3\}$
   (c) $\{x \mid x \le -4\} \cup \{x \mid x \ge 4\}$
   (d) $\{x \mid x > -1\} \cap \{x \mid x < 6\}$

En los ejercicios 7 y 8, determine el valor absoluto de cada inciso.

7. (a) $|\,7\,|$ (b) $|\,-\sqrt{5}\,|$
   (c) $|\,2-\sqrt{3}\,|$ (d) $|\,\sqrt{3}-2\,|$

8. (a) $|\,\frac{1}{2}\,|$ (b) $|\,-\pi\,|$
   (c) $|\,\sqrt{10}-3\,|$ (d) $|\,2\sqrt{5}-5\,|$

En los ejercicios 9 y 10, muestre el intervalo sobre la recta numérica real, use la notación de conjunto y los símbolos de desigualdad para denotar el intervalo.

9. (a) $(-4, 6)$ (b) $[3, 11]$
   (c) $[-10, 10)$ (d) $(-\infty, 0)$

10. (a) $[-8, 12]$ (b) $(-4, 4)$
    (c) $(5, 6]$ (d) $[0, +\infty)$

En los ejercicios 11 a 22, encuentre el valor numérico escribiéndolo sin exponentes.

11. (a) $(2^3)^2$ (b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

12. (a) $(-64)^{2/3}$ (b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-3/4}$

13. (a) $\left(\frac{5}{3^2}\right)^3$ (b) $(27)^{4/3}$

14. (a) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-3/2}$ (b) $\frac{(-2)^{-3}}{(-7)^{-2}}$

15. $(1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0)^{-5/2}$ 16. $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$

17. $\frac{2^{-5} + 4^{-2}}{2^{-3} + 4^0}$ 18. $(3^{-3} + 9^{-2})^{-1/2}$

19. $\frac{2^{-1} + 3^{-2}}{2^{-2}}$ 20. $(2^2 + 3^2 \cdot 2^{-2})^{1/2}$

21. $\left(\frac{5^{-1}}{5^{-2} + 4 \cdot 5^{-3}}\right)^{-1/2}$ 22. $\left(\frac{3^{-1} + 2^{-2}}{3^{-2} + 2^{-1}}\right)^{-1}$

En los ejercicios 23 y 24, utilice las leyes de los exponentes para simplificar la expresión donde cada variable puede ser cualquier número real.

23. (a) $(4x^2y^4z^6)^{1/2}$ (b) $[(y+1)^4(x^2+4)^4]^{1/4}$

24. (a) $(81r^4s^8t^{12})^{1/4}$ (b) $[(u^4+81)^2(v-1)^2]^{1/2}$

En los ejercicios 25 a 30, realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

25. (a) $(8+3i)+(10-2i)$ (b) $(\frac{1}{2}-i)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}i)$

26. (a) $(11-2i)-(-5+6i)$ (b) $(3+\frac{2}{3}i)+(-1-i)$

27. (a) $\sqrt{-9}\sqrt{-49}$ (b) $(-4+2i)(-3+i)$

28. (a) $\sqrt{-8}\sqrt{-24}\sqrt{-48}$ (b) $(-5-i)^2$

29. $(5-2i) \div (-4-3i)$

30. $i \div (-6-i)$

En los ejercicios 31 y 32, simplifique la expresión.

31. (a) i^9 (b) i^{23} (c) i^{-10}

32. (a) i^{19} (b) i^{66} (c) i^{-7}

En los ejercicios 33 y 34, haga lo siguiente: (a) localice los puntos A y B y dibuje el segmento de recta entre ellos; (b) encuentre la distancia entre A y B; (c) halle el punto medio del segmento de recta entre A y B.

33. $A(7, -1)$ y $B(3, 2)$ 34. $A(-5, 2)$ y $B(3, -4)$

En los ejercicios 35 y 36, haga lo siguiente: (a) determine las coordenadas del punto medio M del segmento de recta entre A y B; (b) localice los puntos A, M y B y demuestre que $|\,\overline{AM}\,| = |\,\overline{MB}\,|$

35. $A(6, 5)$ y $B(-4, -9)$

36. $A(-1, -8)$ y $B(7, 6)$

37. Encuentre las longitudes de los lados del triángulo que tiene sus vértices en $A(4, 1)$, $B(5, -5)$ y $C(1, -3)$.

38. Determine las longitudes de las medianas del triángulo del ejercicio 37.

39. Mediante el recíproco del teorema de Pitágoras pruebe que los puntos $(2, 4)$, $(1, -4)$ y $(5, -2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y encuentre el área del triángulo.

40. Pruebe que el triángulo con vértices en $(-8, 1)$, $(-1, -6)$ y $(2, 4)$ es isósceles y determine el área del triángulo.

En los ejercicios 41 y 42, utilice la fórmula de distancia para determinar si los tres puntos están en la misma recta.

41. $(-2, -3)$, $(-1, 4)$, $(1, 17)$

42. $(0, -3)$, $(1, 4)$, $(2, 11)$

43. Use la fórmula de distancia para probar que el cuadrilátero cuyos vértices son (1, 2), (5, −1), (11, 7) y (7, 10), es un rectángulo.

44. Emplee la geometría analítica para probar que la longitud del segmento de recta que une los puntos medios de dos lados cualesquiera de un triángulo es la mitad de la longitud del tercer lado.

45. Use la geometría analítica para probar que las longitudes de dos medianas en un triángulo isósceles son iguales.

46. Utilice la geometría analítica para probar que si dos medianas de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles.

En los ejercicios 47 a 50, la expresión racional compleja es semejante al tipo encontrado en Cálculo. Halle una expresión racional simple equivalente. En cada ejercicio $h \neq 0$.

47. $\dfrac{\dfrac{5+h}{7+h} - \dfrac{5}{7}}{h}$

48. $\dfrac{\dfrac{1}{(3+h)^2} - \dfrac{1}{9}}{h}$

49. $\dfrac{\dfrac{1}{2x+2h+1} - \dfrac{1}{2x+1}}{h}$

50. $\dfrac{\dfrac{x+h+1}{x+h-2} - \dfrac{x+1}{x-2}}{h}$

En los ejercicios 51 y 52, la expresión se encuentra en Cálculo. Simplifique de manera semejante al ejemplo 4 de la Sección 1.2.

51. $\dfrac{6x(2x+1)^{1/2} - 3x^2[\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}(2)]}{[(2x+1)^{1/2}]^2}$

52. $\dfrac{3x^2(x^2-1)^{1/3} - x^3[\frac{1}{3}(x^2-1)^{-2/3}(2x)]}{[(x^2-1)^{1/3}]^2}$

En los ejercicios 53 al 58, la expresión se encuentra en Cálculo. Racionalice el numerador. Todos los radicandos y todas las variables representan números positivos; ninguno de los denominadores es cero.

53. $\dfrac{\sqrt{9+2h} - 3}{h}$

54. $\dfrac{\sqrt{16+h} - 4}{h}$

55. $\dfrac{\sqrt{x+h-2} - \sqrt{x-2}}{h}$

56. $\dfrac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h}$

57. $\dfrac{\dfrac{h+3}{\sqrt{3h+4}} - \dfrac{3}{2}}{h}$

58. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{h+5}}{h+3} - \dfrac{\sqrt{5}}{3}}{h}$

En los ejercicios 59 a 70, trace la gráfica de la ecuación en un rectángulo de inspección apropiado.

59. (a) $y = 2x - 7$ (b) $y = 7x + 2$

60. (a) $y = 9 - 4x$ (b) $y = 9x - 4$

61. (a) $y = \frac{1}{4}x^2$ (b) $y = -4x^2$

62. (a) $y = 8x^2$ (b) $y = -\frac{1}{8}x^2$

63. (a) $y = \frac{1}{4}x^3 - 2$ (b) $y = \frac{1}{4}(x-2)^3$

64. (a) $y = \frac{1}{9}x^3 + 1$ (b) $y = \frac{1}{9}(x+1)^3$

65. $y = 2x^2 - 7x - 15$

66. $y = 9x^2 - 12x + 4$

67. $y = 16 - x^4$

68. $y = 4x^3 - 6x + 1$

69. $y = 3x^3 - 4x^2 + 1$

70. $y = 2x^4 - 6x^2 + 7$

En los ejercicios 71 a 76, haga lo siguiente: (a) pruebe la simetría para la gráfica de la ecuación; (b) dibuje la gráfica de la ecuación (i); (c) trace las gráficas de las ecuaciones (ii) y (iii) en el mismo rectángulo de inspección; (d) compare las curvas obtenidas en los incisos (b) y (c).

71. (i) $y^2 = \frac{1}{4}x$ (ii) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
(iii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$

72. (i) $y^2 = -9x$ (ii) $y = 3\sqrt{-x}$
(iii) $y = -3\sqrt{-x}$

73. (i) $y^2 = -4(x-3)$ (ii) $y = 2\sqrt{3-x}$
(iii) $y = -2\sqrt{3-x}$

74. (i) $y^2 = \frac{1}{9}(x+4)$ (ii) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x+4}$
(iii) $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x+4}$

75. (i) $y^2 = x^2 - 25$ (ii) $y = \sqrt{x^2-25}$
(iii) $y = -\sqrt{x^2-25}$

76. (i) $y^2 = 25 - x^2$ (ii) $y = \sqrt{25-x^2}$
(iii) $y = -\sqrt{25-x^2}$

En los ejercicios 77 a 80, dibuje la gráfica de la ecuación.

77. (a) $y = 4|x-1|$ (b) $y = 4|x+1|$
(c) $y = 4|x| - 1$ (d) $y = 4|x| + 1$

78. (a) $y = 3|x-4|$ (b) $y = 3|x+4|$
(c) $y = 3|x| - 4$ (d) $y = 3|x| + 4$

79. (a) $y = x|x|$ (b) $y = \dfrac{|x|}{x}$

(c) $y = \dfrac{x}{|x|}$

80. (a) $y = |x| + x$ (b) $y = |x| - x$

(c) $y = \dfrac{|x-2|}{x-2}$

81. Basado en la gráfica de la ecuación $|x| + |y| = 1$. (a) Pruebe que la gráfica es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. (b) Dibuje la porción de la gráfica en el primer cuadrante, y use las propiedades de simetría para dibujar la gráfica completa. (c) ¿Qué figura geométrica representa la gráfica?

82. Trace la gráfica de la ecuación del ejercicio 81, en su calculadora gráfica, y escriba una descripción de cómo lo hizo.

83. Realice las partes (a) y (b) del ejercicio 81 para la ecuación $|x| - |y| = 1$. Trace la gráfica en su graficadora, y escriba una descripción de cómo lo hizo.

Capítulo 2

Ecuaciones y desigualdades

Sumario

2.1 Ecuaciones lineales con una incógnita
2.2 Ecuaciones cuadráticas con una incógnita
2.3 Ecuaciones como modelos matemáticos
2.4 Otras ecuaciones con una incógnita
2.5 Desigualdades lineales
2.6 Desigualdades polinomiales
2.7 Ecuaciones y desigualdades que implican valor absoluto

▶ VISIÓN PRELIMINAR

La facilidad para resolver ecuaciones y desigualdades es crucial en Cálculo. En este capítulo se tratará la resolución de ecuaciones y desigualdades con una incógnita.

Las primeras tres secciones contienen temas de álgebra intermedia; deberá revisarlos en esta ocasión. Estudie cuidadosamente los procedimientos sugeridos en la Sección 2.3 a fin de obtener una ecuación como modelo matemático para resolver un problema.

La Sección 2.4 incluye material que, posiblemente, estudiará por primera vez. Las secciones 2.5 a 2.7 deberán revisarse detalladamente. Los procedimientos para obtener conjuntos solución de desigualdades, y aquéllos requeridos para reemplazar una desigualdad por otra equivalente más simple, son necesarios en Cálculo.

2.1 ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

OBJETIVOS

1. **Resolver algebraicamente ecuaciones lineales.**
2. **Mostrar la solución de una ecuación lineal en una gráfica.**
3. **Resolver ecuaciones lineales en una calculadora gráfica o graficadora.**
4. **Resolver ecuaciones racionales transformándolas en ecuaciones lineales.**
5. **Obtener y aplicar una ecuación como modelo matemático.**
6. **Resolver ecuaciones con literales considerándolas ecuaciones lineales.**

En la Sección 1.5, se introdujeron las ecuaciones algebraicas con dos variables. En este capítulo trataremos ecuaciones algebraicas de una variable denominadas en ocasiones como **con una incógnita.** El **dominio de la incógnita,** de una ecuación, es el conjunto de números para los cuales las expresiones algebraicas de la ecuación están definidas.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

En las ecuaciones algebraicas siguientes sea x un número real:

$$x - 5 = 0 \tag{1}$$

$$x^2 + 12 = 7x \tag{2}$$

$$x + 5 = 5 + x \tag{3}$$

$$x + 2 = x + 3 \tag{4}$$

$$\frac{x}{x} = 1 \tag{5}$$

$$\frac{3}{x + 4} = \frac{2}{3x - 2} \tag{6}$$

Para las ecuaciones (1) hasta (4) el dominio es R. Debido a que el lado izquierdo de la ecuación (5) no está definido si x es 0, el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto cero. El lado izquierdo de la ecuación (6) no está definido si x es -4 y el lado derecho no está definido si x es $\frac{2}{3}$; por tanto, el dominio es el conjunto de los números reales excepto -4 y $\frac{2}{3}$. ◂

Cuando la variable en una ecuación es reemplazada por un número específico, la proposición resultante puede ser falsa o verdadera. Si es verdadera, entonces el número es llamado **solución** (o **raíz**) de la

ecuación. El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de **conjunto solución de la ecuación.** Se dice que un número **satisface una ecuación** si ese número es una de las soluciones de la ecuación.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) Si en la Ecuación (1) x se sustituye por 5, la proposición resulta verdadera, pero si x es reemplazado por otro número diferente de 5 el enunciado es falso. Por tanto, el conjunto solución es $\{5\}$.

(b) En la Ecuación (2), si x se sustituye por 3 o 4 la proposición es verdadera, y si x es reemplazado por otro número que no sea 3 o 4 se tiene una proposición falsa. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones, 3 y 4, y el conjunto solución es $\{3, 4\}$.

(c) Si en la Ecuación (3) cualquier número real sustituye a x, se obtiene una proposición verdadera. Por tanto, el conjunto solución es R.

(d) Cuando cualquier número real sustituye a x en la Ecuación (4), se obtiene una proposición falsa. De este modo, el conjunto solución es $\varnothing$.

(e) En la Ecuación (5), si cualquier número diferente de 0 sustituye a x, se obtiene una proposición verdadera. Por tanto, el conjunto solución es $\{x \mid x \in R, x \neq 0\}$.

(f) El conjunto solución de la Ecuación (6) no está aparentemente definido. Sin embargo, se mostrará cómo encontrarlo en el ejemplo 3. ◀

Si el conjunto solución de una ecuación con una incógnita es el mismo que el dominio de la incógnita, la ecuación se llama **identidad.** Las ecuaciones (3) y (5) son identidades. Si hay al menos un número en el dominio de la incógnita que no esté en el conjunto solución de la ecuación, se tendrá una **ecuación condicional.** Las ecuaciones (1), (2), (4) y (6) son ecuaciones condicionales.

Un tipo importante de ecuaciones son las ecuaciones polinomiales con una incógnita, la cual puede escribirse en la forma $P = 0$, donde P es un polinomio en una variable. El grado del polinomio es el grado de la ecuación. Son ejemplos particulares de ecuaciones polinomiales las siguientes:

$$7x - 21 = 0 \quad \text{(primer grado)}$$

$$2y^2 - 3y - 5 = 0 \quad \text{(segundo grado)}$$

$$4z^3 - 8z^2 - z + 2 = 0 \quad \text{(tercer grado)}$$

$$9w^4 - 13w^2 + 4 = 0 \quad \text{(cuarto grado)}$$

La determinación del conjunto solución de una ecuación condicional se llama **resolver una ecuación.** Como se vio en la Ecuación (1) del ejemplo ilustrativo 2, algunas veces es posible resolver una ecuación por inspección. Sin embargo, en general, se emplea el concepto de **ecuaciones equivalentes,** las cuales son ecuaciones que po-

[illegible]en el mismo conjunto solución. Por ejemplo, las ecuaciones siguien[illegible]s son equivalentes:

$$7x - 21 = 0 \qquad 7x = 21 \qquad x = 3$$

Con frecuencia pueden resolverse ecuaciones por *sustitución*, esto mediante una sucesión de ecuaciones equivalentes, cada una de alguna forma más simple que la anterior, así se obtiene eventualmente una ecuación para la cual el conjunto solución es evidente. Se pueden aplicar propiedades de los números reales para sustituir una ecuación por otra equivalente. Por ejemplo, el conjunto solución de una ecuación no cambia si la misma expresión algebraica es sumada o restada a ambos lados de la ecuación. Además, el conjunto solución no se altera si ambos lados de una ecuación son multiplicados o divididos por la misma expresión algebraica, siempre que la expresión algebraica no sea cero. Es recomendable comprobar que el valor obtenido al resolver una ecuación es solución de ésta, lo cual nos indicará si se cometieron o no errores aritméticos o algebraicos al resolverla. La comprobación se efectúa sustituyendo, en la ecuación original, el valor encontrado.

Una ecuación polinomial de primer grado es llamada **ecuación lineal,** debido a que su gráfica es una línea recta, como se verá en la Sección 3.1.

DEFINICIÓN **Ecuación lineal**

Una ecuación lineal en la variable x es una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

A fin de resolver la ecuación $ax + b = 0$ para x, se resta b de ambos lados y después se dividen ambos lados entre a, lo cual puede hacerse porque $a \neq 0$. Así, se tienen las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$ax + b = 0$$

$$ax + b - b = 0 - b$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Se demostrará el teorema siguiente.

TEOREMA 1

La ecuación lineal $ax + b = 0$ (donde $a \neq 0$) tiene exactamente una solución, $-\frac{b}{a}$.*

Para mostrar la solución de la ecuación lineal

$$ax + b = 0$$

en una gráfica se define y igual al lado izquierdo, y se dibuja la gráfica de esa ecuación.

La gráfica es una línea recta que cruza al eje x en el punto cuya abscisa es $x = -\frac{b}{a}$, la solución de la ecuación. El número $-\frac{b}{a}$ es denominado la **intercepción x** de la recta.**

▸ EJEMPLO 1 *Resolución algebraica de una ecuación lineal y presentación de la solución en una gráfica*

Resuelva la ecuación

$$5x - 2x - 11 = 2 + x - 8$$

y muestre la solución en una gráfica.

Solución Si se reducen los términos semejantes en cada lado de la ecuación y después se agrega $-x$ y 11 a ambos lados, obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$3x - 11 = x - 6$$

$$3x - 11 - x + 11 = x - 6 - x + 11$$

$$3x - x = 11 - 6$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{\frac{5}{2}\}$. Para verificar la solución , ¿será cierto que $5\left(\frac{5}{2}\right) - 2\left(\frac{5}{2}\right) - 11 = 2 + \frac{5}{2} - 8$?

* **N. del R.** El hecho de que la solución de la ecuación es única está basado en que los números $-b$ (inverso aditivo de b) y $\frac{1}{a}$ (inverso multiplicativo de a), componentes de la solución, son únicos. Esto último corresponde a los teoremas del campo R.

** **N. del R.** El término *intercepción x* puede interpretarse geométricamente como la longitud del segmento determinado en el eje x por la intersección de la gráfica y el eje x, y el origen. Otro nombre para la intercepción x es *abscisa al origen*.

Al sustituir $\frac{5}{2}$ en cada miembro, se tiene

$$5\left(\frac{5}{2}\right) - 2\left(\frac{5}{2}\right) - 11 = \frac{25}{2} - 5 - 11 \qquad 2 + \frac{5}{2} - 8 = \frac{5}{2} - 6$$

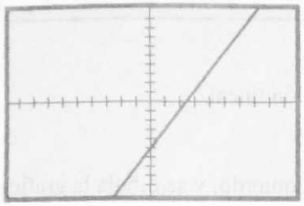
$$= -\frac{7}{2} \qquad = -\frac{7}{2}$$

Esto comprueba la solución.

Debido a que la ecuación dada es equivalente con $2x - 5 = 0$, trace la gráfica de:

$$y = 2x - 5$$

en una calculadora gráfica o graficadora obteniendo la recta que se muestra en la Figura 2.1. La intercepción x de esta recta es 2.5, la solución de la ecuación.



[−10, 10] por [−10, 10]
$y = 2x - 5$
FIGURA 2.1

Un método gráfico estricto de solución de la ecuación del ejemplo 1 se mostrará en el siguiente ejemplo.

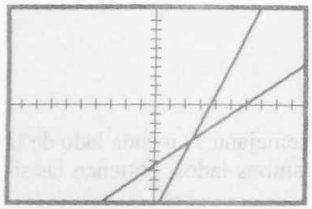
► EJEMPLO 2 *Resolver una ecuación lineal mediante una graficadora*

Use una graficadora para resolver la ecuación del ejemplo 1.

Solución Se definen

$$y_1 = 5x - 2x - 11 \quad \text{y} \quad y_2 = 2 + x - 8$$

y se trazan las gráficas de estas dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección, obteniéndose las rectas mostradas en la Figura 2.2. La coordenada x del punto de intersección de las rectas es 2.5, lo cual concuerda con la solución del ejemplo 1.



[−10, 10] por [−10, 10]
$y_1 = 5x - 2x - 11$ y $y_2 = 2 + x - 8$
FIGURA 2.2

Para resolver una ecuación que contiene expresiones racionales se multiplican ambos lados de la ecuación por el MCDn (mínimo común denominador) de las fracciones, tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

► EJEMPLO 3 *Resolver una ecuación racional*

Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{3}{x + 4} = \frac{2}{3x - 2}$$

Solución Observe que cuando x es -4 o $\frac{2}{3}$, se obtiene cero en el denominador de una de las fracciones en la ecuación dada. Por tanto, -4 y $\frac{2}{3}$ no están en el dominio de la incógnita x.

El MCDn es $(x + 4)(3x - 2)$. Si se multiplican ambos lados de la ecuación por el MCDn, se obtiene

$$(x + 4)(3x - 2)\frac{3}{x + 4} = (x + 4)(3x - 2)\frac{2}{3x - 2}$$

$$3(3x - 2) = 2(x + 4)$$

$$9x - 6 = 2x + 8$$

$$9x - 6 + 6 - 2x = 2x + 8 + 6 - 2x$$

$$9x - 2x = 8 + 6$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{2\}$. Ahora se verificará la solución. ¿Será cierto que $\frac{3}{2 + 4} = \frac{2}{3(2) - 2}$?

$$\frac{3}{2 + 4} = \frac{3}{6} \qquad \frac{2}{3(2) - 2} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{2}$$

De este modo, la solución ha sido comprobada. ◄

Cuando se multiplican ambos lados de la ecuación por el MCDn la ecuación resultante puede no ser equivalente a la original. Si esto sucede, se puede obtener un valor como posible solución que no satisfaga la ecuación original debido a que no pertenece al dominio de la incógnita. Estas situaciones ocurren en los ejercicios 25 y 26.

En el ejemplo siguiente se obtendrá una ecuación como una representación algebraica de una situación práctica. A la ecuación obtenida se le denomina **modelo matemático de la situación práctica.** En la Sección 2.3 se discutirán en detalle las ecuaciones como modelos matemáticos.

► EJEMPLO 4 *Obtención y aplicación de una ecuación como modelo matemático*

El costo de alquiler de un avión de una plaza, de una aerolínea privada, es de 310 dólares por el avión y piloto, más 75 centavos de dólar por milla de vuelo. ¿Cuál es el costo de un viaje de **(a)** 100 millas; **(b)** 200 millas y **(c)** 300 millas? **(d)** Si y dólares es el costo de un viaje de x millas, escriba una ecuación que relacione a y y x. Emplee la ecuación del inciso (d) para determinar **(e)** el costo de un viaje de 270 millas y **(f)** la distancia recorrida de un viaje que costó 720 dólares.

Solución

(a) El costo de un viaje de 100 millas es de $310 + $0.75 (100), o $385.

(b) El costo de un viaje de 200 millas es de $310 + $0.75 (200), o $460.

(c) El costo de un viaje de 300 millas es de $310 + $0.75 (300), o $535.

(d) A fin de determinar una ecuación que relacione a x y y, se observa en las respuestas de las partes (a), (b) y (c) que el número de dólares en el costo total del viaje se obtiene por la suma de $310 y el producto de 0.75 y el número de millas recorridas en el viaje. Por tanto, si y dólares es el costo de un viaje de x millas, entonces

$$y = 310 + 0.75x$$

(e) Para un viaje de 270 millas, $x = 270$ y

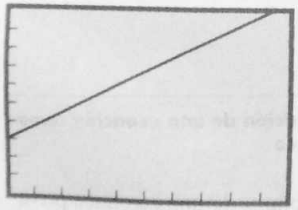
$$\begin{aligned} y &= 310 + 0.75(270) \\ &= 512.50 \end{aligned}$$

Por tanto, el costo del viaje es de $512.50.

(f) Para un viaje cuyo costo es de $720, $y = 720$ y

$$\begin{aligned} 720 &= 310 + 0.75x \\ 0.75x &= 720 - 310 \\ 0.75x &= 410 \\ x &= \frac{410}{0.75} \\ x &= 546.67 \end{aligned}$$

Por tanto, el recorrido del viaje es de 546.67 millas.



[0, 1 000] por [0, 1 000]
$y = 310 + 0.75x$
FIGURA 2.3

La Figura 2.3 muestra la gráfica de la ecuación del ejemplo 4 trazada en el rectángulo de inspección [0,1 000] por [0,1 000] con una escala de 100 en ambos ejes. En el ejercicio 40 se pedirá que utilizando la graficadora se hagan aumentos (*zoom-in*) en esta gráfica para estimar las respuestas de los incisos (e) y (f) del ejemplo 4.

Una ecuación puede contener más de una variable o puede contener símbolos como a y b para representar constantes. Una ecuación de este tipo se conoce en algunas ocasiones como **ecuación literal.** Para resolver una ecuación de este tipo respecto a una de las variables en términos de las otras variables o símbolos, se trata la variable elegida como la incógnita y las otras variables o símbolos como valores conocidos.

N. de R. La expres

► EJEMPLO 5 *Resolución de una ecuación literal*

Si se lee la temperatura en dos termómetros, uno Fahrenheit y otro Celcius, entonces F grados es la temperatura Fahrenheit leída y C grados es la temperatura Celsius, la relación de estas temperaturas es:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Resuelva esta ecuación para C.

Solución Primero se multiplica cada lado por 5 y se obtiene

$$5F = 9C + 160$$

$$5F - 160 = 9C$$

$$9C = 5(F - 32)$$

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$ ◄

► EJEMPLO 6 *Resolución de una ecuación literal*

Resuelva la ecuación

$$y = xtz + xyz$$

(a) para x, y **(b)** para y

Solución

(a) A fin de resolver para* x, primero se factoriza el lado derecho.

$$y = x(tz + yz)$$

Ahora se dividen ambos lados entre $tz + yz$ y resulta

$$x = \frac{y}{tz + yz} \qquad (tz + yz \neq 0)$$

(b) A fin de resolver para y, se suma $-xyz$ a cada uno de los lados y después se factoriza el lado izquierdo, obteniéndose:

$$y - xyz = xtz$$

$$y(1 - xz) = xtz$$

Al dividir ambos lados entre $1 - xz$, se tiene

$$y = \frac{xtz}{1 - xz} \qquad (xz \neq 1)$$ ◄

* N. de R. La expresión "resolver para" también significa "despejar".

EJERCICIOS 2.1

En los ejercicios 1 a 4, encuentre el conjunto solución de la ecuación, y muestre la solución en una gráfica obtenida en una graficadora.

1. $2x + 7 = 0$ **2.** $3x - 2 = 0$

3. $5x - 8 = 0$ **4.** $4x + 9 = 0$

En los ejercicios 5 a 14, resuelva la ecuación de dos formas: (i) en la graficadora como en el ejemplo 2; (ii) algebraicamente.

5. $7x + 4 = 25$ **6.** $7 = y + 10$

7. $4w - 3 = 11 - 3w$ **8.** $x - 9 = 3x + 3$

9. $2(t - 5) = 3 - (4 + t)$

10. $1 - 3(2x - 4) = 4(6 - x) - 8$

11. $x = x + 1$ **12.** $x + 3 = 1 + x + 2$

13. $3(4y + 9) = 7(2 - 5y) - 2y$

14. $-2[s - (5 - 4s)] + 4 = -3s$

En los ejercicios 15 a 24, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

15. $\dfrac{3x - 2}{3} + \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{5}{6}$ **16.** $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2}{x}$

17. $\dfrac{5}{2y} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}$

18. $\dfrac{1}{4 - t} + \dfrac{3}{6 + t} = 0$

19. $\dfrac{2}{3x - 4} = \dfrac{5}{6x - 7}$

20. $\dfrac{3}{x^2 - 9} - \dfrac{7}{x - 3} = -\dfrac{4}{x + 3}$

21. $\dfrac{4}{25w^2 - 1} + \dfrac{3}{5w - 1} = \dfrac{2}{5w - 1}$

22. $\dfrac{3}{x^2 - x - 6} = \dfrac{4}{2x^2 + x - 6}$

23. $\dfrac{5}{x^2 + 6x - 7} = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

24. $\dfrac{2}{y + 1} - \dfrac{3}{1 - y} = \dfrac{5}{y}$

En los ejercicios 25 y 26, demuestre que el conjunto solución de la ecuación es ∅.

25. $\dfrac{2x + 16}{x^2 + 16x + 55} + \dfrac{4}{x + 5} = \dfrac{1}{x + 11}$

26. $\dfrac{1}{2x + 5} - \dfrac{4}{2x - 1} = \dfrac{4x + 4}{4x^2 + 8x - 5}$

En los ejercicios 27 a 32, resuelva para x o y en términos de los otros símbolos.

27. $3ax + 6ab = 7ax + 3ab$

28. $\dfrac{a + 3x}{b} = \dfrac{c}{2}$

29. $a(y - a) - 2b(y - 3b) = ab$

30. $5a(5a + x) = 2a(2a - x)$

31. $\dfrac{x + b}{3a - 4b} = \dfrac{x - a}{2a - 5b}$

32. $\dfrac{1}{c - y} + \dfrac{2}{c + y} = \dfrac{1}{y}$

En los ejercicios 33 a 39, resuelva para la cantidad indicada en la fórmula dada.

33. $A = \frac{1}{2}(a + b)h$; para h **34.** $A = \frac{1}{2}(a + b)h$; para b

35. $E = I(R + r)$; para r **36.** $A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)$; para r

37. $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$; para p **38.** $E = I\left(R + \dfrac{r}{n}\right)$; para n

39. $S = \dfrac{a - rl}{1 - r}$; para r

40. Al aumentar (*zoom-in*) la gráfica de la Figura 23 en la graficadora estime las respuestas en los incisos (e) y (f) del ejemplo 4.

41. Suponga que el tanque de la gasolina de un automóvil tiene una capacidad de 16 galones, y se pueden recorrer 20 millas con un galón de gasolina. Si se inicia un viaje con el tanque lleno, ¿cuántos galones quedarán en el tanque después de recorrer **(a)** 100 millas, **(b)** 200 millas y **(c)** 300 millas? **(d)** Si y galones de gasolina quedan en el tanque después de haber manejado x millas, escriba una ecuación que relacione y y x. Emplee la respuesta obtenida en el inciso (d) para determinar **(e)** ¿cuánta gasolina queda en el tanque después de conducir 240 millas?, **(f)** ¿qué tan lejos se puede manejar cuando el indicador marca que queda un

cuarto de tanque de gasolina? y (g) ¿qué tan lejos puede manejarse con un tanque lleno antes de quedarse sin gasolina?

42. El costo de una llamada de larga distancia de Mendocino a San Francisco en cualquier día de la semana es de 40 centavos de dólar el primer minuto y 31 centavos de dólar para cada minuto adicional. ¿Cuál es el costo de una llamada que duró (a) 4 minutos; (b) 7 minutos; y (c) 10 minutos? (d) Si y dólares es el costo de una llamada que tuvo una duración de x minutos, escriba una ecuación que relacione y y x. Utilice la ecuación del inciso (d) para determinar (e) el costo de una llamada de 16 minutos de duración, y (f) la duración de una llamada que costó 4.74 dólares.

43. En una graficadora, trace la gráfica de la ecuación del inciso (d) del ejercicio 41. Aumente (*zoom-in*) la gráfica para estimar las respuestas de los incisos (e), (f) y (g) del ejercicio 41.

44. En una graficadora, trace la gráfica de la ecuación del inciso (d) del ejercicio 42. Aumente (*zoom-in*) la gráfica para estimar las respuestas de los incisos (e), y (f) del ejercicio 42.

45. Encuentre el conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes, si x es un número real:

(a) $\frac{x}{x} = 1$ (b) $\frac{x}{x} = 0$ (c) $\frac{x}{x} = 2$

46. Determine el conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes, si x es un número real:

(a) $\frac{x-2}{x-2} = 1$ (b) $\frac{x-2}{x-2} = 0$

(c) $\frac{x-2}{x-2} = 2$

2.2 ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

OBJETIVOS

1. **Aprender el teorema del factor-cero.**
2. **Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización.**
3. **Mostrar en una gráfica las soluciones reales de una ecuación cuadrática.**
4. **Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la raíz cuadrada.**
5. **Completar el cuadrado de $x^2 + kx$.**
6. **Aprender la fórmula cuadrática.**
7. **Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática.**
8. **Usar el discriminante para determinar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.**
9. **Aprender las relaciones existentes entre la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática y las intercepciones x de la parábola correspondiente.**
10. **Resolver gráfica y algebraicamente problemas de movimiento rectilíneo.**
11. **Resolver ecuaciones literales considerándolas como ecuaciones cuadráticas.**
12. **Aplicar el concepto de completación de cuadrados a ecuaciones que se presentan en geometría analítica y expresiones algebraicas encontradas en Cálculo.**

Una ecuación que puede expresarse como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales constantes y $a \neq 0$ es llamada ecua-
ción polinomial de segundo grado o **ecuación cuadrática** en la va-
riable x. La palabra *cuadrática* proviene del vocablo francés *quadra-*
que significa raíz o rectángulo. Cuando una ecuación cuadrática se es-
cribe en la forma anterior (donde todos los términos distintos de cer
se encuentran del lado izquierdo y 0 está en el lado derecho), se dice
que está en **forma estándar.** Es conveniente tener una forma estándar
para un tipo particular de ecuación, así como también se tiene una fór-
ma para referirse a sus propiedades cuando se proponen fórmulas o
teoremas.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones cuadráticas en x, escri-
tas en forma estándar con los valores de a, b y c. indicados.

$$6x^2 + 7x - 3 = 0 \qquad (a = 6, b = 7, c = -3)$$
$$x^2 - 7 = 0 \qquad (a = 1, b = 0, c = -7)$$
$$3x^2 - 4x = 0 \qquad (a = 3, b = -4, c = 0)$$

Observe que es posible que b o c sean cero, como en la segunda y tercera
ecuación. De cualquier modo, la restricción de que $a \neq 0$ es necesaria para
tener una ecuación de segundo grado.

Un método para determinar el conjunto solución de una ecuación
cuadrática involucra el teorema siguiente. Su demostración se basa en
las propiedades del conjunto de los números complejos dadas en la
Sección 1.3.

TEOREMA *Teorema del factor cero*

Si r y s son números complejos, entonces

$$rs = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad r = 0 \text{ o } s = 0$$

Este teorema puede ser extendido para un producto de más de dos
factores. Por ejemplo si $r, s, t, u \in C$, entonces $rstu = 0$ si y sólo si al
menos uno de los números r, s, t o u es 0.

Aplicación del teorema del factor cero

El teorema del factor cero puede ser aplicado para resolver cual-
quier ecuación cuadrática en la forma estándar para la cual el
lado izquierdo puede ser factorizado.

1. Factorizar el lado izquierdo.
2. Hacer cada factor igual a cero.

3. Encontrar las soluciones de estas ecuaciones lineales.
4. El conjunto solución de la ecuación cuadrática dada es la unión de los conjuntos solución de las dos ecuaciones lineales.
5. Comprobar las soluciones mediante la sustitución en la ecuación original.

En el ejemplo siguiente se mostrará el procedimiento.

► EJEMPLO 1 *Resolver una ecuación cuadrática por factorización*

Determine el conjunto solución de la ecuación

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Solución Si se factoriza el lado izquierdo se obtiene

$$(x + 5)(x - 2) = 0$$

Al aplicar el teorema del factor cero, se concluye que la ecuación dada es una proposición verdadera si y sólo si

$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

La solución de la primera de estas ecuaciones es -5, y la solución de la segunda es 2. Por tanto, el conjunto solución de la ecuación cuadrática dada es $\{-5, 2\}$.

Las soluciones pueden comprobarse sustituyendo -5 y 2 en la ecuación original como sigue:

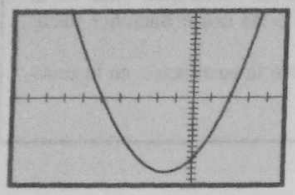
$$\text{¿Es } (-5)^2 + 3(-5) - 10 = 0? \qquad \text{¿Es } 2^2 + 3(2) - 10 = 0?$$

$$(-5)^2 + 3(-5) - 10 = 25 - 15 - 10 \qquad 2^2 + 3(2) - 10 = 4 + 6 - 10$$

$$= 0 \qquad = 0$$

Por tanto, ambas soluciones están comprobadas. ◄

La gráfica de la ecuación obtenida haciendo y igual al lado izquierdo de la ecuación cuadrática en forma estándar es una parábola. Las intercepciones x de la parábola son las soluciones reales de la ecuación cuadrática.



[–10, 5] por [–15, 15]
$y = x^2 + 3x - 10$
FIGURA 2.4

▸ EJEMPLO 2 *Determinación gráfica de las soluciones reales de una ecuación cuadrática*

Para la ecuación cuadrática del ejemplo 1, muestre las soluciones gráficamente.

Solución Considere y igual al lado izquierdo de la ecuación:

$$y = x^2 + 3x - 10$$

Al trazar la gráfica de esta ecuación se obtiene la parábola, mostrada en la Figura 2.4. Las intercepciones x de la parábola son –5 y 2, las cuales corresponden con las soluciones obtenidas en el ejemplo 1. ◂

Suponga que se tiene una ecuación cuadrática de la forma

$$x^2 = d$$

esto es, que no hay términos de primer grado. Por lo que la siguiente es una ecuación equivalente

$$x^2 - d = 0$$

y al factorizar el lado izquierdo obtiene

$$(x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0$$

Se considera cada uno de los factores igual a cero y se resuelven las ecuaciones.

$$x - \sqrt{d} = 0 \qquad x + \sqrt{d} = 0$$

$$x = \sqrt{d} \qquad x = -\sqrt{d}$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación $x^2 = d$ es $\{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\}$. Se puede abreviar el conjunto solución como $\{\pm\sqrt{d}\}$. Es decir

$$x^2 = d \quad \text{si y sólo si} \quad x = \pm\sqrt{d}$$

donde $x = \pm\sqrt{d}$ se refiere a las dos ecuaciones $x = \sqrt{d}$ y $x = -\sqrt{d}$. Es factible resolver la ecuación extrayendo la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación y escribiendo el símbolo ± para indicar las dos raíces de d.

▸ EJEMPLO 3 *Resolver una ecuación cuadrática mediante raíz cuadrada*

Encuentre el conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes:

(a) $x^2 = 25$ **(b)** $x^2 = 11$ **(c)** $x^2 = -9$

Solución Se extrae la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación.

(a) $x^2 = 25$
$x = \pm\sqrt{25}$
$x = \pm 5$

(b) $x^2 = 11$
$x = \pm\sqrt{11}$

(c) $x^2 = -9$
$x = \pm\sqrt{-9}$
$x = \pm 3i$ ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

El conjunto solución de la ecuación

$$(x - 4)^2 = 5$$

puede ser determinado extrayendo la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. Por lo que se tiene

$$x - 4 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{5}$$

Así, las dos soluciones son $4 + \sqrt{5}$ y $4 - \sqrt{5}$, y el conjunto solución puede escribirse como $\{4 \pm \sqrt{5}\}$. ◀

Puede aplicarse el método del ejemplo ilustrativo 1 para hallar el conjunto solución de cualquier ecuación cuadrática. El primer paso es escribir la ecuación de una forma similar a la de la ecuación dada en el ejemplo ilustrativo 1. Esto es, el lado izquierdo será el cuadrado de una expresión algebraica que contiene la variable, y el lado derecho será una constante. Se empleará este procedimiento en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

A fin de encontrar el conjunto solución de la ecuación

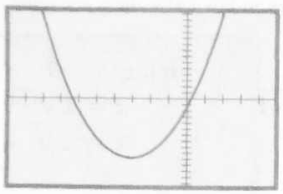
$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

primero se suma 1 a cada lado y se obtiene

$$x^2 + 6x = 1 \qquad (1)$$

Ahora se suma a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir 3^2, y se obtiene

$$x^2 + 6x + 9 = 1 + 9 \qquad (2)$$



[–10, 5] por [–15, 15]
$y = x^2 + 6x - 1$
FIGURA 2.5

El lado izquierdo es el cuadrado de $x + 3$. Así, se tiene

$$(x + 3)^2 = 10 \tag{3}$$

Al extraer la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación resulta

$$x + 3 = \pm\sqrt{10}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación dada es $\{-3 \pm \sqrt{10}\}$. ◂

En el ejemplo ilustrativo 2, las soluciones $-3 + \sqrt{10}$ y $-3 - \sqrt{10}$ son las soluciones **exactas de la ecuación cuadrática.** Empleando la calculadora, $\sqrt{10} \approx 3.16227766$, donde el símbolo $\approx$ se lee "aproximadamente igual". Por tanto, las **aproximaciones decimales** de las soluciones con siete cifras decimales son -6.1622777 y 0.1622777. La gráfica de $y = x^2 + 6x - 1$, mostrada en la Figura 2.5, indica que las soluciones encontradas son aproximaciones razonables de las intercepciones x de la parábola.

El método empleado para obtener la Ecuación (3) se denomina **completación del cuadrado.** El paso importante es obtener la Ecuación (3) equivalente a la Ecuación (1). Observe que en (1), el lado izquierdo es $x^2 + 6x$ (el coeficiente de x^2 es 1 y el coeficiente de x es 6). Se ha sumado el cuadrado de la mitad de 6 a ambos lados de la Ecuación (1), lo cual da (2), en la que el lado izquierdo es $(x + 3)^2$. De manera más general:

Para completar el cuadrado de $x^2 + kx$, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x; o sea $\left(\frac{k}{2}\right)^2$.

Observe que esta regla para completar el cuadrado, se aplica solamente a una expresión cuadrática de la forma $x^2 + kx$, donde el coeficiente del término de segundo grado es 1. Además, cuando $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ se suma a $x^2 + kx$, se obtiene el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$$

Si k es igual a $2a$, esta fórmula se transforma en:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

▸ EJEMPLO 4 *Completar el cuadrado de $x^2 + kx$*

Agregue un término a cada una de las siguientes expresiones algebraicas, para obtener el cuadrado de un binomio. Escriba la expresión resultante como un binomio al cuadrado.

(a) $x^2 + 12x$ (b) $x^2 - 5x$ (c) $x^2 + \frac{3}{4}x$

Solución El coeficiente de x^2 es 1 en cada una de las expresiones proporcionadas. Por tanto, para completar el cuadrado, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

(a) $x^2 + 12x + 6^2 = x^2 + 12x + 36$
$= (x + 6)^2$

(b) $x^2 - 5x + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$
$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$

(c) $x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64}$
$= \left(x + \frac{3}{8}\right)^2$

Ahora, considere la ecuación cuadrática general en la forma estándar:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta ecuación se resuelve para x en términos de a, b y c completando el cuadrado. Primero se dividen ambos lados de la ecuación por a (recuerde que $a \neq 0$); posteriormente, se agrega $-\frac{c}{a}$ a ambos lados para obtener

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Al sumar, a ambos lados, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estos dos valores de x son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Mediante el procedimiento anterior se ha obtenido la fórmula cuadrática, la cual se establece a continuación de manera formal.

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El hecho de sustituir los valores de a, b y c en la fórmula cuadrática nos permite resolver fácilmente cualquier ecuación en forma estándar.

▸ EJEMPLO 5 *Resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática*

Emplee la fórmula cuadrática para encontrar el conjunto solución de la ecuación

$$2x^2 = 5(2x - 3)$$

Solución Si se escribe la ecuación dada en la forma estándar queda como

$$2x^2 - 10x + 15 = 0$$

A partir de la fórmula cuadrática, donde $a = 2$, $b = -10$ y $c = 15$,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

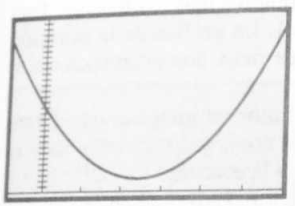
$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 120}}{4}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{4}$$

$$= \frac{10 \pm 2i\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm i\sqrt{5}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{5 \pm i\sqrt{5}}{2}\right\}$. ◀



[−1, 6] por [0, 30]
$y = 2x^2 - 10x + 15$
FIGURA 2.6

La parábola $y = 2x^2 - 10x + 15$, asociada con la ecuación en el ejemplo 5 y mostrada en la Figura 2.6, no intersecta al eje x debido a que la ecuación no tiene raíces reales.

Resumen de los métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

1. Factorización (ejemplo 1).
2. Raíz cuadrada (ejemplo 3 y ejemplo ilustrativo 1).
3. Completación del cuadrado (ejemplo ilustrativo 2).
4. Fórmula cuadrática (ejemplo 5).

Cualquier ecuación cuadrática puede resolverse mediante la fórmula cuadrática; por lo que el método 4 se utiliza con más frecuencia. Si los métodos 1 y 2 parecen apropiados, se deben emplear, ya que es más fácil su aplicación. El método de completar el cuadrado, el cual es poco común para resolver una ecuación cuadrática, reviste importancia debido a que se empleó en la deducción de la fórmula cuadrática.

A continuación se proporciona información acerca de las raíces de una ecuación cuadrática, sin que realmente se resuelva ésta. Si r y s representan las raíces de

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, con

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad s = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número representado por $b^2 - 4ac$ se denomina el **discriminante** de la ecuación cuadrática. La naturaleza de las raíces se puede determinar encontrando el valor del discriminante.

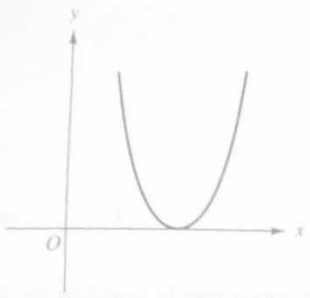


FIGURA 2.7

1. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces

$$r = \frac{-b}{2a} \quad \text{y} \quad s = \frac{-b}{2a}$$

y por tanto, r y s son números reales iguales. En tal caso, el número $-\frac{b}{2a}$ se llama **raíz doble** (o una **raíz de multiplicidad 2**). La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es la parábola tangente al eje x en el punto donde $x = -\frac{b}{2a}$. *Véase* la Figura 2.7.

2. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces r y s son números reales diferentes. Esta situación se presentó en el ejemplo 1. La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola que tiene dos intercepciones x. *Véase* la Figura 2.4.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces r y s son números imaginarios diferentes, cada uno de ellos es el complejo conjugado del otro. Esto se observó, en el ejemplo 5. La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola que no intersecta el eje x. *Véase* la Figura 2.6.

Ahora se resumirán estos resultados.

Clasificación de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

1. $b^2 - 4ac = 0$: las raíces son reales e iguales, una raíz doble
2. $b^2 - 4ac > 0$: las raíces son reales y diferentes
3. $b^2 - 4ac < 0$: las raíces son imaginarias y diferentes; una es el complejo conjugado de la otra.

▸ EJEMPLO 6 *Uso del discriminante para determinar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, verificando la conclusión por medio de una gráfica*

Determine el carácter de las raíces de la ecuación dada. Trace la gráfica de la parábola correspondiente para verificar la conclusión.

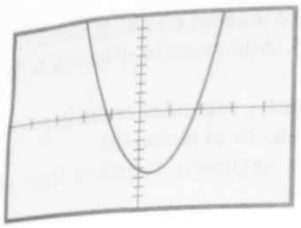
(a) $3x^2 - 2x - 6 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(c) $2x^2 + 6x + 7 = 0$

Solución

(a) En la ecuación dada $a = 3$, $b = -2$, y $c = -6$. Así

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-6)$$
$$= 76$$



[-5, 5] por [-10, 10]
$y = 3x^2 - 2x - 6$
FIGURA 2.8

Debido a que el discriminante es positivo, las raíces son reales y diferentes. En la Figura 2.8 aparece la gráfica que tiene dos intercepciones x.

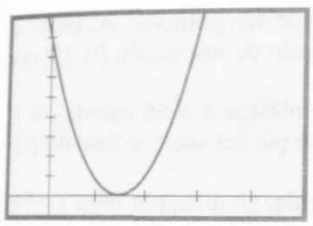
(b) Como $a = 4$, $b = -12$ y $c = 9$,

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9)$$
$$= 0$$

El discriminante es cero, por tanto, las raíces son números reales iguales. Observe que $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$, la ecuación puede escribirse como

$$(2x - 3)^2 = 0$$
$$(2x - 3)(2x - 3) = 0$$

y cada factor en la ecuación da el número $\frac{3}{2}$ como solución. La gráfica mostrada en la Figura 2.9 es una parábola tangente al eje x en el punto (1.5, 0).



[-1, 5] por [-1, 10]
$y = 4x^2 - 12x + 9$
FIGURA 2.9

(c) Debido a que $a = 2$, $b = 6$ y $c = 7$,

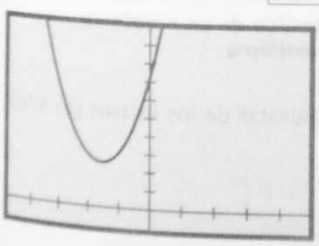
$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(2)(7)$$
$$= -20$$

El discriminante es negativo, por tanto, las raíces son imaginarias, diferentes y complejas conjugadas una de otra. La Figura 2.10 muestra en la gráfica de una parábola que no intersecta el eje x. ◄

Una aplicación del Cálculo en física trata sobre el *movimiento rectilíneo*, es decir, el movimiento de una partícula sobre una recta. Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba es un ejemplo particular. En tal situación, si s pies es la distancia del objeto al punto de partida, entonces ésta será después de t segundos de que el cuerpo sea lanzado,

$$s = -16t^2 + v_0 t \qquad (4)$$

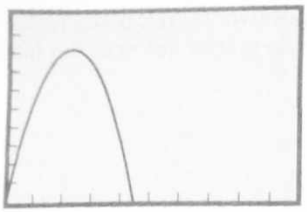
donde v_0 pies por segundo es la velocidad inicial del objeto. La Ecuación (4) se llama *ecuación de movimiento*. Cuando estudie Cálculo, podrá determinar a partir de la ecuación de movimiento la velocidad de un objeto en cualquier tiempo particular.



[-5, 5] por [-1, 10]
$y = 2x^2 + 6x + 7$
FIGURA 2.10

► EJEMPLO 7 *Resolución gráfica de un problema de movimiento rectilíneo*

Una pelota es lanzada desde el piso verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 72 pie/s.



[0, 10] por [0, 100]
$s = -16t^2 + 72t$
FIGURA 2.11

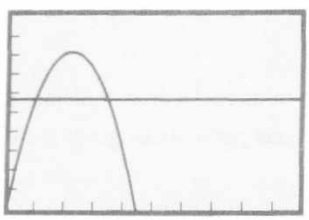
(a) Trace la gráfica de la ecuación de movimiento en una graficadora.
(b) A partir de la gráfica del inciso (a), determine la distancia de la pelota al piso al final de 1 s.
(c) A partir de la gráfica, al final de cuántos segundos estará la pelota cayendo, pero a la misma distancia que en el inciso (b).
(d) A partir de la gráfica, ¿en cuántos segundos la pelota llega al piso?

Solución

(a) De la ecuación 4 con $v_0 = 72$, la ecuación de movimiento es

$$s = -16t^2 + 72t$$

Observe que tanto s como t deben de ser positivos. Al trazar la gráfica de la ecuación en el rectángulo de inspección [0, 10] por [0, 100] se obtiene la Figura 2.11.



[0, 10] por [0, 100]
$s = 16t^2 + 72t$ y $s = 56$
FIGURA 2.12

(b) Al trazar y aumentar (*zoom-in*), se obtiene $s = 56$ cuando $t = 1$. Por tanto, la pelota se encuentra a 56 pie del suelo al final del primer segundo.
(c) En el mismo rectángulo de inspección, se dibuja la línea $s = 56$. *Véase* la Figura 2.12. Al aumentar (*zoom-in*), se determina que la recta intersecta la gráfica de la ecuación de movimiento cuando $t = 3.5$ s. Por tanto, la pelota en su caída estará a 56 pie arriba del piso al final de 3.5 s.
(d) La pelota está en el piso para $s = 0$, esto es, cuando la gráfica intersecta el eje horizontal. Por supuesto esto ocurre para $t = 0$, y también mediante el aumento (*zoom-in*), cuando $t = 4.5$. Por tanto, se requieren 4.5 s para que la pelota regrese al piso. ◂

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ ▸ **EJEMPLO 8** ***Resolución algebraica de un problema de movimiento rectilíneo***

Encuentre, por medio de álgebra, las respuestas de los incisos (b) a (d) del ejemplo 7.

Solución

(b) En la ecuación de movimiento

$$s = -16t^2 + 72t$$

cuando $t = 1$, se obtiene

$$s = -16(1)^2 + 72(1)$$
$$= 56$$

(c) Si sustituye s por 56 en la ecuación de movimiento, se obtiene

$$56 = -16t^2 + 72t$$
$$16t^2 - 72t + 56 = 0$$
$$2t^2 - 9t + 7 = 0$$
$$(2t - 7)(t - 1) = 0$$
$$2t - 7 = 0 \qquad t - 1 = 0$$
$$t = 3.5 \qquad t = 1$$

(d) Al sustituir s por 0 en la ecuación de movimiento, se obtiene

$$0 = -16t^2 + 72t$$
$$-8t(2t - 9) = 0$$
$$t = 0 \qquad 2t - 9 = 0$$
$$t = 4.5$$

Estas respuestas están de acuerdo con las encontradas en el ejemplo 7. ◄

► **EJEMPLO 9** ***Resolución de una ecuación literal considerada como ecuación cuadrática***

Resuelva la ecuación (4) para t.

Solución Si se escribe la ecuación en la forma estándar de una ecuación cuadrática en t, se tiene

$$-16t^2 - v_0t + s = 0$$

Al emplear la fórmula cuadrática, donde $a = 16$, $b = -v_0$, y $c = s$, se obtiene

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-v_0) \pm \sqrt{(-v_0)^2 - 4(16)(s)}}{2(16)}$$
$$= \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0{}^2 - 64s}}{32}$$

◄

El concepto de **completación del cuadrado** tiene otras aplicaciones aparte de la deducción de la fórmula cuadrática. En geometría analítica, se emplea para escribir las ecuaciones de las cónicas en forma estándar; *véase* los ejercicios 35 a 42. En Cálculo, se aplica en técnicas de integración para escribir ciertas expresiones algebraicas en formas identificables; *véase* el ejemplo siguiente y los ejercicios 43 a 46.

▸ EJEMPLO 10 *Aplicar el concepto de completación del cuadrado para una expresión algebraica encontrada en Cálculo*

$\int\int \frac{dy}{dx}$ Escriba $\sqrt{27 + 6x - x^2}$ en la forma $\sqrt{a^2 - (x - h)^2}$, donde a y h son constantes.

Solución

$$\sqrt{27 + 6x - x^2} = \sqrt{27 - (x^2 - 6x)}$$

Para completar el cuadrado de la expresión $x^2 - 6x$, se debe agregar $(-\frac{6}{2})^2$, lo cual es 9. Debido a que un signo menos precede al paréntesis, realmente se necesita –9 en el radicando. Por tanto, al sumar 9 – 9 al radicando no se afecta su valor y se obtiene

$$\begin{aligned}\sqrt{27 - (x^2 - 6x)} &= \sqrt{27 + 9 - 9 - (x^2 - 6x)} \\ &= \sqrt{36 - (x^2 - 6x + 9)} \\ &= \sqrt{6^2 - (x - 3)^2}\end{aligned}$$

expresión que está en la forma requerida. ◂

EJERCICIOS 2.2

En los ejercicios 1 a 12, encuentre el conjunto solución de la ecuación. Trace la gráfica de la parábola correspondiente y verifique que las intercepciones x de la parábola sean las raíces de la ecuación.

1. $x^2 = 49$
2. $25x^2 - 16 = 0$
3. $5t^2 - 12 = 0$
4. $3y^2 - 5 = 0$
5. $4x^2 = x$
6. $\frac{1}{6}x^2 + x = 0$
7. $x^2 = 8x - 15$
8. $y^2 - 11y + 28 = 0$
9. $8w^2 + 10w - 3 = 0$
10. $14x^2 - x - 3 = 0$
11. $49x^2 + 84x + 36 = 0$
12. $64y^2 - 80y + 25 = 0$

En los ejercicios 13 a 22, encuentre el conjunto solución de la ecuación utilizando la forma cuadrática. Trace la parábola correspondiente, si la ecuación tiene raíces reales, verifique que las intercepciones x de la parábola sean las raíces de la ecuación. Si la ecuación no tiene raíces reales, compruebe que la parábola no intersecta el eje x.

13. $x^2 - 3x - 4 = 0$
14. $x^2 + 2x - 3 = 0$
15. $2x + 2 = x^2$
16. $x^2 + 1 = 6x$
17. $5y^2 - 4y - 2 = 0$
18. $4s^2 - 10s + 5 = 0$
19. $x^2 + \frac{1}{2} = x$
20. $\frac{x^2}{4} + 2 = x$
21. $t^2 - 4t + 7 = 0$
22. $25y^2 - 20y + 7 = 0$

En los ejercicios 23 a 26, encuentre el discriminante y determine la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática; no resuelva la ecuación. Trace la gráfica de la parábola correspondiente para verificar la conclusión.

23. **(a)** $6x^2 - 11x - 10 = 0$ **(b)** $3x^2 - 4x = 3$
24. **(a)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **(b)** $4t^2 + 2t = 1$
25. **(a)** $25x^2 - 40x + 16 = 0$ **(b)** $3y = 2y^2 + 5$
26. **(a)** $14y^2 = 11y - 15$
    (b) $14y^2 + 11y - 15 = 0$

En los ejercicios 27 a 30, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

27. $\frac{x + 4}{x} = \frac{3x}{x + 2}$

28. $\dfrac{3t}{3t+4} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{t}{3t-4}$

29. $\dfrac{70}{y^2-4y+3} = \dfrac{23}{1-y} - 3$

30. $\dfrac{32}{x^2+3x+2} - 3 = \dfrac{x-3}{x+1}$

En los ejercicios 31 a 34 complete el cuadrado agregando un término a la expresión algebraica; escriba la expresión resultante como un binomio al cuadrado.

31. (a) $x^2 + 6x$ (b) $x^2 - 5x$

32. (a) $x^2 - 4x$ (b) $x^2 + 7x$

33. (a) $x^2 - \frac{2}{3}x$ (b) $x^2 + \frac{3}{5}x$

34. (a) $x^2 + \frac{4}{3}x$ (b) $x^2 - \frac{5}{6}x$

En los ejercicios 35 y 36, la gráfica de la ecuación es una circunferencia. Emplee el concepto de completación del cuadrado para escribir la ecuación en forma estándar: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; h, r y k son constantes.

35. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 13$

36. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 32y + 59 = 0$

En los ejercicios 37 y 38, la gráfica de la ecuación es una parábola. Emplee el concepto de completación del cuadrado para escribir la ecuación en forma estándar: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$; h, k y a son constantes.

37. $3x^2 - 6x - 5y + 13 = 0$

38. $x^2 - 4x - 16y + 52 = 0$

En los ejercicios 39 y 40, la gráfica de la ecuación es una elipse. Emplee el concepto de completación del cuadrado para escribir la ecuación en forma estándar: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; h, k, a y b son constantes.

39. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$

40. $16x^2 + 25y^2 + 96x - 100y + 228 = 0$

En los ejercicios 41 y 42, la gráfica de la ecuación es una hipérbola. Emplee el concepto de completación del cuadrado para escribir la ecuación en forma estándar: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; h, k, a y b son constantes.

41. $25x^2 - 4y^2 + 100x - 40y - 25 = 0$

42. $x^2 - 4y^2 - 2x + 32y - 99 = 0$

$\int\int \frac{dy}{dx}$ *En los ejercicios 43 a 46, emplee el concepto de completación del cuadrado para escribir la expresión indicada en la forma requerida; a y h son constantes, p es un entero positivo. Este procedimiento es necesario frecuentemente cuando se estudian técnicas de integración en Cálculo.*

43. Escribir $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$ en la forma $\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$

44. Escribir $\sqrt{65x - x^2}$ en la forma $\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$

45. Escribir $\sqrt{-4x^2 + 24x - 35}$ en la forma $p\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$

46. Escribir $\sqrt{36x^2 + 72x + 32}$ en la forma $p\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$

En los ejercicios 47 a 50, resuelva la fórmula para la variable indicada. Todas las variables representan un número positivo.

47. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; para r

48. $A = 2\pi r(r + h)$; para r

49. $F = \dfrac{kMv^2}{r}$; para v

50. $g = \dfrac{4\pi^2}{t^2}$; para t

En los ejercicios 51 a 54, resuelva para x en términos de los otros símbolos.

51. $5ax^2 - 3x - 2a = 0$

52. $6dx^2 - 3dx + 5 = 0$

53. $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 = 0$

54. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3y = 0$

55. La forma estándar de la ecuación de una parábola que tiene un eje vertical es $y = ax^2 + bx + c$. Resuelva para x en términos de y, a, b y c.

56. Si un polígono regular de 10 lados está inscrito en una circunferencia de radio r unidades y si s unidades es la longitud de un lado, entonces

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}$$

Resuelva esta fórmula para s en términos de r.

57. Un objeto es lanzado, desde el suelo, verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 128 pie/s. **(a)** A partir de la Ecuación (4), escriba una ecuación de movimiento del objeto. Encuentre algebraicamente: **(b)** la distancia que el objeto ha recorrido desde el suelo al final de 2 s; **(c)** ¿al final de cuántos segundos la distancia del objeto a la tierra es nuevamente la misma del inciso (b)?; **(d)**. ¿al final de cuántos segundos el objeto alcanza el suelo?

58. Trace, en la graficadora, la gráfica de la ecuación de movimiento del inciso (a) del ejercicio 57. A partir de la gráfica obtenida, resuelva los incisos (b) a (d) del ejercicio 57.

59. Si un objeto es lanzado linealmente hacia arriba, partiendo de un punto s_0 pies arriba del nivel del suelo con una velocidad de v_0 pies por segundo; entonces si s pies es la distancia del objeto al piso, ésta será, después de t segundos de ser lanzado,

$$s = -16t^2 + v_0t + s_0$$

(a) Emplee esta ecuación para escribir una ecuación de movimiento de una pelota lanzada desde la orilla de una azotea a 68 pie arriba del suelo con una velocidad inicial de 76 pie/s. **(b)** Trace la gráfica de la ecuación del inciso (a). **(c)** A partir de la gráfica del inciso (b), determine la altura de la pelota arriba del piso al final de 2 s. **(d)** De la gráfica, ¿al final de cuántos segundos estará la pelota cayendo pero a la misma distancia del piso, como en el inciso (c)? **(e)** De la misma gráfica, ¿al final de cuántos segundos estará la pelota en su caída pasando por la orilla de la azotea? De la gráfica, ¿al final de cuántos segundos llega la pelota al piso?

60. Determine algebraicamente las respuestas los incisos (c) a (f) del ejercicio 59.

61. En Cálculo, aprenderá que si un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, con velocidad inicial de v_0 pies por segundo, entonces segundos, después de que es lanzado, la velocidad del objeto es v pies por segundo donde

$$v = -32t + v_0$$

Discuta cómo utilizar esta ecuación y la Ecuación (4) para determinar ¿cuántos segundos pasará para que el objeto alcance la altura máxima? ¿qué tan alto llegará el objeto?

62. Empleando el método descrito en el ejercicio 61 y la ecuación para v del mencionado ejercicio, determine ¿cuánto tiempo tardará la pelota del ejemplo 7 para alcanzar la máxima altura?, y ¿qué tan alto llegará la pelota?

63. En su trabajo del siglo IX, *ilm al-jabr w'al muqabalah*, Al-Khowarizmi describió completamente, en árabe, la solución de las ecuaciones cuadráticas mediante la completación del cuadrado. Haga lo mismo, en español, para la ecuación cuadrática

$$3x^2 + 6x - 7 = 0$$

2.3 ECUACIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

OBJETIVOS

1. **Determinar una ecuación como modelo matemático del enunciado de un problema.**
2. **Estimar la solución de un modelo matemático en una calculadora gráfica o graficadora.**
3. **Resolver algebraicamente un modelo matemático.**
4. **Escribir una conclusión para la resolución del problema.**

En muchas de las aplicaciones del álgebra, los *enunciados de los problemas* nos proporcionan las relaciones entre números conocidos y

ros desconocidos, los cuales deben ser determinados. La resolución de problemas fortalece no sólo la destreza matemática, sino también las habilidades de lectura y escritura. En esta sección resolveremos problemas empleando ecuaciones como modelos matemáticos de éstos. Con anterioridad se ha tenido contacto con este proceso en la Sección 2.1.

Aunque no siempre se usa un método específico para obtener un modelo matemático, a continuación se dan algunas etapas para un posible procedimiento a seguir, como se observará a través de los ejemplos, se hará referencia a estas etapas para indicar cómo se aplican.

Sugerencias para obtener una ecuación como modelo matemático

1. Leer con cuidado el problema hasta su total comprensión. Para un mejor entendimiento, es frecuentemente útil caracterizar un ejemplo específico que implique una situación semejante en la cual todas las cantidades son conocidas. De ser posible, también es útil dibujar un diagrama tal como se muestra en los ejemplos 1, 3 y 4.
2. Determinar las cantidades conocidas y desconocidas. Emplear una variable para representar cada una de las cantidades desconocidas en la ecuación que se obtendrá. Cuando se utiliza una sola ecuación, cualquier otra cantidad desconocida deberá expresarse en términos de una variable. Debido a que la variable representa un número, la definición de la variable deberá indicar este hecho. Por ejemplo, si la cantidad desconocida es tiempo, y el tiempo está medido en segundos, entonces t deberá estar definido como el número de segundos, o de manera equivalente, t segundos es el tiempo.
3. Anotar cualquier dato numérico conocido acerca de la variable. En muchos de los enunciados de problemas, estos datos pueden ser incorporados en una tabla, como se indica en los ejemplos 2 y 3.
4. A partir de la información disponible en la etapa 3, determinar dos expresiones algebraicas para el mismo número y plantear una ecuación a partir de éstas. El uso de una tabla, como la recomendada en la etapa 3, le ayudará a descubrir expresiones algebraicas iguales.

Siguiendo los pasos anteriores se tendrá un modelo matemático del problema.

Para completar el problema, una vez que se dispone de un modelo matemático, se deberán seguir los pasos siguientes:

5. Encontrar el conjunto solución de la ecuación obtenida como modelo matemático.
6. Comprobar sus soluciones determinando si se satisfacen las condiciones del problema. Esta comprobación verifica la exactitud de la ecuación obtenida en la etapa 4, así como la exactitud de su conjunto solución.
7. Escribir una conclusión que contenga una o más oraciones completas sobre las respuestas a las preguntas del problema. Por ejemplo, supóngase que el problema requiere que calcule la longitud de un rectángulo, y la variable x está definida como x pies de longitud. Entonces, si el conjunto solución es $\{5\}$, su conclusión puede ser: la longitud del rectángulo es 5 pie.

Téngase en mente que la ecuación obtenida como modelo matemático es una igualdad de números. Así que no aparecen las unidades de medida en el conjunto solución de la ecuación. Sin embargo, estas unidades están incluidas en la definición de la variable, tal como se indica en la etapa 2. Las unidades también deberán aparecer en la conclusión de la etapa 7.

► EJEMPLO 1 *Resolución de un problema con una ecuación lineal como modelo matemático*

Un rectángulo tiene un largo de 3 cm menos que cuatro veces su ancho, y su perímetro es 19 cm, ¿cuáles son sus dimensiones?

Solución Se desea determinar el número de centímetros de cada lado del rectángulo. A continuación se emplea una variable para representar estos números.

w: es el número de centímetros que mide el ancho del rectángulo.

$4w - 3$: es el número de centímetros que mide el largo del rectángulo.

Con referencia a la Figura 2.13. El perímetro del rectángulo es la distancia total alrededor de él. Por tanto, el número de centímetros en el perímetro puede ser representado por cualquiera de las dos expresiones siguientes

$$w + (4w - 3) + w + (4w - 3)$$

o 19; por tanto, se tiene la ecuación

$$w + (4w - 3) + w + (4w - 3) = 19$$

$$10w - 6 = 19$$

$$10w = 25$$

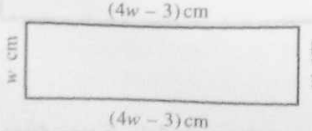


FIGURA 2.13

$$w = \frac{5}{2} \qquad 4w - 3 = 4\left(\frac{5}{2}\right) - 3$$
$$= 7$$

Comprobación: Si el ancho del rectángulo es 2.5 cm y el largo es 7 cm, el perímetro es (2.5 + 7 + 2.5 + 7) cm, lo cual es igual a 19.*

Conclusión: El ancho del rectángulo es 2.5 cm y el largo es 7 cm. ◄

El enunciado del problema en el ejemplo siguiente puede clasificarse como un **problema de inversiones,** debido a que implica el rédito de una inversión. El rédito puede estar en la forma de interés, y en ese caso se usará la fórmula

$$I = P \cdot R$$

donde I dólares es la ganancia anual cuando se han invertido P dólares con una tasa anual R. La tasa generalmente está dada como un porcentaje; así que si la tasa es 8%, entonces $R = 0.08$.

► EJEMPLO 2 *Encontrar una ecuación lineal como modelo matemático de un problema, cuya solución se determinará en una graficadora, así como algebraicamente*

Una mujer tiene $15 000 (dólares) invertidos en dos cuentas de las que ella recibe una ganancia anual de $1 456. Si la inversión riesgosa paga 12% anual y la otra paga 8%, determine qué cantidad tiene invertida con cada tasa, haciendo lo siguiente: **(a)** encuentre una ecuación lineal como modelo matemático de la situación; **(b)** estime la solución de la ecuación en una graficadora; **(c)** resuelva la ecuación algebraicamente, y **(d)** escriba la conclusión.

Solución

(a) Para determinar el número de dólares que ella ha invertido en cada tasa, se definen estos números.

x: número de dólares invertidos a 12%.

15 000 – x: número de dólares invertidos a 8%.

Al emplear la fórmula $I = P \cdot R$, se obtiene la Tabla 1.

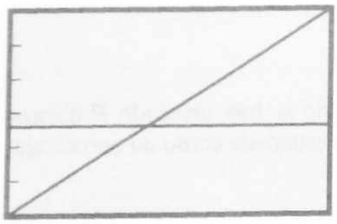
* N. de R. La solución del problema es correcta, pero también debe verificarse la solución en la primera relación, la cual establece que el cuádruplo del ancho disminuido en 3 es igual al largo, numéricamente esto se expresa como 4(2.5) – 3 = 7, lo cual también es cierto.

Tabla 1

	Número de dólares invertidos	×	*Tasa*	=	*Número de dólares en interés*
Inversión al 12%	x		0.12		$0.12x$
Inversión al 8%	$15\,000 - x$		0.08		$0.08(15\,000 - x)$

En virtud de que la entrada anual de las dos inversiones es \$1 456, entonces la suma de las cantidades de la última columna de la tabla es 1 456. Por tanto, se tiene la ecuación siguiente

$$0.12x + 0.08(15\,000 - x) = 1\,456$$



[0, 15 000] por [1 200, 1 800]
$y_1 = 0.12x + 0.08(15\,000 - x)$
y $y_2 = 1\,456$
FIGURA 2.14

(b) En la calculadora gráfica, se considera

$$y_1 = 0.12x + 0.08(15\,000 - x) \qquad \text{y} \qquad y_2 = 1\,456$$

Se necesita determinar los valores permitidos para x y y_1. Cuando todo el dinero se invierte a 8%, x es cero y y_1 es $0.08(15\,000)$, lo que es igual a 1 200. Si todo el dinero se invierte a 12%, x es 15 000 y y_1 es $0.12(15\,000)$, lo que es igual a 1 800. Debido a que $0 \le x \le 15\,000$ y $1\,200 \le y_1 \le 1\,800$, se selecciona [0, 15 000] por [1 200, 1 800] como rectángulo de inspección. *Véase* la Figura 2.14, con el aumento de la zona, se estima la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas como 6 400.

(c) Al resolver la ecuación algebraicamente, se tiene,

$$\begin{aligned} 0.12x + 0.08(15\,000 - x) &= 1\,456 \\ 0.12x + 1\,200 - 0.08x &= 1\,456 \\ 0.04x &= 256 \\ x &= 6\,400 \end{aligned}$$

Este valor de x está de acuerdo con el valor estimado en el inciso (b). Cuando $x = 6\,400$, $15\,000 - x = 8\,600$.

Comprobación: Con $x = 6\,400$, el número de dólares en el interés anual de la inversión a 12%, se tiene un interés de $0.12(6\,400) = 768$. Con $15\,000 - x = 8\,600$, el número de dólares en el interés anual de la inversión a 8%, se consigue una ganancia de $0.08(8\,600) = 688$. La solución es correcta debido a que $768 + 688 = 1\,456$.

(d) **Conclusión:** La mujer tiene \$6 400 invertidos a 12% y \$8 600 a 8%.* ◄

Un **problema de mezclas** puede implicar la mezcla de soluciones que contengan diferentes porcentajes de una sustancia para obtener una solución que posea cierta cantidad de la sustancia en cuestión. En el ejemplo siguiente, un químico desea obtener 6 L de una solución ácida al 10% mezclando una solución ácida al 7% con una solución ácida al 12%. Otro tipo de problemas de mezclas en los que el método de resolución es similar, implica mezclar cosas de diferente valor para obtener una combinación con un valor determinado de dinero. Un problema de este tipo aparece en el ejercicio 12.

► EJEMPLO 3 *Encontrar una ecuación lineal como modelo matemático de un problema, cuya solución se estimará en una graficadora, así como algebraicamente*

Un químico desea obtener 6 L (litros) al 10% de una solución ácida mezclando dos soluciones ácidas de 7 y 12%, respectivamente. Determine cuánto de cada solución deberá usar el químico, haciendo lo siguiente: **(a)** encuentre una ecuación como modelo matemático de la situación; **(b)** estime la solución de la ecuación en una graficadora; y **(c)** resuelva la ecuación algebraicamente. **(d)** Escriba la conclusión.

Solución

(a) Se desea determinar el número de litros de cada solución que debe utilizar el químico. Defina estos números.

x: el número de litros de la solución ácida al 7%.

$6 - x$: el número de litros de la solución ácida al 12%.

El diagrama de la Figura 2.15 proporciona una interpretación visual del problema, la información que aparece está incorporada en la Tabla 2.

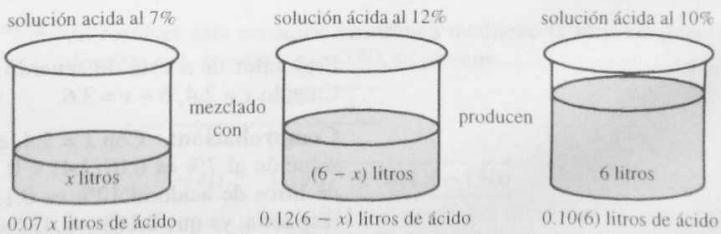


FIGURA 2.15

* **N. de R.** También debe comprobarse la solución en la primera relación, la cual establece que el capital de la señora es de 15 000 dólares, numéricamente se tiene que 6 400 + 8 600 = 15 000, lo cual es cierto.

Tabla 2

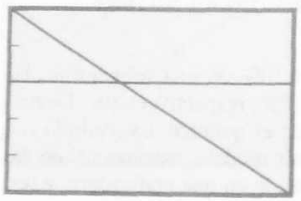
	Porcentaje de ácido	×	*Número de litros de solución*	=	*Número de litros de ácido*
Solución ácida al 7%	7%		x		$0.07x$
Solución ácida al 12%	12%		$6 - x$		$0.12(6 - x)$
Mezcla	10%		6		0.60

En la última columna de la tabla, se observa que el número total de litros de ácido en la mezcla puede ser representado por 0.60 o por $0.07x + 0.12(6 - x)$. Así que se tiene la ecuación

$$0.07x + 0.12(6 - x) = 0.60$$

(b) En la graficadora se considera

$$y_1 = 0.07x + 0.12(6 - x) \quad \text{y} \quad y_2 = 0.60$$



[0.6] por [0.42, 0.72]
$y_1 = 10.07x + 0.12(6 - x)$ y $y_2 = 0.60$
FIGURA 2.16

Se requiere determinar los valores permitidos para x y y_1. Si el químico emplea sólo solución ácida al 12%, x es cero y y_1 es $0.12(6)$, lo cual es 0.72. Cuando el químico utiliza únicamente la solución ácida al 7%, x es 6 y $y_1 = 0.07\ (6)$, lo que es igual a 0.42. Debido a que $0 \le x \le 6$ y $0.42 \le y_1 \le 0.72$, se selecciona [0, 6] por [0.42, 0.72] como rectángulo de inspección. *Véase* Figura 2.16. Por medio del aumento de la graficadora, se estima la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas como 2.4.

(c) Al resolver la ecuación algebraicamente se obtiene

$$\begin{aligned} 0.07x + 0.12(6 - x) &= 0.60 \\ 0.07x + 0.72 - 0.12x &= 0.60 \\ -0.05x &= 0.60 - 0.72 \\ -0.05x &= -0.12 \\ x &= \frac{-0.12}{-0.05} \\ x &= 2.4 \end{aligned}$$

Este valor de x está de acuerdo con el estimado en la parte (b). Cuando $x = 2.4$, $6 - x = 3.6$.

Comprobación: Con $x = 2.4$, el número de litros de ácido de la solución al 7% es $0.07(2.4) = 0.168$. Con $6 - x = 3.6$, el número de litros de ácido al 12% es $0.12(3.6) = 0.432$. Se comprueba la respuesta, ya que $0.168 + 0.432 = 0.60$.

(d) **Conclusión:** El químico deberá emplear 2.4 L de la solución ácida al 7% y 3.6 L de la solución ácida al 12 %.*

* **N. de R.** La solución es correcta. Sin embargo, también debe comprobarse en la primera relación, la cual establece que el total de la solución debe ser 6 L, lo cual cumple la solución presentada.

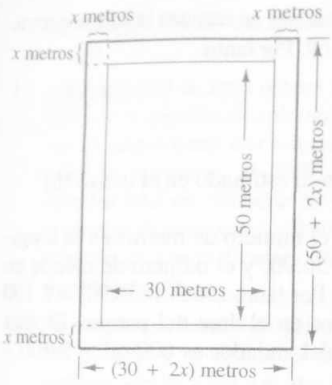
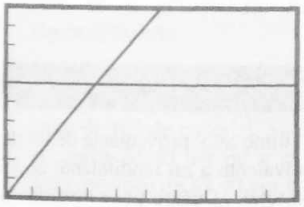


FIGURA 2.17



[0, 10] por [0, 1 000]
$y_1 = (50 + 2x)(30 + 2x) - 1\,500$
y $y_2 = 600$

FIGURA 2.18

► EJEMPLO 4

Encontrar una ecuación cuadrática como modelo matemático de un problema, cuya solución se determinará en una graficadora, así como algebraicamente

Un parque posee un jardín de flores de 50 m de largo y 30 m de ancho, y un andador de ancho constante a su alrededor cuya área es de 600 m^2. Calcule el ancho del andador haciendo lo siguiente: **(a)** determine una ecuación como modelo matemático de la situación; **(b)** estime la solución de la ecuación en una graficadora, y **(c)** resuelva la ecuación algebraicamente. **(d)** Escriba la conclusión.

Solución

(a) Se inicia definiendo el número que se desea determinar.

x: el número de metros de ancho del andador.

Con respecto a la Figura 2.17. El área del parque menos el área del jardín es igual al área del andador; así que se tiene la ecuación

$$(50 + 2x)(30 + 2x) - 1\,500 = 600$$

(b) En la graficadora se considera

$$y_1 = (50 + 2x)(30 + 2x) - 1\,500 \quad \text{y} \quad y_2 = 600$$

Es razonable suponer que $0 \le x \le 10$. Dado que $y_2 = 600$, un intervalo adecuado para y es [0, 1 000]. Por tanto se selecciona [0, 10] por [0, 1 000] como el rectángulo de inspección. La Figura 2.18 muestra las gráficas de y_1 y y_2 trazadas en este rectángulo de inspección. Al aumentar la zona se estima la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas como 3.45.

(c) Se resolverá la ecuación algebraicamente.

$$(50 + 2x)(30 + 2x) - 1\,500 = 600$$
$$1\,500 + 160x + 4x^2 - 1\,500 = 600$$
$$4x^2 + 160x - 600 = 0$$
$$x^2 + 40x - 150 = 0$$

Al resolver esta ecuación cuadrática mediante la fórmula general, donde $a = 1$, $b = 40$ y $c = -150$, se obtiene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-40 \pm \sqrt{(40)^2 - 4(1)(-150)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-40 \pm \sqrt{2200}}{2}$$
$$= \frac{-40 \pm 10\sqrt{22}}{2}$$
$$= -20 \pm 5\sqrt{22}$$

Dado que x debe ser un número positivo, se rechaza la raíz negativa. Para dos cifras decimales $\sqrt{22} \approx 4.69$. Por tanto

$$x \approx -20 + 5(4.69)$$
$$\approx 3.45$$

Esta respuesta está de acuerdo con lo estimado en el inciso (b).

Comprobación: Con $x = 3.45$, el número de metros en la longitud del parque es $50 + 2(3.45) = 56.90$, y el número de metros en el ancho es $30 + 2(3.45) = 36.90$. Por tanto $(56.90)(36.90) = 2\,100$ es el número de metros cuadrados en el área del parque. El área del jardín es 1 500 m^2, y el área del andador es 600 m^2; y $2\,100 - 1\,500 = 600$.

(d) **Conclusión:** El ancho del andador es 3.45 m.

EJERCICIOS 2.3

En cada ejercicio resuelva el problema empleando una ecuación como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio escribiendo una conclusión.

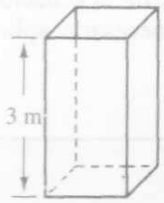
1. La suma de dos números es 9 y su diferencia es 6. ¿Cuáles son los números?
2. Encuentre dos números cuya suma es 7 y uno de los cuales es tres veces mayor que el otro.
3. El ancho de un rectángulo es 2 cm mayor que la mitad de su largo y su perímetro es 40 cm. ¿Cuáles son las dimensiones?
4. El lado más largo de un triángulo es el doble de la longitud del lado más corto y 2 cm mayor que el tercer lado. El perímetro del triángulo es 33 cm. ¿Cuáles son las longitudes de cada lado?
5. Los boletos de admisión a una sala cinematográfica costaron \$ 6 para adultos y \$ 4.50 para estudiantes. Si se vendieron 810 boletos y el total recaudado fue de \$ 4 279.50, ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?
6. Un inversionista desea ganar 12% sobre el total de dos inversiones. Si él invierte \$10 000 al 10%, ¿qué cantidad adicional de dinero deberá invertir a 16%?
7. Una mujer invierte \$25 000 en dos negocios riesgosos, en el último año tuvo una utilidad de 15% del primer negocio, pero perdió 5% en el segundo. Su ingreso en el último año, proveniente de los dos negocios, fue equivalente a un rendimiento de 8% sobre la inversión total. ¿Cuánto tiene invertido en cada negocio? Estime la solución de la ecuación obtenida en la graficadora. Después, resuelva la ecuación algebraicamente.
8. Un comerciante al menudeo invirtió \$6 500 en tres tipos de cámaras. La ganancia de venta de las cámaras A fue de 25%, en la venta de las cámaras B, la ganancia fue de 12%; y hubo pérdida de 10% en la venta de las cámaras C. El comerciante invirtió cantidades iguales en las cámaras A y B y la ganancia global sobre la inversión total fue de 14%. ¿Cuánto se invirtió en cada tipo de cámara? Estime la solución de la ecuación en la graficadora. Después, resuelva la ecuación algebraicamente.
9. Un orfebre obtuvo 40 g de una aleación que contiene 70% de oro combinando una aleación que posee 80% de oro con otra aleación que tiene 55% de oro. ¿Cuántos gramos de cada aleación combinó el orfebre? Estime la solución de la ecuación empleando una graficadora. Después, resuelva la ecuación algebraicamente.
10. Determine cuánta agua se requiere para diluir 15 litros de una solución al 15% de colorante, hasta obtener una solución al 5% de colorante. Estime la solución de la ecuación en la graficadora, y pos-

teriormente resuelva la ecuación de manera algebraica.

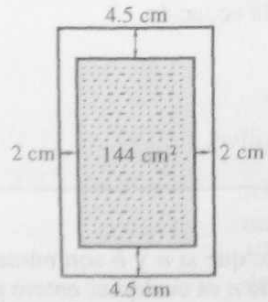
11. ¿Qué cantidad de agua deberá ser evaporada de 15 litros de la solución de colorante al 12% del ejercicio 10, para obtener una solución en la que el colorante se encuentre al 20%? Considere que la cantidad total de colorante no se vea afectada por el proceso de evaporación. Estime la solución de la ecuación en una graficadora. Resuelva la ecuación algebraicamente.

12. Se prepara una mezcla de perfume para venderse a $80 la onza, y se obtiene al mezclar dos tipos de perfume, uno de $104 y el otro de $50 la onza, respectivamente. Si se desea obtener 270 oz de la mezcla, ¿qué cantidad de cada tipo de perfume deberá ser utilizada? Estime la solución de la ecuación en la graficadora. Resuelva la ecuación algebraicamente.

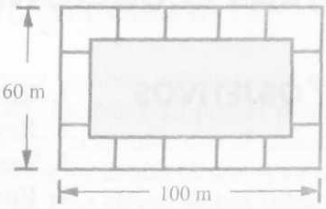
13. Un depósito abierto con fondo cuadrado, lados rectangulares y una altura de 3 m es construido con un costo de $63 de material. Si el material para el fondo cuesta $5.40 por m^2 y el material de los lados tiene un costo de $2.40 por m^2. ¿Cuál deberá ser el volumen del depósito? Estime la solución de la ecuación en la graficadora y resuelva la ecuación de forma algebraica.



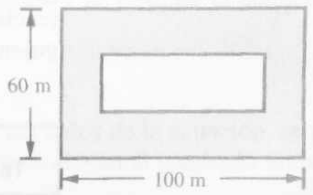
14. Una página de 144 cm^2 de región impresa tiene un margen de 4.5 cm en las partes superior e inferior de la hoja y un margen de 2 cm en los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la página, si su ancho es cuatro novenos de su longitud? Estime la solución de la ecuación en la graficadora, y resuelva la ecuación algebraicamente.



15. Un parque de forma rectangular con dimensiones de 60 m por 100 m contiene un jardín rectangular limitado por una terraza de ancho uniforme. Si el área del jardín es la mitad del área del parque, ¿cuál es el ancho de la terraza? Estime la solución de la ecuación en la graficadora y resuelva la ecuación de manera algebraica.



16. ¿Cuál es el ancho de la faja alrededor de un terreno de 100 m de largo por 60 m de ancho que deberá ser arada para que esta parte corresponda a las dos terceras partes del área del terreno? Estime la solución de la ecuación en la graficadora y resuelva la ecuación algebraicamente.



17. Cada estudiante de nuevo ingreso en una escuela particular requiere sustentar una prueba de aptitud en el idioma inglés. Un estudiante que aprueba el examen se inscribe en el curso de redacción (avanzado) y uno que no aprobó se inscribe en el curso de inglés básico. En una generación de 1 240 estudiantes de nuevo ingreso hay más alumnos inscritos en inglés básico que en redacción (avanzado). Sin embargo, si 30 estudiantes más hubieran aprobado el examen, ambos cursos tendrían la misma cantidad de alumnos. ¿Cuántos estudiantes tiene cada curso?

18. El día de campo anual de los alumnos de segundo año es planeado por un comité de 17 miembros. Un

voto para determinar si el día de campo se lleva a cabo en la playa o en las montañas dio la victoria para hacerlo en la playa. Sin embargo, si dos miembros del comité cambian su voto de la playa para favorecer a la montaña, la montaña gana por un voto. ¿Cuántos votos recibió cada lugar?

19. La suma de los recíprocos de dos números pares consecutivos es $\frac{9}{40}$. ¿Cuáles son los números?

20. ¿Existen dos números pares consecutivos, cuya suma de recíprocos es $\frac{8}{45}$? Si la respuesta es afirmativa, encuéntrelos. Si su respuesta es negativa explique cómo llegó a esa conclusión.

2.4 OTRAS ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

OBJETIVOS

1. **Resolver algebraicamente ecuaciones que contienen radicales.**
2. **Resolver gráficamente ecuaciones que contienen radicales.**
3. **Resolver ecuaciones en forma cuadrática.**
4. **Encontrar soluciones exactas para algunas ecuaciones particulares de grado mayor que 2.**
5. **Emplear una graficadora para encontrar valores aproximados de raíces irracionales de ecuaciones cúbicas.**
6. **Resolver gráficamente problemas que tengan una ecuación cúbica como modelo matemático.**

Si una ecuación algebraica contiene radicales o exponentes racionales, puede resolverse elevando ambos lados de la ecuación a la misma potencia entera, cuando se hace esto, es necesario aplicar el teorema siguiente.

TEOREMA 1

Si E y F son expresiones algebraicas, entonces

$$E = F$$

es una ecuación algebraica, y su conjunto solución es un subconjunto del conjunto solución de la ecuación

$$E^n = F^n$$

donde n es cualquier entero positivo.

El teorema es consecuencia de que si a y b son números complejos y $a = b$, entonces $a^n = b^n$, donde n es cualquier entero positivo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La ecuación

$$x = 5$$

Tiene el conjunto solución $\{5\}$. Si se elevan al cuadrado ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$x^2 = 25$$

la cual tiene el conjunto solución $\{\pm 5\}$. El conjunto solución de la primera ecuación es un subconjunto del conjunto solución de la segunda. Este resultado está de acuerdo con el Teorema 1. ◀

El Teorema 1 se emplea para resolver una ecuación que contiene términos que implican uno o más radicales. El primer paso es obtener una ecuación equivalente que tenga el término con el radical más complicado en uno de los lados y todos los demás términos en el otro lado. Por lo que, aplicando el Teorema 1, se elevan ambos lados de la ecuación a la potencia correspondiente al índice del radical aislado.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

A fin de resolver la ecuación

$$\sqrt{2x + 5} + x = 5$$

primero se suma $-x$ a ambos lados y se obtiene la ecuación equivalente

$$\sqrt{2x + 5} = 5 - x \tag{1}$$

Ahora con el radical en uno de los lados de la ecuación, se puede aplicar el Teorema 1 con $n = 2$, y si se elevan al cuadrado ambos lados se obtiene

$$(\sqrt{2x + 5})^2 = (5 - x)^2$$

$$2x + 5 = 25 - 10x + x^2 \tag{2}$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$(x - 10)(x - 2) = 0$$

$$x - 10 = 0 \qquad x - 2 = 0$$

$$x = 10 \qquad x = 2$$

Así, el conjunto solución de (2) es $\{2, 10\}$. De acuerdo con el Teorema 1, el conjunto solución de la Ecuación (1) es un subconjunto de $\{2, 10\}$; esto es, los dos números 2 y 10 pueden ser soluciones, sólo uno de ellos, o bien, ninguno es solución. Para determinar cuál de los tres

casos es aplicable, se sustituye cada solución en (1) para ver si la ecuación se satisface.

$$\sqrt{2(2)+5} \stackrel{?}{=} 5-2 \qquad \sqrt{2(10)+5} \stackrel{?}{=} 5-10$$
$$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 3 \qquad \sqrt{25} \stackrel{?}{=} -5$$
$$3 = 3 \qquad 5 \neq -5$$

De lo anterior, se observa que 2 es una solución y 10 no lo es, por tanto, el conjunto solución en (1) es $\{2\}$.

Si se traza la gráfica de $y = \sqrt{2x+5} + x - 5$, se podrá observar que 2 es la única intercepción x.

En el ejemplo ilustrativo 2, al número 10 se le llama **solución extraña** de la Ecuación (1); la cual resultó cuando ambos miembros se elevaron al cuadrado. La razón de que esta solución extraña haya aparecido será evidente después de leer el ejemplo ilustrativo 3.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Si ambos miembros de la ecuación

$$-\sqrt{2x+5} = 5 - x \tag{3}$$

se elevan al cuadrado, se obtiene

$$(-\sqrt{2x+5})^2 = (5-x)^2$$
$$2x + 5 = 25 - 10x + x^2$$

esta última expresión es igual a la Ecuación (2). En el ejemplo ilustrativo 2 se ha demostrado que el conjunto solución de la Ecuación (2) es $\{2, 10\}$. Por lo que, de acuerdo con el Teorema 1, el conjunto solución de la Ecuación (3) es un subconjunto de $\{2, 10\}$. Sustituyendo estos dos números en la Ecuación (1), se tiene

$$-\sqrt{2(2)+5} \stackrel{?}{=} 5-2 \qquad -\sqrt{2(10)+5} \stackrel{?}{=} 5-10$$
$$-\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 3 \qquad -\sqrt{25} \stackrel{?}{=} -5$$
$$-3 \neq 3 \qquad -5 = -5$$

Por lo que 10 es una solución y 2 es una solución extraña, el conjunto solución para la Ecuación (3) es, por tanto, $\{10\}$.

Al trazar la gráfica de $y = -\sqrt{2x+5} + x - 5$ se observa que 10 es la única intercepción x.

Obsérvese en el ejemplo ilustrativo 2 que la Ecuación (1) condiciona que la raíz cuadrada principal de $2x + 5$ es $5 - x$. Así que cuando se elevan al cuadrado ambos lados de la ecuación, se obtiene la Ecua-

ción (2), por lo que en cada caso se introduce una raíz extraña. Esta discusión deberá convencernos de que si se aplica el Teorema 1, todas las soluciones encontradas deberán ser comprobadas en la ecuación original. La comprobación que se realice será para detectar soluciones extrañas, no para hallar errores de cálculo.

Si una ecuación contiene más de un radical, algunas veces es necesario aplicar el Teorema 1 más de una vez antes de obtener una ecuación libre de radicales.

► **EJEMPLO 1** ***Resolución de una ecuación que contiene radicales***

Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} - 2 = 0$$

Solución Primero se escribe una ecuación equivalente en la cual un radical quede aislado en uno de los lados. Posteriormente, al aplicar el Teorema 1 se obtiene otra ecuación que contiene un radical. A esta nueva ecuación se le aplica el mismo procedimiento.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x + 3} &= \sqrt{x - 2} + 2 \\
(\sqrt{2x + 3})^2 &= (\sqrt{x - 2} + 2)^2 \\
2x + 3 &= x - 2 + 4\sqrt{x - 2} + 4 \\
x + 1 &= 4\sqrt{x - 2} \\
(x + 1)^2 &= 16(\sqrt{x - 2})^2 \\
x^2 + 2x + 1 &= 16(x - 2) \\
x^2 + 2x + 1 &= 16x - 32 \\
x^2 - 14x + 33 &= 0 \\
(x - 3)(x - 11) &= 0 \\
x - 3 = 0 \quad & \quad x - 11 = 0 \\
x = 3 \quad & \quad x = 11
\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación dada es un subconjunto de $\{3, 11\}$. Se sustituyen estos números en la ecuación dada.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2(3) + 3} - \sqrt{3 - 2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
\sqrt{9} - \sqrt{1} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
3 - 1 - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2(11) + 3} - \sqrt{11 - 2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
\sqrt{25} - \sqrt{9} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
5 - 3 - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Los números 3 y 11 son soluciones de la ecuación dada, por lo que el conjunto solución es $\{3, 11\}$. ◄

Es posible comprobar las soluciones en el ejemplo 1 trazando la gráfica de $y = \sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} - 2$ en el rectángulo de inspección [0, 15] por [–1, 1], con una escala en x de 1 y la escala en y de 0.1. Las intercepciones x son 3 y 11.

La ecuación

$$\sqrt{3 - 3x} - \sqrt{3x + 2} - 3 = 0$$

es similar a la ecuación del ejemplo 1, porque también tiene dos radicales; sin embargo, la similitud termina debido a que esta ecuación no tiene soluciones, por esto su conjunto solución es $\varnothing$. En el ejercicio 37 se pide que se demuestre lo anterior. Observe en la graficadora que la gráfica de $y = \sqrt{3 - 3x} - \sqrt{3x + 2} - 3$ no intersecta al eje x.

Una ecuación en una sola variable x se dice que está en **forma cuadrática** si puede escribirse como

$$au^2 + bu + c = 0$$

donde $a \neq 0$ y u es una expresión algebraica en x.

En los dos ejemplos siguientes se resolverán ecuaciones en forma cuadrática.

► EJEMPLO 2 *Resolver una ecuación en forma cuadrática*

Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$x^4 - 2x^2 - 15 = 0$$

Solución Esta ecuación es cuadrática en x^2, ya que si $u = x^2$, la ecuación se convierte en

$$u^2 - 2u - 15 = 0$$

Si se resuelve esta ecuación para u se tiene

$$(u - 5)(u + 3) = 0$$

$$u - 5 = 0 \qquad u + 3 = 0$$

$$u = 5 \qquad u = -3$$

Ahora sustituya u por x^2 y resuelva las ecuaciones resultantes.

$$x^2 = 5 \qquad x^2 = -3$$

$$x = \pm\sqrt{5} \qquad x = \pm i\sqrt{3}$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación original es $\{\pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{3}\}$.

▸ EJEMPLO 3 *Resolver una ecuación en forma cuadrática*

Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$2x^{2/3} - 5x^{1/3} - 3 = 0$$

Solución Ésta es una ecuación cuadrática en $x^{1/3}$. Si $u = x^{1/3}$ se tiene

$$2u^2 - 5u - 3 = 0$$
$$(2u + 1)(u - 3) = 0$$
$$2u + 1 = 0 \qquad u - 3 = 0$$
$$u = -\frac{1}{2} \qquad u = 3$$

Si se sustituye u por $x^{1/3}$, se llega a

$$x^{1/3} = -\frac{1}{2} \qquad x^{1/3} = 3$$
$$(x^{1/3})^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \qquad (x^{1/3})^3 = 3^3$$
$$x = -\frac{1}{8} \qquad x = 27$$

El conjunto solución de la ecuación original es $\{-\frac{1}{8}, 27\}$. ◂

Se han resuelto ecuaciones cuadráticas en forma estándar por factorización, en donde cada factor se iguala a cero. Este procedimiento se puede emplear para resolver ecuaciones de grado mayor, en el ejemplo 2 se ha resuelto la ecuación

$$x^4 - 2x^2 - 15 = 0$$

considerando $u = x^2$. Un método alternativo puede ser si factoriza el lado izquierdo

$$(x^2 - 5)(x^2 + 3) = 0$$

e igualando a cero cada factor cero, se obtiene

$$x^2 - 5 = 0 \qquad x^2 + 3 = 0$$

De las soluciones de las ecuaciones anteriores se obtiene el conjunto solución de la ecuación original. En el ejemplo siguiente se aplica el mismo método a una ecuación de tercer grado.

▸ EJEMPLO 4 *Determinación de las soluciones exactas de una ecuación particular de grado mayor que 2*

Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$x^3 = 8$$

Solución La ecuación anterior es equivalente a

$$x^3 - 8 = 0$$

Recuerde que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Si emplea esta fórmula donde $a = x$ y $b = 2$, se puede factorizar el lado izquierdo para obtener

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

Al igualar cada factor a cero y resolver las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$x - 2 = 0 \qquad x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x = 2 \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -1 \pm i\sqrt{3}$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación original es $\{2, -1 \pm i\sqrt{3}\}$.

Observe que en la graficadora la gráfica de $y = x^3 - 8$ interseca al eje x únicamente en el punto $(2, 0)$.

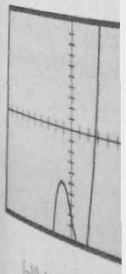
En el ejemplo 4, como $x^3 = 8$, x es una raíz cúbica de 8. Las soluciones son, por tanto, las raíces cúbicas de 8; una raíz es real y dos son imaginarias. Esta ecuación es un ejemplo de una ecuación polinomial de tercer grado, o *ecuación cúbica*.

La **ecuación cúbica** general en la variable x es

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Donde a_3, a_2, a_1 y a_0 son números reales constantes y $a_3 \neq 0$. Cada ecuación cúbica tiene tres raíces porque el Teorema 2 de la Sección 5.4, garantiza que una ecuación polinomial de grado n, tiene exactamente n raíces. Aun cuando se sabe que existen fórmulas para las raíces exactas de una ecuación cúbica, así como para una ecuación de cuarto grado, estas fórmulas son complicadas y no se introducen en esta obra. Sin embargo, para cualquier ecuación cúbica que tenga al menos una raíz racional, las raíces exactas se pueden encontrar fácilmente empleando los métodos discutidos en la Sección 5.3. Se verá el caso particular de una ecuación, como la del ejemplo 4, donde se encuentran valores exactos de las raíces debido a que se pudo factorizar $x^3 - 8$ como la diferencia de dos cubos.

Si una ecuación cúbica tiene raíces no racionales, al menos tiene una raíz irracional. Esto es consecuencia del Teorema 4 de la Sección 5.4, el cual garantiza que cualquier ecuación polinomial, cuyo grado es un número impar, tiene al menos una raíz real. En el ejemplo siguiente



[−10, 10] por [−10, 10]
$y = x^3 - 4x - 8$
FIGURA 2.19

se usará la ampliación en una graficadora para aproximar una raíz irracional de una ecuación cúbica.

▸ EJEMPLO 5 *Aproximación del valor de una raíz irracional de una ecuación cúbica en una graficadora*

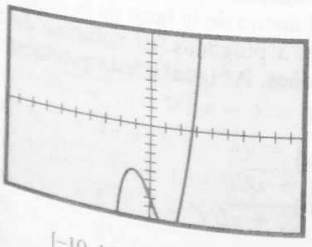
Mediante una graficadora, determine el valor aproximado hasta centésimos de la raíz positiva de la ecuación

$$x^3 = 4x + 8$$

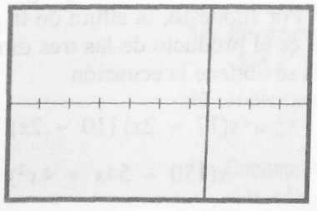
Solución Al escribir la ecuación en la forma $x^3 - 4x - 8 = 0$ e igualando el lado izquierdo a y:

$$y = x^3 - 4x - 8$$

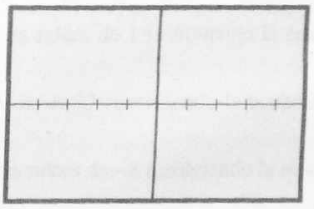
En la Figura 2.19, aparece la gráfica de esta ecuación en el rectángulo de inspección [–10, 10] por [–10, 10]. Debido a que la gráfica interseca el eje x en un solo punto, hay únicamente una raíz real entre 2 y 3; para conseguir la aproximación deseada se selecciona un rectángulo de inspección de [2, 3] por [–0.1, 0.1] con una escala de 0.1 en los ejes. La Figura 2.20 muestra esta gráfica e indica que la raíz está entre 2.6 y 2.7. Ahora se elige el rectángulo de inspección [2.6, 2.7] por [–0.01, 0.01] y la gráfica aparece en la Figura 2.21. Debido a que la intercepción x de la gráfica está entre 2.64 y 2.65, pero más cercana a 2.65, se concluye que con una aproximación de centésimos, la raíz es 2.65.



[–10, 10] por [–10, 10]
$y = x^3 - 4x - 8$
FIGURA 2.19



[2, 3] por [–0.1, 0.1]
$y = x^3 - 4x - 8$
FIGURA 2.20



[2.6, 2.7] por [–0.01, 0.01]
$y = x^3 - 4x - 8$
FIGURA 2.21 ◂

▸ EJEMPLO 6 *Resolución gráfica de un problema que tiene como modelo una ecuación cúbica*

Un fabricante de cajas de cartón las hace abiertas y de volumen 140 pulg^3, partiendo de piezas rectangulares de cartón con dimensiones 10 por 17 pulg, en las que corta cuadrados iguales en las cuatro esquinas y dobla hacia arriba los lados. Utilice la graficadora para determinar,

con una aproximación de centésimos, la longitud de los cuadrados cortados.

Solución La Figura 2.22 representa una hoja de cartón, y en la Figura 2.23 se muestra la caja de cartón obtenida.

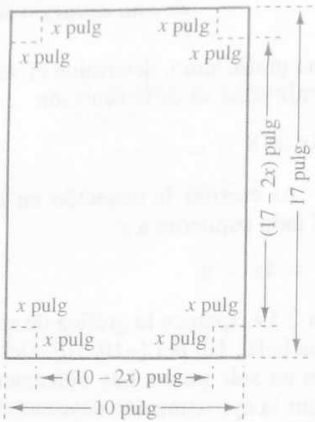


FIGURA 2.22

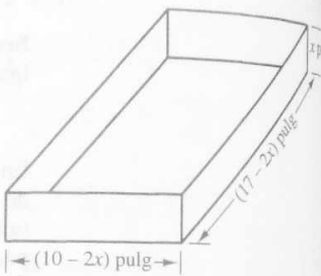


FIGURA 2.23

A continuación se definen los números desconocidos.

x: el número de pulgadas (pulg) de longitud del lado de los cuadrados cortados.

$17 - 2x$: el número de pulgadas de longitud de la base de la caja.

$10 - 2x$: el número de pulgadas del ancho de la base de la caja.

Por supuesto, la altura de la caja es x pulgadas. El volumen de la caja es el producto de las tres dimensiones. Al igualar este producto a 140, se obtiene la ecuación

$$x(17 - 2x)(10 - 2x) = 140$$

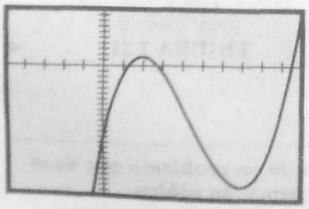
$$x(170 - 54x + 4x^2) = 140$$

$$4x^3 - 54x^2 + 170x - 140 = 0$$

Considere y igual al lado izquierdo de la ecuación

$$y = 4x^3 - 54x^2 + 170x - 140$$

La gráfica de esta ecuación en el rectángulo de inspección $[-5, 10]$ por $[250, 100]$ aparece en la Figura 2.24. La gráfica intersecta al eje x en tres puntos: el primero entre 1 y 2, el segundo entre 2 y 3, y el último entre 9 y 10. Debido a que el ancho del cartón es 10 pulg, la longitud del lado del cuadrado cortado no puede ser mayor de 5 pulg. Por tanto, sólo se consideran, para valores de x, los dos primeros puntos. Si se emplea el aumento (*zoom-in*) en cada uno de los puntos, se obtiene 1.33 y 2.81.



$[-5, 10]$ por $[-250, 100]$
$y = 4x^3 - 54x^2 + 170x - 140$

FIGURA 2.24

Conclusión: La longitud del lado del corte cuadrado es 1.33 pulg o 2.81 pulg. ◀

En la Sección 4.4, se regresará a la situación planteada en el ejemplo anterior y se determinará la longitud del cuadrado que debe cortarse para que la caja resultante tenga un volumen máximo.

EJERCICIOS 2.4

En los ejercicios 1 a 12, encuentre el conjunto solución de la ecuación algebraica, comprobando las soluciones en la graficadora.

1. $\sqrt{x} - 5 = 3$
2. $\sqrt{x} + 4 = 7$
3. $\sqrt{x} + 5 = 3$
4. $\sqrt{x} - 4 = 7$
5. $\sqrt{2x - 3} = 2$
6. $\sqrt{2x + 5} = 3$
7. $\sqrt{y} + y = 6$
8. $\sqrt{t} + 6 = t$
9. $\sqrt{3x + 7} = x + 1$
10. $2\sqrt{x + 4} - 1 = x$
11. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x} = 1$
12. $\sqrt{2t + 1} - 2\sqrt{t} - 1 = 0$

En los ejercicios 13 a 24, estime las soluciones de la ecuación en la graficadora y posteriormente, encuentre el conjunto solución de forma algebraica.

13. $\sqrt{3x - 4} + 8 = 0$
14. $\sqrt{5x + 1} + \sqrt{3x} + 1 = 0$
15. $\sqrt{5w + 1} - \sqrt{3w} - 1 = 0$
16. $\sqrt{2 + 4y} + \sqrt{3 - 4y} = 3$
17. $\sqrt{2x + 11} + 1 = \sqrt{5x + 1}$
18. $7 - \sqrt{8 - x} = \sqrt{2x + 22}$
19. $\sqrt{y - 2\sqrt{y + 3}} + 6 = 0$
20. $\sqrt{w + 2\sqrt{w - 1}} + 2 = 0$
21. $\sqrt{4 - 3x} + \sqrt{3x - 9} = \sqrt{3x - 14}$
22. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 3\sqrt{x - 1}$
23. $\sqrt[3]{3x + 1} = x + 1$
24. $\sqrt[3]{x^2 - 1} = x - 1$

En los ejercicios 25 a 36, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

25. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
26. $9x^4 - 8x^2 - 1 = 0$
27. $t^4 - 5t^2 + 6 = 0$
28. $6w^4 - 17w^2 + 12 = 0$
29. $8x^4 - 6x^2 - 5 = 0$
30. $8x^4 + 6x^2 - 9 = 0$
31. $5t^{-2} - 9t^{-1} - 2 = 0$
32. $y^{-4} - 37y^{-2} + 9 = 0$
33. $y^6 - 35y^3 + 216 = 0$
34. $27z^6 - 35z^3 + 8 = 0$
35. $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} = 3$
36. $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 4 = 0$

En los ejercicios 37 y 38, demuestre que el conjunto solución de la ecuación es ∅.

37. $\sqrt{3 - 3x} - \sqrt{3x + 2} = 3$
38. $\sqrt[4]{3x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x - 2}$
39. Encuentre las tres raíces de 1 resolviendo la ecuación $x^3 = 1$.
40. Halle las tres raíces de 27 resolviendo la ecuación $x^3 = 27$.
41. Encuentre las tres raíces de -8 resolviendo la ecuación $x^3 = -8$.
42. Determine las cuatro raíces de 1 resolviendo la ecuación $x^4 = 1$.
43. Halle las cuatro raíces de 81 resolviendo la ecuación $x^4 = 81$.
44. Encuentre las seis raíces de 64 resolviendo la ecuación $x^6 = 64$.

En los ejercicios del 45 al 48, con el empleo de la graficadora, determine el valor aproximado hasta centésimos de la raíz indicada.

45. $2x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$: **(a)** la raíz negativa, **(b)** la raíz positiva más pequeña.

46. $2x^3 - 8x^2 + x + 16 = 0$: **(a)** la raíz negativa, **(b)** la raíz positiva más grande.

47. $x^4 - 10x^2 + 5 = 0$: **(a)** la raíz positiva más pequeña, **(b)** la raíz positiva más grande.

48. $2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$: la raíz negativa.

49. Un balón esférico se infla de tal forma que su volumen se incrementa con una rapidez de $\frac{148}{3}\pi$ pie ^{3}/min. Si el radio es ahora de 3 pie, ¿cuál será el radio en 1 minuto? (La fórmula para el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

50. La superficie lateral de un cono circular recto de radio de la base r unidades y altura h unidades es S unidades cuadradas, donde $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Resuelva esta fórmula para **(a)** h y **(b)** r.

51. Un sólido esférico que tiene un radio de r unidades y una gravedad específica k, se sumergirá en agua a una altura de x unidades, donde x es una raíz positiva de la ecuación

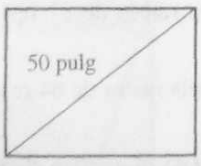
$$x^3 - 3rx^2 + 4kr^3 = 0$$

En la graficadora, encuentre, con una aproximación a centésimas de pulgada, la profundidad a la cual se sumergirá una boya esférica de radio de 10 pulg y una gravedad específica de 0.1.

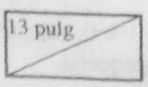
52. Utilice la ecuación del ejercicio 51 y la graficadora para determinar, con una aproximación a centésimos de pulgada, la profundidad a la cual se sumergirá una pelota si su radio es 3 pulg y tiene una gravedad específica de 0.5.

En los ejercicios 53 a 57, resuelva el problema encontrando una ecuación como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio escribiendo la conclusión.

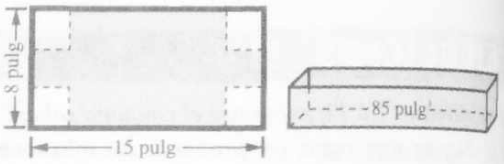
53. La longitud de la diagonal de un rectángulo es 50 pulg y el área es 1 200 pulg ^{2}. ¿Cuáles son las dimensiones?



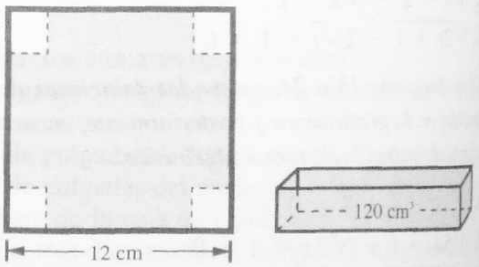
54. Resuelva el ejercicio 53, si la longitud de la diagonal es 13 pulg y el área es 60 pulg^2.



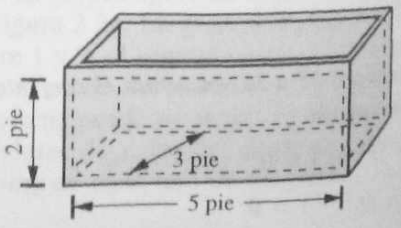
55. Un fabricante de cajas abiertas de estaño, de 85 pulg ^{3} de volumen, hace uso de hojas de estaño con dimensiones de 8 por 15 pulg cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. Utilice la graficadora; encuentre, con aproximación de centésimas de pulgada, la longitud del lado del cuadrado a cortar.



56. Un fabricante de cajas de cartón las hace abiertas y con un volumen de 120 cm^3 a partir de hojas cuadradas de cartón de 12 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Utilice la graficadora; encuentre, con aproximación a centésimos de centímetro, la longitud del lado del cuadrado a cortar.



57. Empleando madera, se fabrica una caja rectangular abierta de espesor uniforme en los lados y fondo. Las dimensiones internas son 5 pie de longitud, 3 pie de ancho y 2 pie de altura. Si la madera pesa 40 lb por pie cúbico, use la graficadora para determinar, con una aproximación de centésimos de pulgada, cuál debería ser la densidad de la madera para que la caja vacía pese 160 lb.



58. En una graficadora, ¿cómo se determina si un polinomio tiene soluciones reales y cuántas son?

59. ¿Por qué se pueden presentar soluciones extrañas cuando se elevan al cuadrado ambos miembros de una ecuación? ¿Se presentan, en todos los casos, soluciones extrañas si ambos lados de una ecuación son elevados al cuadrado? Proporcione ejemplos de ecuaciones específicas para justificar las respuestas.

2.5 DESIGUALDADES LINEALES

OBJETIVOS

1. **Aprender propiedades de orden.**
2. **Resolver algebraicamente desigualdades lineales.**
3. **Resolver gráficamente desigualdades lineales.**
4. **Resolver problemas que tienen una desigualdad lineal como modelo matemático.**

En la Sección 1.1, una relación denotada por los símbolos $<$ y $>$ proporciona un orden para R, el conjunto de números reales; en la misma sección, se presentaron las desigualdades y se emplearon para definir intervalos sobre la recta numérica real. Es recomendable que en este momento revisemos estos conceptos.

En Cálculo, es necesario ser un experto tanto al trabajar con las desigualdades como con las ecuaciones, debido a que las desigualdades son tan frecuentes como las ecuaciones. En esta sección, y en las dos siguientes, se tratarán desigualdades que contienen una variable. De manera preliminar, para la discusión, se presentarán las propiedades de *tricotomía* y *transitiva del orden.*

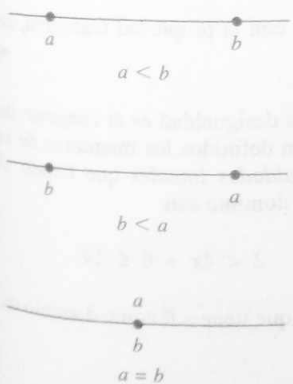


FIGURA 2.25

Propiedad de tricotomía del orden

Si a y b son números reales, uno y sólo uno de los tres enunciados siguientes es verdadero:

$$a < b \qquad b < a \qquad a = b$$

La interpretación geométrica de la propiedad de tricotomía es que el punto a o b sobre la recta numérica real, se ubica a la izquierda del otro o son el mismo punto.

La Figura 2.25 muestra las tres posibilidades.

Propiedad transitiva del orden

Si a, b y c son números reales, y si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

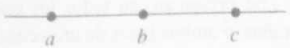


FIGURA 2.26

La interpretación geométrica de la propiedad transitiva se muestra en la Figura 2.26; si el punto a está a la izquierda del punto b, y b está a la izquierda del punto c, entonces a está a la izquierda de c.

A fin de demostrar la propiedad transitiva, se emplea el hecho de que la suma de dos números positivos es positiva. También se aplica la definición del símbolo $<$, como se proporcionó en la Sección 1.1: si a y b son números reales,

$$a < b \quad \text{si y sólo si} \quad b - a \text{ es positivo}$$

Demostración de la propiedad transitiva Dado que $a < b$ y $b < c$, resulta de la definición de $<$, que

$$b - a \text{ es positivo} \quad \text{y} \quad c - b \text{ es positivo}$$

Debido a que la suma de dos números positivos es positiva,

$$(b - a) + (c - b) \text{ es positivo}$$

Si se aplican las propiedades conmutativa y asociativa de los números reales para esta expresión, se concluye que

$$c - a \text{ es positivo}$$

y por tanto

$$a < c$$

■

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Si $x < 5$ y $5 < y$, entonces, de acuerdo con la propiedad transitiva, se concluye que $x < y$.

El **dominio** de una variable en una desigualdad es el conjunto de los números reales para los cuales están definidos los miembros de la desigualdad. Son ejemplos de *desigualdades lineales* que tienen como conjunto de los números reales R como dominio son

$$3x - 8 < 7 \qquad \frac{x - 7}{4} \leq x \qquad 2 < 4x + 6 \leq 14$$

Un ejemplo de *desigualdad cuadrática* que tiene a R como dominio es

$$x^2 + 2x > 15$$

La desigualdad

$$\frac{3x}{x + 2} < 5$$

es racional. Debido a que el lado izquierdo no está definido cuando $x = -2$, el dominio de x es el conjunto de todos los números reales excepto -2.

Cualquier número en el dominio para el cual la desigualdad es verdadera se llama **solución de la desigualdad,** y el conjunto de todas

las soluciones se denomina **conjunto solución.** Una **desigualdad absoluta** es aquella que es verdadera para cualquier número en el dominio. Por ejemplo, si x es un número real,

$$x + 1 < x + 2 \quad \text{y} \quad x^2 \geq 0$$

son desigualdades absolutas. Una **desigualdad condicional** es aquélla para la cual hay al menos un número en el dominio que no está en el conjunto solución. Para encontrar el conjunto solución de una desigualdad condicional, se procede de manera similar a la empleada para resolver una ecuación; es decir, se obtienen **desigualdades equivalentes** (aquellas que tienen el mismo conjunto solución) hasta que se tiene una cuyo conjunto solución sea evidente. Para obtener desigualdades equivalentes se utilizan las propiedades siguientes.

Propiedades de <

Si a, b y c son números reales y

(i) si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ (propiedad de adición)
(ii) si $a < b$, entonces $a - c < b - c$ (propiedad de sustracción)
(iii) si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ (propiedad de multiplicación)
(iv) si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ (propiedad de multiplicación)

Estas propiedades pueden demostrarse empleando la definición de $<$ y el hecho de que el producto de dos números positivos es positivo. Primero, se probará la propiedad de adición (i). Debido a que $a < b$, a partir de la definición de $<$, se tiene que

$$b - a > 0$$

De las propiedades asociativa y conmutativa de los números reales

$$b - a = (b + c) - (a + c)$$

Es decir que

$$(b + c) - (a + c) > 0$$

de la cual se concluye que

$$a + c < b + c$$

con la expresión anterior se comprueba la propiedad (i). La propiedad (ii) es consecuencia de la propiedad (i) y del hecho de que restar c es lo mismo que sumar $-c$.

Ahora se probará la propiedad de multiplicación (iii). Dado que $a < b$, $b - a > 0$. Debido a que el producto de dos números positivos es positivo, se tiene que

$$(b - a)c > 0$$

$$bc - ac > 0$$

$$ac < bc$$

lo cual demuestra la propiedad (iii). En el ejercicio 49, se solicita que se demuestre la propiedad (iv).

En la presente sección, se tratarán desigualdades lineales, las cuales pueden escribirse en la forma

$$ax + b < 0 \text{ (el símbolo } < \text{ puede reemplazarse por } >, \leq, \text{ o } \geq)$$

donde a y b son números reales y $a \neq 0$. En los tres ejemplos siguientes se obtendrá algebraicamente el conjunto solución de una desigualdad lineal y la solución se representará sobre la recta numérica real.

► EJEMPLO 1 *Resolución algebraica de una desigualdad lineal*

Determine y muestre sobre la recta numérica real el conjunto solución de la desigualdad

$$3x - 8 < 7$$

Solución Las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$3x - 8 < 7$$

$$3x - 8 + 8 < 7 + 8$$

$$3x < 15$$

$$\frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(15)$$

$$x < 5$$

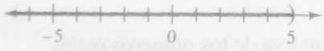


FIGURA 2.27

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad original es $\{x \mid x < 5\}$, el cual es el intervalo $(-\infty, 5)$, este intervalo aparece en la Figura 2.27.

► EJEMPLO 2 *Resolución algebraica de una desigualdad lineal*

Encuentre y muestre sobre la recta numérica real el conjunto solución de la desigualdad

$$\frac{x - 7}{4} \leq x$$

Solución Las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$\frac{x-7}{4} \le x$$

$$(4)\frac{x-7}{4} \le (4)x$$

$$x - 7 \le 4x$$

$$x - 7 - 4x + 7 \le 4x - 4x + 7$$

$$-3x \le 7$$

$$-\frac{1}{3}(-3x) \ge \left(-\frac{1}{3}\right)7$$

$$x \ge -\frac{7}{3}$$

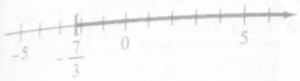


FIGURA 2.28

Por lo que el conjunto solución de la desigualdad dada es $\{x \mid x \ge -\frac{7}{3}\}$, el cual es el intervalo $[-\frac{7}{3}, +\infty)$, que se muestra en la Figura 2.28. ◀

▶ **EJEMPLO 3** ***Resolución algebraica de una desigualdad lineal***

Encuentre y muestre sobre la recta numérica real el conjunto solución de la desigualdad

$$3 < 4x + 7 \le 15$$

Solución Una solución de la desigualdad dada deberá ser una solución de ambas desigualdades

$$3 < 4x + 7 \quad \text{y} \quad 4x + 7 \le 15$$

Resuelva separadamente cada una de las desigualdades

$$3 < 4x + 7 \qquad 4x + 7 \le 15$$

$$3 - 7 < 4x + 7 - 7 \qquad 4x + 7 - 7 \le 15 - 7$$

$$-4 < 4x \qquad 4x \le 8$$

$$\frac{1}{4}(-4) < \frac{1}{4}(4x) \qquad \frac{1}{4}(4x) \le \frac{1}{4}(8)$$

$$-1 < x \qquad x \le 2$$

Un valor de x será solución de la desigualdad dada si y sólo si

$$-1 < x \quad \text{y} \quad x \le 2$$

$$\Leftrightarrow -1 < x \le 2$$

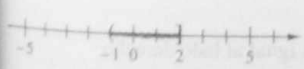


FIGURA 2.29

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada es el intervalo $(-1, 2]$, el cual se muesta en la Figura 2.29.

El trabajo puede disminuirse haciendo los mismos cálculos con la desigualdad, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 3 &< 4x + 7 \le 15 \\ 3 - 7 &< 4x + 7 - 7 \le 15 - 7 \\ -4 &< 4x \le 8 \\ \frac{-4}{4} &< \frac{4x}{4} \le \frac{8}{4} \\ -1 &< x \le 2 \end{aligned}$$

En la mayoría de los casos es más fácil resolver desigualdades lineales algebraicamente que de manera gráfica. Sin embargo, se demostrará cómo emplear la graficadora para resolver desigualdades lineales.

▸ EJEMPLO 4 *Resolución gráfica de una desigualdad lineal*

Emplee una graficadora para resolver la desigualdad lineal del ejemplo 1.

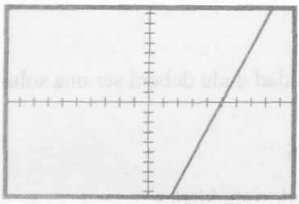
Solución Primero se vuelve a escribir la desigualdad de tal manera que todos los términos diferentes de cero estén en el lado izquierdo:

$$3x - 15 < 0$$

Se considera y igual al lado izquierdo:

$$y = 3x - 15$$

La gráfica de esta ecuación en la graficadora aparece en la Figura 2.30. La gráfica está debajo del eje x cuando $y < 0$. Esto ocurre si $x < 5$, lo cual está de acuerdo con la solución del ejemplo 1.



[−10, 10] por [−10, 10]
$y = 3x - 15$
FIGURA 2.30

El ejemplo siguiente muestra otro método gráfico para resolver una desigualdad lineal.

▸ EJEMPLO 5 *Resolución gráfica de una desigualdad lineal*

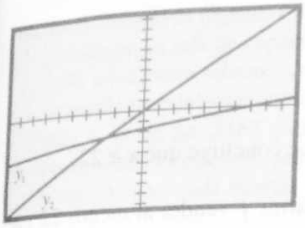
Utilice una graficadora para resolver la desigualdad lineal del ejemplo 2.

Solución La desigualdad es

$$\frac{x - 7}{4} \le x$$

Considere y_1 igual al lado izquierdo y y_2 igual al lado derecho

$$y_1 = \frac{x - 7}{4} \qquad y_2 = x$$

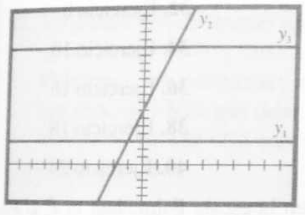


[−10, 10] por [−10, 10]
$y_1 = \frac{x-7}{4}$ y $y_2 = x$
FIGURA 2.31

El conjunto solución de la desigualdad dada consiste de aquellos valores de x para los cuales $y_1 \leq y_2$. Las gráficas de las ecuaciones aparecen en la Figura 2.31, ambas se intersectan en el punto $(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3})$, el cual puede ser verificado sustituyendo las coordenadas en la ecuación para y_1. La gráfica de y_1 intersecta o se encuentra debajo de la gráfica para y_2 cuando $x \geq -\frac{7}{3}$, lo cual está de acuerdo con el conjunto solución del ejemplo 2. ◄

► EJEMPLO 6 *Resolución gráfica de una desigualdad lineal*

Emplee una graficadora para resolver la desigualdad lineal del ejemplo 3.



[−10, 10] por [−5, 20]
$y_1 = 3$, $y_2 = 4x + 7$ y $y_3 = 15$
FIGURA 2.32

Solución La desigualdad es

$$3 < 4x + 7 \leq 15$$

Considere

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = 4x + 7 \qquad y^3 = 15$$

Se piensa encontrar los valores de x para los cuales $y_1 < y_2 \leq y_3$. En la Figura 2.32 están trazadas las gráficas de las tres ecuaciones. La recta para y_2 se encuentra arriba de la recta para y_1, y está por debajo de o intersecta a la recta para y_3 cuando $-1 < x \leq 2$, lo cual está de acuerdo con la solución del ejemplo 3. ◄

► EJEMPLO 7 *Resolución de un problema que tiene una desigualdad lineal como modelo matemático*

Una compañía que fabrica y vende gabinetes tiene gastos generales semanales de \$3 400 (dólares), incluyendo salarios y costos de planta. El costo de los materiales por cada gabinete es de \$40 y se vende en \$200. ¿Cuántos gabinetes deberán construirse y venderse cada semana para que la compañía garantice utilidades?

Solución Inicialmente se definirán los números desconocidos.

x: el número de gabinetes construidos y vendidos semanalmente.
$200x$: el número de dólares en el ingreso total semanal.
$3\,400 + 40x$: el número de dólares del costo total semanal.
P: el número de dólares en las ganancias semanales.

Debido a que la ganancia es igual al ingreso menos el costo, se tiene

$$P = 200x - (3\,400 + 40x)$$

$$P = 160x - 3\,400$$

Para una ganancia, P debe ser positivo, es decir

$$160x - 3\,400 > 0$$
$$160x > 3\,400$$
$$x > 21.25$$

Dado que x debe ser un entero positivo, se concluye que $x \geq 22$.

Conclusión: La compañía deberá construir y vender al menos 22 gabinetes cada semana para garantizar una ganancia.

EJERCICIOS 2.5

En los ejercicios 1 a 28, encuentre algebraicamente el conjunto solución de la desigualdad y escríbalo en notación de intervalos. Muestre el conjunto solución en la recta numérica real.

1. $20 \leq 4x$
2. $3x - 5 < 7$
3. $2x - 1 < 6$
4. $3x + 1 \geq 4x - 3$
5. $2x + 1 > x - 4$
6. $5x + 6 \leq x - 2$
7. $\dfrac{2x - 5}{4} \leq 3$
8. $\dfrac{2x - 9}{7} > 0$
9. $-3 > \dfrac{3x + 5}{4}$
10. $\dfrac{x - 5}{4} \leq x$
11. $\dfrac{2x - 5}{3} < x + 1$
12. $6x - 1 < \dfrac{5x - 1}{3}$
13. $\frac{1}{2}x + 2 \leq \frac{1}{4}x + 3$
14. $5 - \frac{1}{3}x \geq \frac{1}{4}x - 2$
15. $10 - 3x > \dfrac{4x - 5}{-3}$
16. $\dfrac{3x + 8}{-5} < 4 - 2x$
17. $5 \leq 2x - 3 < 13$
18. $11 \geq 3x - 5 > 2$
19. $-7 < 2x + 1 < 3$
20. $1 \leq 3x - 2 \leq 16$
21. $1 < \dfrac{4x - 1}{3} < 5$
22. $10 < 4 - 3x < 19$
23. $6 \leq 2 - x \leq 8$
24. $-1 < \dfrac{7 - 2x}{5} \leq 5$
25. $2 > -3 - 3x \geq -7$
26. $-1 < 2 - 2x \leq 3$
27. $-4 < \dfrac{5x + 3}{-6} \leq 2$
28. $-4 \leq \dfrac{5 + 3x}{-2} \leq 5$

En los ejercicios 29 a 40, utilice una graficadora, encuentre el conjunto solución de la desigualdad que aparece en el ejercicio indicado.

29. Ejercicio 1
30. Ejercicio 2
31. Ejercicio 7
32. Ejercicio 8
33. Ejercicio 9
34. Ejercicio 10
35. Ejercicio 15
36. Ejercicio 16
37. Ejercicio 17
38. Ejercicio 18
39. Ejercicio 23
40. Ejercicio 24

41. Si la temperatura en la escala Fahrenheit es F grados y utilizando la escala Celsius es C, entonces

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

¿Cuál es el conjunto de valores de F si C está entre 10 y 20?

42. Cuando la temperatura del agua es mayor o igual a 100° Celsius, el agua hierve. Utilice la fórmula del ejercicio 41 para determinar la temperatura Fahrenheit a la cual hierve el agua.

En los ejercicios 43 a 48, resuelva el problema encontrando una desigualdad como un modelo matemático de la situación. Complete el problema escribiendo la conclusión.

43. Un inversionista tiene invertidos $8 000 al 9% y piensa invertir dinero adicional al 16% con objeto de lograr un rendimiento de al menos 12% de la inversión total. ¿Qué cantidad de dinero deberá ser invertida?

44. Parte de $20 000 son invertidos al 9% y el resto se invierten al 12%. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que puede ser invertida al 12% para tener un crédito anual de al menos $2 250 de las dos inversiones?

45. Un fabricante de lámparas vende únicamente a mayoristas en su sala de exposición. El gasto semanal total, incluyendo salarios, costos de planta y renta de la sala de exhibición, es de $6 000. Si cada lámpara se vende por $168 y el material usado en su construcción cuesta $44, ¿cuántas lámparas deberá hacer y vender cada semana para que el fabricante logre una ganancia?

46. Si en un curso particular, un estudiante tiene un promedio de calificaciones, en cuatro exámenes, de menos de 90 pero no debajo de 80, el estudiante recibirá una calificación de B en el curso. Si las calificaciones del estudiante en los tres primeros exámenes son 87, 94 y 73, ¿qué calificación en el cuarto examen dará como resultado la calificación de B?

47. Un platero piensa obtener una aleación que contenga al menos 72% y cuando más 75% de plata. Determine las cantidades máxima y mínima de una aleación a 80% que debe ser combinada con una aleación de plata de 65% para obtener 30 g de la aleación requerida.

48. ¿Qué cantidad de alcohol puro debe ser agregado a 24 litros de una solución de alcohol al 20% para obtener una mezcla que al menos tenga 30% de alcohol?

49. Demuestre la propiedad de multiplicación: si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$. *Sugerencia*: si $c < 0$, entonces $-c > 0$.

50. Compruebe que si $x < y$, entonces $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.

51. Demuestre que si a, b, c y d son números reales, y

$$\text{si } a < b \text{ y } c < d, \text{ entonces } a + c < b + d$$

Sugerencia: utilice la definición de $<$ y el hecho de que la suma de dos números positivos es positiva.

52. Si $a > b$ y $c > d$, no se puede concluir que ac es necesariamente mayor que bd, ¿por qué? Proporcionar un ejemplo.

53. Los ejemplos 4 y 5 proporcionan dos métodos para resolver gráficamente una desigualdad lineal. Explique, con palabras, los dos métodos aplicados a la desigualdad del ejericicio 9.

54. En el ejemplo 6 se resolvió gráficamente una desigualdad lineal. Explique, con palabras, el método empleado en este ejemplo para resolver la desigualdad del ejercicio 25.

2.6 DESIGUALDADES POLINOMIALES

OBJETIVOS

1. **Resolver algebraicamente desigualdades cuadráticas.**
2. **Resolver gráficamente desigualdades cuadráticas.**
3. **Resolver algunas desigualdades polinomiales particulares de grado mayor que 2.**
4. **Resolver gráficamente desigualdades polinomiales de grado mayor que 2 donde el conjunto solución tenga extremos irracionales.**
5. **Resolver problemas que tengan una desigualdad polinomial como modelo matemático.**

A continuación se discutirán los métodos algebraico y gráfico para resolver desigualdades polinomiales de grado mayor que 1.

Una **desigualdad cuadrática** es aquella que tiene la forma

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ (el símbolo} < \text{puede reemplazarse por} >, \leq, \text{o} \geq)$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Para resolver una desigualdad cuadrática, se emplearán los conceptos *número crítico* y *número de prueba*.

Un **número crítico** de la desigualdad anterior es una raíz real de la ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Suponga que r_1 y r_2 son los números críticos y $r_1 < r_2$. Entonces, el polinomio $ax^2 + bx + x$ puede cambiar de signo algebraico sólo en r_1 y r_2. Así, el signo (más o menos) de $ax^2 + bx + c$ será constante en cada uno de los intervalos

$$(-\infty, r_1) \qquad (r_1, r_2) \qquad (r_2, +\infty)$$

A fin de determinar el signo en uno de los intervalos en particular, se calcula el valor de $ax^2 + bx + c$ en un **número de prueba** arbitrario en el intervalo. A partir de los resultados se obtiene el conjunto solución de la desigualdad. El procedimiento se muestra en los dos ejemplos siguientes.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Resuelva la desigualdad

$$x^2 - 8 < 2x$$

primero escriba una desigualdad equivalente que tenga todos los términos diferentes de cero en un lado del signo de la desigualdad. De este modo se tiene

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$(x + 2)(x - 4) < 0$$

Se observa en la forma factorizada de la desigualdad, que la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$ tiene las raíces -2 y 4, las cuales son los números críticos de la desigualdad. En la Figura 2.33 se localizaron los puntos correspondientes a estos números sobre la recta numérica real. Estos puntos separan la recta en los tres intervalos siguientes:

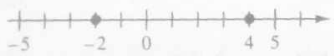


FIGURA 2.33

$$(-\infty, -2) \qquad (-2, 4) \qquad (4, +\infty)$$

En cada uno de estos intervalos, el signo de $(x + 2)(x - 4)$ es constante. Para determinar el signo en el intervalo, se elije un número de prueba arbitrario en el intervalo y se calcula el signo de cada uno de los factores $x + 2$ y $x - 4$ con este número de prueba. Si seleciona -3 en $(-\infty, -2)$, 0 en $(-2, 4)$ y 5 en $(4, +\infty)$ se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1

Intervalo	*Núm. de prueba k*	*Signo de x + 2 con k*	*Signo de x − 4 con k*	*Signo de (x + 2)(x − 4) sobre el intervalo*
$(-\infty, -2)$	-3	$-$	$-$	$+$
$(-2, 4)$	0	$+$	$-$	$-$
$(4, +\infty)$	5	$+$	$+$	$+$

FIGURA 2.34

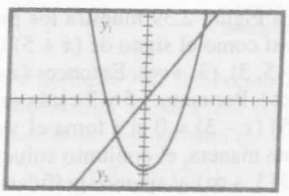
A partir de la tabla se obtiene la Figura 2.34, la cual presenta sobre una recta numérica real, los puntos –2 y 4 y los intervalos sobre los que $(x + 2)(x - 4)$ es positivo o negativo. Se concluye que el conjunto solución de la desigualdad es el intervalo $(-2, 4)$ mostrado en la Figura 2.35.

FIGURA 2.35

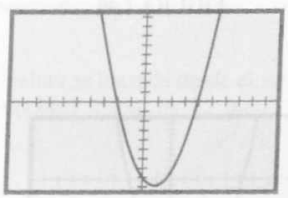
La desigualdad puede resolverse gráficamente de dos formas, para uno de los métodos se considera

$$y_1 = x^2 - 8 \qquad y_2 = 2x$$

Las gráficas de estas dos ecuaciones, trazadas en una graficadora, aparecen en la Figura 2.36. Se observa que cuando x está en el intervalo abierto $(-2, 4)$, la gráfica para y_1 está debajo de la gráfica de y_2 (esto es $y_1 < y_2$).



[–10, 10] por [–10, 10]
$y_1 = x^2 - 8$ y $y_2 = 2x$
FIGURA 2.36



[–10, 10] por [–10, 10]
$y = x^2 - 2x - 8$
FIGURA 2.37

Para el otro método gráfico se tiene

$$y = x^2 - 2x - 8$$

La gráfica de esta ecuación, trazada en la Figura 2.37, está debajo del eje x (es decir, $y < 0$) cuando x está en el intervalo abierto $(-2, 4)$. ◄

► EJEMPLO 1 *Resolución algebraica y gráfica de una desigualdad cuadrática*

Encuentre el conjunto solución de la desigualdad

$$x^2 + 2x \geq 15$$

y muestre el conjunto solución en la recta numérica real. Verifique gráficamente el resultado.

Solución La desigualdad dada es equivalente a

$$x^2 + 2x - 15 \geq 0$$

$$(x + 5)(x - 3) \geq 0$$

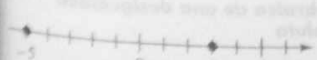


FIGURA 2.38

Los números críticos son –5 y 3. Los puntos correspondientes a estos números están localizados en la Figura 2.38 y determinan los intervalos siguientes

$$(-\infty, -5) \qquad (-5, 3) \qquad (3, +\infty)$$

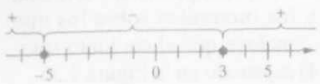
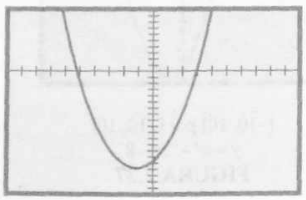


FIGURA 2.39

FIGURA 2.40



[−10, 10] por [−20, 10]
$y = x^2 + 2x - 15$

FIGURA 2.41

La Tabla 2 resume los resultados obtenidos eligiendo un número de prueba en cada uno de estos intervalos y determinando el signo de $(x + 5)(x - 3)$ sobre dichos intervalos.

Tabla 2

Intervalo	*Núm. de prueba k*	*Signo de x + 5 con k*	*Signo de x − 3 con k*	*Signo de (x + 5)(x − 3) sobre el intervalo*
$(-\infty, -5)$	−6	−	−	+
$(-5, 3)$	0	+	−	−
$(3, +\infty)$	4	+	+	+

La Figura 2.39 muestra los puntos −5 y 3 sobre la recta numérica real, así como el signo de $(x + 5)(x - 3)$ dentro de los intervalos $(-\infty, -5)$, $(-5, 3)$, $(3, +\infty)$. Entonces $(x + 5)(x - 3) > 0$ si x está en $(-\infty, -5)$ $(3, +\infty)$. Por tanto, −5 y 3 están en el conjunto solución debido a que $(x + 5)(x - 3) = 0$ si x toma el valor de cualquiera de estos números. De esta manera, el conjunto solución de la desigualdad dada es $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$, y aparece gráficamente en la Figura 2.40.

Al trazar la gráfica de

$$y = x^2 + 2x - 15$$

se obtiene la Figura 2.41. Esta gráfica intersecta o se ubica por arriba del eje x (es decir $y \geq 0$) cuando x está en $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$, lo cual está de acuerdo con los resultados obtenidos algebraicamente. ◂

▸ EJEMPLO 2 *Resolución algebraica de una desigualdad cuadrática cuyo conjunto solución es ∅*

Encuentre el conjunto solución de la desigualdad

$$5x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x$$

Solución La desigualdad dada es equivalente a

$$4x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$(2x - 1)^2 < 0$$

Debido a que no existe un valor de x para el cual $(2x - 1)^2$ es negativo, ◂ No hay solución. Por tanto, el conjunto solución es $\emptyset$.

▸ EJEMPLO 3 *Resolución algebraica de una desigualdad cuadrática absoluta*

Encuentre el conjunto solución de la desigualdad

$$-6x^2 - 8x + 1 \leq 3x^2 + 4x + 5$$

Solución La desigualdad dada es equivalente a

$$-9x^2 - 12x - 4 \leq 0$$

$$9x^2 + 12x + 4 \geq 0$$

$$(3x + 2)^2 \geq 0$$

Debido a que $(3x + 2)^2$ es positivo para todos los valores de x, el conjunto solución es el conjunto R de todos los números reales. Por tanto, la desigualdad es absoluta. ◄

► EJEMPLO 4 *Resolución gráfica de un problema de movimiento rectilíneo que tiene una desigualdad cuadrática como modelo matemático*

En el ejemplo 7 de la Sección 2.2, una pelota es lanzada desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 72 pie/s. La ecuación del movimiento es

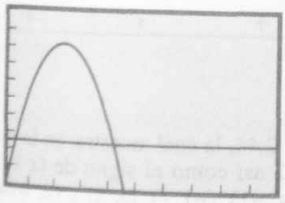
$$s = -16t^2 + 72t$$

donde s pies es la distancia que hay entre la pelota y el suelo después de t segundos de que es lanzada. Encuentre gráficamente en qué tiempo la pelota se halla más arriba de 25 pie del suelo.

Solución En el rectángulo de inspección [0, 10] por [0, 100] se traza la gráfica de la ecuación de movimiento y la recta $s = 25$. *Véase* Figura 2.42. Se piensa determinar los valores de t para los cuales

$$-16t^2 + 72t > 25$$

es decir, los valores de t para los que la parábola está arriba de la recta. Si emplea el aumento (*zoom-in*) se encuentra que la parábola y la recta se intersectan en los puntos donde t es 0.38 y 4.12. Por tanto, a partir de la Figura 2.42, se observa que la parábola se localiza arriba de la recta cuando $0.38 < t < 4.12$.



[0, 10] por [0, 100]
$s = -16t^2 + 72t$ y $s = 25$
FIGURA 2.42

Conclusión: La pelota estará más de 25 pie arriba del suelo cuando el tiempo transcurrido desde que fue lanzada esté entre 0.38 y 4.12 s. ◄

En el ejemplo siguiente se resolverá una *desigualdad cúbica*, por el mismo método empleado en el ejemplo ilustrativo 1 y el ejemplo 1 para resolver una desigualdad cuadrática.

► EJEMPLO 5 *Resolución de una desigualdad cúbica por métodos algebraico y gráfico*

Encuentre y muestre sobre la recta numérica real el conjunto solución de la desigualdad

$$(x + 1)(2x^2 - 5x + 2) > 0$$

Verifique gráficamente el resultado.

Solución La desigualdad dada es equivalente a

$$(x + 1)(2x - 1)(x - 2) > 0$$

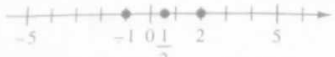


FIGURA 2.43

Los números críticos son -1, $\frac{1}{2}$ y 2, y los puntos correspondientes a estos números están localizados en la Figura 2.43 sobre la recta numérica real. Estos puntos determinan los intervalos siguientes:

$$(-\infty, -1) \quad (-1, \tfrac{1}{2}) \quad (\tfrac{1}{2}, 2) \quad (2, +\infty)$$

Si determina el signo de $(x + 1)(2x - 1)(x - 2)$ en cada uno de los intervalos eligiendo un número de prueba, se obtienen los resultados que a continuación se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3

Intervalo	*Núm. de prueba k*	*Signo de x + 1 con k*	*Signo de 2x − 1 con k*	*Signo de x − 2 con k*	*Signo de (x + 1)(2x − 1)(x − 2) sobre el intervalo*
$(-\infty, -1)$	-2	$-$	$-$	$-$	$-$
$(-1, \frac{1}{2})$	0	$+$	$-$	$-$	$+$
$(\frac{1}{2}, 2)$	1	$+$	$+$	$-$	$-$
$(2, +\infty)$	3	$+$	$+$	$+$	$+$

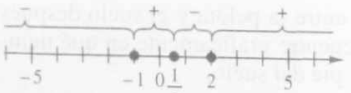


FIGURA 2.44

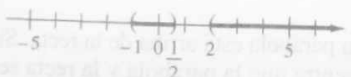
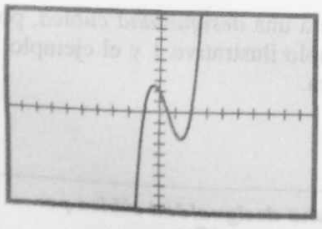


FIGURA 2.45

De la Tabla 3 se obtiene la Figura 2.44, la cual muestra, en la recta numérica real, los puntos -1, $\frac{1}{2}$ y 2 así como el signo de $(x + 1)(2x - 1)(x - 2)$ en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(2, +\infty)$. Por tanto, $(x + 1)(2x - 1)(x - 2) > 0$ si x está en $(-1, \frac{1}{2})$ o $(2, +\infty)$. Por lo que el conjunto solución de la desigualdad dada es $(-1, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$, el cual aparece en la Figura 2.45.

La Figura 2.46 muestra la gráfica de $y = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$ trazada en la graficadora. La gráfica está arriba del eje de las x (es decir, $y > 0$) si x está en $(-1, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ lo cual está de acuerdo con la solución algebraica.



[−10, 10] por [−10, 10]
$y = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$

FIGURA 2.46

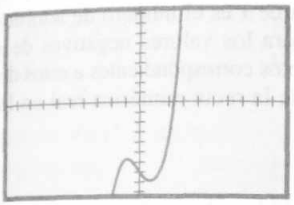
En el ejemplo 5, la desigualdad cúbica fue dada en forma factorizada. Frecuentemente un modelo matemático obtenido de una situación práctica es una desigualdad que implica un polinomio de grado mayor que dos que no puede ser factorizado. La resolución gráfica de tales desigualdades se hace empleando el aumento (*zoom-in*), como se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ EJEMPLO 6 *Resolución gráfica de una desigualdad polinomial de grado mayor que 2, donde el conjunto solución tiene números irracionales como extremos*

Encuentre el conjunto solución de la desigualdad

$$x^3 < 2x + 7$$

Exprese con aproximación de centésimos cualquier número irracional obtenido como extremo.



[−10, 10] por [−10, 10]
$y = x^3 - 2x - 7$
FIGURA 2.47

Solución La desigualdad es equivalente a

$$x^3 - 2x - 7 < 0$$

Considere

$$y = x^3 - 2x - 7$$

La Figura 2.47 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en una graficadora. Se observa que la gráfica intersecta el eje x entre 2 y 3. Al hacer el aumento de la zona mencionada, se aprecia que la intercepción x es 2.26, aproximando hasta centésimos. Debido a que la gráfica está debajo del eje x (es decir, $y < 0$) cuando $x < 2.26$, el conjunto solución de la desigualdad dada es el intervalo $(-\infty, 2.26)$. ◀

Observe que en el ejemplo 6, aunque se ha obtenido 2.26 como el extremo del conjunto solución, en realidad es una aproximación; sin embargo, en este texto se usará la convención de considerarlo como exacto en la notación de intervalos.

Las desigualdades que implican polinomios de grado mayor que 3 serán resueltas gráficamente empleando el mismo método del ejemplo 6.

▶ EJEMPLO 7 *Resolución de un problema que tiene una desigualdad cuadrática como modelo matemático*

Un decorador diseña y vende adornos de pared y puede comerciar, cada uno de los adornos producidos, a un precio de $75. Si x adornos son manufacturados diariamente, entonces el costo total diario de producción es $x^2 + 25x + 96$ dólares. ¿Cuántos adornos deberán producirse diariamente para que el decorador garantice una utilidad?

Solución Se definen los números desconocidos.

x: número de adornos manufacturados diariamente.
$75x$: número de dólares provenientes de la venta total de los adornos.
P: número de dólares de la ganancia total diaria.

Debido a que la ganancia es igual a la venta menos el costo,

$$P = 75x - (x^2 + 25x + 96)$$
$$= -x^2 + 50x - 96$$

Para que el decorador garantice una ganancia, se debe tener $P > 0$, es decir,

$$-x^2 + 50x - 96 > 0$$

$$x^2 - 50x + 96 < 0$$

$$(x - 2)(x - 48) < 0$$

Al resolver esta desigualdad, debido a que x es el número de adornos, el conjunto solución está restringido para los valores negativos de x. Los números críticos son 2 y 48. Los puntos correspondientes a estos dos números separan el lado no negativo de la recta numérica real en los siguientes tres intervalos:

$$[0, 2) \qquad (2, 48) \qquad (48, +\infty)$$

La Tabla 4 resume los resultados obtenidos eligiendo un número de prueba en cada intervalo para determinar el signo de $(x - 2)(x - 48)$.

Tabla 4

Intervalo	*Núm. de prueba k*	*Signo de x − 2 con k*	*Signo de x − 48 con k*	*Signo de (x − 2)(x − 48) en intervalo*
$[0, -2)$	1	−	−	+
$(2, 48)$	3	+	−	−
$(48, +\infty)$	49	+	+	+

De la tabla, el conjunto solución de la desigualdad es el intervalo abierto $(2, 48)$.

Conclusión: Para que el decorador garantice una ganancia el número de adornos producidos y vendidos diariamente deberá ser más de 2 y menos de 48. ◀

En la Sección 4.3 se regresará a la situación planteada en el ejemplo 7, y se aprenderá cómo determinar el número de adornos que deben producirse y venderse cada día para que el decorador tenga la ganancia máxima.

EJERCICIOS 2.6

En los ejercicios 1 a 30, determine algebraicamente el conjunto solución de la desigualdad, escriba el conjunto solución con notación de intervalos, y muestre el conjunto solución sobre la recta numérica real. Después, verifique el resultado gráficamente.

1. $x^2 > 9$

2. $x^2 < 4$

3. $(x + 3)(x - 4) < 0$

4. $(x - 1)(x - 5) > 0$

5. $(2x + 1)(2x - 7) > 0$
6. $(3x + 5)(2x - 3) < 0$
7. $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
8. $x^2 + 6x + 8 \geq 0$
9. $4 - 3x - x^2 \geq 0$
10. $2x^2 + x - 1 \leq 0$
11. $x^2 > 8 - 2x$
12. $x^2 < 15 + 2x$
13. $x \leq 6 - 2x^2$
14. $4x^2 \geq 9 - 9x$
15. $16t^2 + 1 \geq 8t$
16. $9y^2 < 30y - 25$
17. $x(11 - 3x) < 10$
18. $x(6x + 1) \geq 15$
19. $(y + 3)(y - 1)(y - 4) > 0$
20. $(x + 4)(x^2 - 4) < 0$
21. $x^3 \leq 16x$
22. $6t^3 > 7t^2 + 3t$
23. $x^2 - x - 1 < 0$
24. $x^2 + 2x - 2 \geq 0$
25. $x^2 + x + 3 > 0$
26. $x^2 - 2x + 2 < 0$
27. $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$
28. $(x^2 + 3x - 4)(x^2 - x - 2) \leq 0$
29. $(x + 3)(x^2 - x - 2)(x^2 - 8x + 15) \geq 0$
30. $x^5 - 5x^3 + 4x > 0$

En los ejercicios 31 a 38, determine gráficamente el conjunto solución de la desigualdad, y exprese los extremos de los intervalos con una aproximación a centésimos.

31. $x^3 + x^2 + x - 4 > 0$
32. $x^3 + 6x < 13$
33. $x^3 + 3x^2 < x + 2$
34. $x^3 + 6x > 5x^2 + 1$
35. $2x^4 - 14x^3 + 24x^2 + x - 4 > 0$
36. $3x^4 + 36x^2 - 8 < 21x^3 - 2x$
37. $9x^2 + 8x - 14 < x^4 + 2x^3$
38. $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 8x + 6 > 0$

En los ejercicios 39 a 50, resuelva el problema encontrando una desigualdad como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio resolviendo la desigualdad y escribiendo la conclusión.

39. En el ejercicio 57, de la Sección 2.2, un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 128 pie/s. Encuentre gráficamente cuándo el objeto se encuentra por arriba de 50 pie sobre el piso.

40. Encuentre gráficamente, cuándo el objeto del ejercicio 39 se encontrará a menos de 30 pie por arriba del suelo.

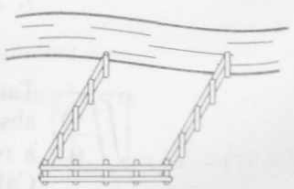
41. En el ejercicio 59, de la Sección 2.2, una pelota es lanzada hacia arriba desde la orilla de una azotea 68 pie arriba del suelo con una velocidad inicial de 76 pie/s. Encuentre gráficamente, cuándo la pelota estará (**a**) a menos de 100 pie arriba del suelo y (**b**) a más de 25 pie arriba del suelo.

42. Determine gráficamente cuándo la pelota del ejercicio 41 se encontrará (**a**) a más de 80 pie arriba del suelo y (**b**) a menos de 50 pie arriba del suelo.

43. Una empresa puede vender a \$100 por unidad todos los artículos de primera necesidad que produce. Si se fabrican x unidades por día, y el número de dólares en el costo total diario de producción es $x^2 + 20x + 700$. ¿Cuántas unidades deberán producirse diariamente de tal manera que la compañía garantice una ganancia?

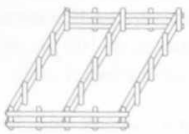
44. Una compañía que fabrica escritorios puede vender todos los que produce a \$400 cada uno. Si x escritorios se venden cada semana, entonces el número de dólares en el costo total de producción semanal es $2x^2 + 80x + 3\,000$. ¿Cuántos escritorios deberán construirse semanalmente para que el fabricante garantice una ganancia?

45. Un campo rectangular cercado está ubicado en la orilla de un río; el lado largo del río no requiere de cerca. El costo del material para la cerca es de \$8 por pie lineal para los dos lados opuestos con cerca y \$16 por pie lineal para el lado paralelo al río. Si el área del campo es de 12 000 pie^2 y el costo de la cerca no debe exceder de \$3 520, ¿cuáles son las restricciones en las dimensiones del campo?



46. Una parcela rectangular de terreno será encerrada por una cerca, luego, dividida a la mitad por otro tipo de cerca. La cerca que divide a la mitad la parcela cuesta \$3 por pie lineal y la otra cerca tiene un costo de \$6 por pie lineal. Si el área del terreno es 1 800 pie^2 y el costo total de la cerca no

debe ser mayor que \$2 310, ¿cuáles son las restricciones en las dimensiones del terreno?



47. En el ejercicio 15 de la Sección 2.3, para el parque que tiene un jardín, determine gráficamente los anchos posibles del corredor de concreto, si el área total del corredor es al menos de 2 500 m^2 y a lo más de 3 600 m^2.
48. Para el campo en el ejercicio 16 de la Sección 2.3, determine gráficamente los anchos posibles de la zona con surcos, si al menos dos terceras partes del campo serán aradas y cuando mucho las tres cuartas partes.
49. En el ejercicio 55 de la Sección 2.4, determine gráficamente las posibles longitudes de los lados de los cuadrados a cortar, si el volumen de las cajas de hoja de lata deberá ser al menos de 75 $pulg^3$ y cuando más de 86 $pulg^3$.
50. En el ejercicio 56 de la Sección 2.4, determine gráficamente las posibles longitudes de los lados de los cuadrados a cortar, si el volumen de las cajas de cartón deberán ser a lo más de 110 cm^3 y a lo menos de 122 cm^3.

2.7 ECUACIONES Y DESIGUALDADES QUE IMPLICAN VALOR ABSOLUTO

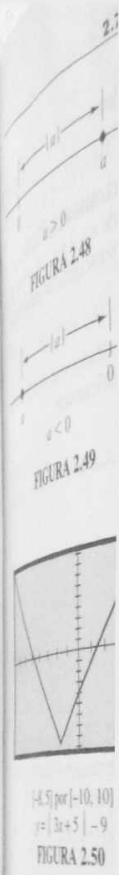
OBJETIVOS

1. **Resolver algebraicamente ecuaciones que involucran valor absoluto.**
2. **Resolver gráficamente ecuaciones que involucran valor absoluto.**
3. **Resolver algebraicamente desigualdades que involucran valor absoluto.**
4. **Resolver gráficamente desigualdades que involucran valor absoluto.**
5. **Aprender teoremas acerca del valor absoluto.**
6. **Mostrar que una desigualdad que involucra valor absoluto es equivalente a otra más simple.**
7. **Aprender la desigualdad del triángulo.**

Tanto las ecuaciones como las desigualdades que comprenden valor absoluto se encuentran frecuentemente en Cálculo, por lo que aprender a resolverlas ayuda a comprender ciertos conceptos en un curso de Cálculo. Para resolver una ecuación que involucra valor absoluto, se aplica la definición de la Sección 1.1, la cual establece que el valor absoluto de un número real denotado por $|\ a\ |$, está dado por

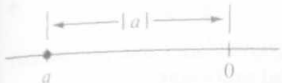
$$|\ a\ | = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Recordemos que en la Sección 1.1, sobre la recta numérica real, $|\ a\ |$ es la distancia del origen al punto a, sin considerar el sentido, izquier



$a > 0$

FIGURA 2.48



$a < 0$

FIGURA 2.49

do o derecho. *Véase* la Figura 2.48, donde a es positiva, y la Figura 2.49 donde a es negativa.

► EJEMPLO 1 *Resolución algebraica y gráfica de una ecuación que contiene valor absoluto*

Encuentre algebraicamente el conjunto solución de la ecuación

$$| 3x + 5 | = 9$$

Compruebe las soluciones en una graficadora.

Solución La ecuación dada se satisface si

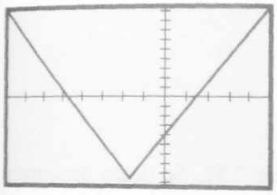
$$3x + 5 = 9 \quad \text{o} \quad -(3x + 5) = 9$$
$$3x = 4 \qquad -3x - 5 = 9$$
$$x = \frac{4}{3} \qquad -3x = 14$$
$$x = -\frac{14}{3}$$

El conjunto solución es $\{\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\}$.

Para comprobar las soluciones en una graficadora se hace

$$y = | 3x + 5 | - 9$$

y se traza la gráfica. Las intercepciones x de la gráfica se muestran en la Figura 2.50 y están de acuerdo con las soluciones encontradas $-\frac{14}{3}$ y $\frac{4}{3}$. ◄



[−8, 5] por [−10, 10]
$y = | 3x + 5 | - 9$

FIGURA 2.50

► EJEMPLO 2 *Resolución algebraica y gráfica de una ecuación que involucra valor absoluto*

Encuentre algebraicamente el conjunto solución de la ecuación

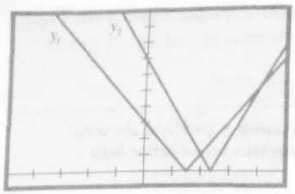
$$| 2x - 3 | = | 7 - 3x |$$

Compruebe las soluciones gráficamente.

Solución La ecuación dada se satisface si

$$2x - 3 = 7 - 3x \quad \text{o} \quad 2x - 3 = -(7 - 3x)$$
$$2x + 3x = 7 + 3 \qquad 2x - 3 = -7 + 3x$$
$$5x = 10 \qquad 2x - 3x = -7 + 3$$
$$x = 2 \qquad -x = -4$$
$$x = 4$$

El conjunto solución es $\{2, 4\}$.



[−5, 5] por [−1, 10]
$y_1 = |\ 2x - 3\ |$ y $y_2 = |\ 7 - 3x\ |$
FIGURA 2.51

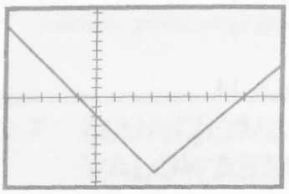
Para comprobar las soluciones se consideran

$$y_1 = |\ 2x - 3\ | \quad \text{y} \quad y_2 = |\ 7 - 3x|$$

Las gráficas de estas dos ecuaciones están trazadas en la Figura 2.51. Ambas intersectan el eje x en los puntos donde $x = 2$ y $x = 4$; estas soluciones están de acuerdo con las soluciones encontradas algebraicamente. ◂

Se iniciará la discusión sobre las desigualdades que comprenden valor absoluto resolviendo una desigualdad gráficamente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1



[−5, 10] por [−10, 10]
$y = |\ 2x - 7\ | - 9$
FIGURA 2.52

Para resolver la desigualdad

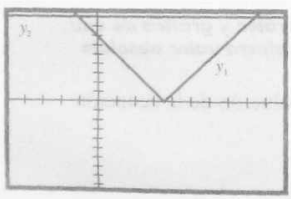
$$|\ 2x - 7\ | - 9 < 0$$

de manera gráfica, se define

$$y = |\ 2x - 7\ | - 9$$

la gráfica trazada se muestra en la Figura 2.52. Se desea determinar cuándo $y < 0$, es decir, cuando la gráfica de la ecuación está debajo del eje x. De la Figura 2.52 se observa que esto ocurre si $-1 < x < 8$. Por tanto, el conjunto solución es el intervalo abierto $(-1, 8)$. ◂

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2



[−5, 10] por [−10, 10]
$y_1 = |\ 2x - 7\ |$ y $y_2 = 9$
FIGURA 2.53

La desigualdad del ejemplo ilustrativo 1 es equivalente a

$$|\ 2x - 7\ | < 9$$

Esta forma proporciona otro método gráfico para resolver la desigualdad. Considere

$$y_1 = |\ 2x - 7\ | \quad \text{y} \quad y_2 = 9$$

Las gráficas de y_1 y y_2 trazadas en el mismo rectángulo de inspección aparecen en la Figura 2.53. Observe que la gráfica para y_1 está debajo de la gráfica para y_2 cuando $-1 < x < 8$. Como en el ejemplo ilustrativo 1, el conjunto solución es el intervalo abierto $(-1, 8)$. ◂

Antes de resolver algebraicamente una desigualdad que comprende valor absoluto, se considerará una propiedad adicional del valor absoluto.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Suponga que se tiene la desigualdad

$$|\ x\ | < 3$$

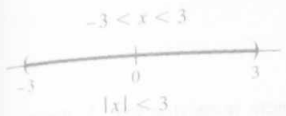


FIGURA 2.54

Esta desigualdad establece que sobre la recta numérica real, la distancia del origen al punto x es menor que 3 unidades; esto es, que $-3 < x < 3$. Por tanto, x está en el intervalo abierto $(-3, 3)$. *Véase* la Figura 2.54. Es evidente que el conjunto solución de la desigualdad $|x| < 3$ es $\{x \mid -3 < x < 3\}$. Ahora se demostrará que éste es el caso.

Debido a que $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$, el conjunto solución de la desigualdad $|x| < 3$ es la unión de los conjuntos

$$\{x \mid x < 3 \text{ y } x \geq 0\} \quad \text{y} \quad \{x \mid -x < 3 \text{ y } x < 0\}$$

Observe que el primero de estos conjuntos es equivalente a $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$, y el segundo es equivalente a $\{x \mid -3 < x < 0\}$ porque $-x < 3$ es equivalente a $x > -3$. Por tanto, el conjunto solución de $|x| < 3$ es

$$\{x \mid 0 \leq x < 3\} \cup \{x \mid -3 < x < 0\}$$
$$\Leftrightarrow \{x \mid -3 < x < 3\}$$ ◄

En el ejemplo ilustrativo anterior, comparando la desigualdad dada y su conjunto solución se concluye que la desigualdad

$$|x| < 3 \quad \text{es equivalente a} \quad -3 < x < 3$$

De manera más general si $b > 0$,

$$|x| < b \quad \text{es equivalente a} \quad -b < x < b$$

La prueba de este enunciado es exactamente la misma que la discusión dada en el ejemplo ilustrativo 3, si se sustituye 3 por b, donde $b > 0$. Por tanto, si en lugar de x se tiene una expresión algebraica E y $b > 0$, entonces la desigualdad.

$$|E| < b \quad \text{es equivalente a} \quad -b < E < b \tag{1}$$

Este enunciado es válido si el símbolo $<$ se sustituye por $\leq$.

► EJEMPLO 3 *Resolución algebraica de una desigualdad que implica valor absoluto*

Encuentre algebraicamente y muestre en la recta numérica real el conjunto solución de la desigualdad del ejemplo ilustrativo 1.

Solución La desigualdad

$$|2x - 7| < 9$$

es equivalente a

$$-9 < 2x - 7 < 9$$
$$-9 + 7 < 2x < 9 + 7$$
$$-2 < 2x < 16$$
$$-1 < x < 8$$

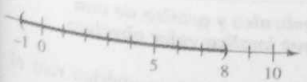


FIGURA 2.55

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo abierto $(-1, 8)$ el cual se muestra en la Figura 2.55. ◄

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Considere la desigualdad

$$|x| > 2$$

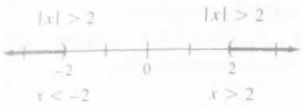


FIGURA 2.56

Esta desigualdad establece que en la recta numérica real, la distancia del origen al punto x es mayor que dos unidades; esto es, ya sea $x > 2$ o $x < -2$. Por tanto, x se encuentra en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. *Véase* la Figura 2.56. Así, es evidente que el conjunto solución de $|x| > 2$ es $\{x \mid x > 2\} \cup \{x \mid x < -2\}$. A continuación se utilizarán las propiedades del valor absoluto para demostrar que ésta es la situación.

De la definición de $|x|$, el conjunto solución de la desigualdad $|x| > 2$ es la unión de los conjuntos

$$\{x \mid x > 2 \text{ y } x \geq 0\} \quad \text{y} \quad \{x \mid -x > 2 \text{ y } x < 0\}$$

El primero de estos conjuntos es equivalente a $\{x \mid x > 2\}$, y el segundo es equivalente a $\{x \mid x < -2\}$, debido a que $-x > 2$ es equivalente a $x < -2$. En consecuencia, el conjunto solución de $|x| > 2$ es

$$\{x \mid x > 2\} \cup \{x \mid x < -2\}$$

Si compara la desigualdad dada y su conjunto solución con el ejemplo ilustrativo anterior, observa que la desigualdad

$$|x| > 2 \quad \text{es equivalente a} \quad x > 2 \text{ o } x < -2$$

De manera más general si $b > 0$,

$$|x| > b \quad \text{es equivalente a} \quad x > b \text{ o } x < -b$$

La prueba de este enunciado es idéntica a la discusión realizada en el ejemplo ilustrativo 4, si el número 2 se sustituye por b, donde $b > 0$. Si en lugar de x se tiene una expresión algebraica E y $b > 0$, entonces la desigualdad

$$|E| > b \quad \text{es equivalente a} \quad E > b \text{ o } E < -b \tag{2}$$

Es decir que el conjunto solución de la desigualdad $|E| > b$ es la unión de los conjuntos solución de las desigualdades $E > b$ y $E < -b$.

De la expresión (1), $|E| < b$ es equivalente a la desigualdad continua $-b < E < b$; sin embargo, $|E| > b$ no es equivalente a ninguna desigualdad continua.

La expresión (2) es válida si el símbolo $>$ se sustituye por $\geq$ y el símbolo $<$ se reemplaza por $\leq$.

▸ EJEMPLO 4 *Resolución algebraica y gráfica de una desigualdad que implica valor absoluto*

Encuentre algebraicamente y muestre en una recta numérica real el conjunto solución de la desigualdad

$$\left|\frac{2}{3}x - 5\right| \geq 3$$

Verifique las soluciones en una graficadora.

Solución El conjunto solución de la desigualdad dada es la unión de los conjuntos soluciones de las desigualdades.

$$\frac{2}{3}x - 5 \geq 3 \qquad \frac{2}{3}x - 5 \leq -3$$

$$2x - 15 \geq 9 \qquad 2x - 15 \leq -9$$

$$2x \geq 24 \qquad 2x \leq 6$$

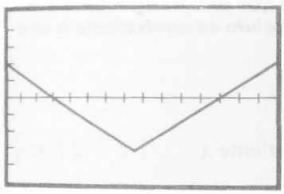
$$x \geq 12 \qquad x \leq 3$$

FIGURA 2.57

Así, el conjunto solución es $\{x \mid x \leq 3\} \cup \{x \mid x \geq 12\}$, o con notación de intervalo $(-\infty, 3] \cup [12, +\infty)$. En la Figura 2.57 se muestra el conjunto solución sobre la recta numérica real.

Para verificar las soluciones, se considera

$$y = \left|\frac{2}{3}x - 5\right| - 3$$



[0, 15] por [−5, 5]

$y = \left|\frac{2}{3}x - 5\right| - 3$

FIGURA 2.58

La Figura 2.58 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en una graficadora. Observe que la gráfica intersecta o se encuentra arriba del eje x, es decir $y \geq 0$, cuando x está en $(-\infty, 3] \cup [12, +\infty)$, lo cual está de acuerdo con el resultado obtenido algebraicamente. ◀

Los siguientes teoremas acerca del valor absoluto son útiles en Cálculo.

TEOREMA 1

Si a y b son números reales, entonces

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2 b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$

■

TEOREMA 2

Si a y b son números reales, y $b \neq 0$, entonces

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

La prueba es similar a la del Teorema 1 y se deja como un ejercicio (*véase* el ejercicio 49).

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ En Cálculo, frecuentemente se requiere sustituir una desigualdad con otra equivalente pero más simple, como en el ejemplo siguiente.

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ ▶ **EJEMPLO 5** ***Demostración de que una desigualdad que implica valor absoluto es equivalente a otra más simple***

Demuestre que la desigualdad

$$|(3x + 2) - 8| < 1 \qquad \text{es equivalente a} \qquad |x - 2| < \tfrac{1}{3}$$

Solución Las desigualdades siguientes son equivalentes

$$\begin{aligned} |(3x + 2) - 8| &< 1 \\ |3x - 6| &< 1 \\ |3(x - 2)| &< 1 \\ |3||x - 2| &< 1 \\ 3|x - 2| &< 1 \\ |x - 2| &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ El teorema siguiente, llamado *desigualdad del triángulo* se utiliza frecuentemente en la demostración de teoremas en Cálculo.

TEOREMA 3 ***La desigualdad del triángulo***

Si a y b son números reales, entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$

En el ejercicio 50 se pedirá que se demuestre la desigualdad del triángulo. El contenido de la desigualdad del triángulo se presenta en el siguiente ejemplo ilustrativo con cuatro casos particulares.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Si $a = 3$ y $b = 4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |3 + 4| \\ &= |7| \\ &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |a| + |b| &= |3| + |4| \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Si $a = -3$ y $b = 4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |-3 + 4| \\ &= |1| \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |a| + |b| &= |-3| + |4| \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Si $a = 3$ y $b = -4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |3 + (-4)| \\ &= |-1| \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |a| + |b| &= |3| + |-4| \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Si $a = -3$ y $b = -4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |-3 + (-4)| \\ &= |-7| \\ &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |a| + |b| &= |-3| + |-4| \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

En cada caso $|a + b| \leq |a| + |b|$. ◀

EJERCICIOS 2.7

En los ejercicios 1 a 14, encuentre algebraicamente el conjunto solución de la ecuación y compruebe las soluciones de manera gráfica.

1. $|x - 5| = 4$
2. $|2x + 3| = 7$
3. $|3y - 8| = 4$
4. $|4t - 9| = 11$
5. $|4x + 5| = 15$
6. $|8 - x| = 4$
7. $|7 - 2w| = 9$
8. $|3x - 2| = |2x + 3|$
9. $|x - 4| = |5 - 2x|$
10. $|5y| = |6 - y|$
11. $\left|\dfrac{x + 3}{x - 3}\right| = 7$
12. $\left|\dfrac{2x + 1}{x - 1}\right| = 3$
13. $|3t - 2| = t^2$
14. $|x - 1| = \dfrac{x^2}{4}$

En los ejercicios 15 a 22, resuelva gráficamente la desigualdad y escríbala con notación de intervalos. Verifique de manera algebraica las soluciones y muestre el conjunto solución en la recta numérica real.

15. $|x| \leq 5$
16. $|x| > 6$
17. $|x - 1| > 7$
18. $|x + 1| < 5$
19. $|x - 5| \leq 3$
20. $|3x - 4| \leq 2$
21. $|2x - 7| < 9$
22. $|3x - 4| \geq 2$

En los ejercicios 23 a 30, encuentre algebraicamente el conjunto solución de la desigualdad y escríbalo con notación de intervalos. Muestre el conjunto solución en la recta numérica real. Verifique de manera gráfica las soluciones encontradas.

23. $|7 - 2x| > 9$

24. $6 < |4x + 7|$

25. $4 < |3x + 12|$

26. $|5 - 3x| \geq 10$

27. $|5x - 7| + 4 \leq 6$

28. $|4x - 3| - 3 > 6$

29. $|\frac{3}{2} - 2x| > \frac{1}{2}$

30. $|2 - \frac{3}{4}x| \leq \frac{1}{2}$

En los ejercicios 31 a 36, demuestre que las dos desigualdades son equivalentes.

31. $|(2x - 3) - 9| < 1$; $|x - 6| < \frac{1}{2}$

32. $|(2x + 3) - 1| < 1$; $|x + 1| < \frac{1}{2}$

33. $|(3x - 5) - 1| < \frac{1}{2}$; $|x - 2| < \frac{1}{6}$

34. $|(5x - 2) - 3| < \frac{1}{2}$; $|x - 1| < \frac{1}{10}$

35. $|(\frac{1}{2}x - 5) + 7| < \frac{1}{8}$; $|x + 4| < \frac{1}{4}$

36. $|(\frac{1}{4}x - 1) + 2| < \frac{1}{6}$; $|x + 4| < \frac{2}{3}$

En los ejercicios 37 a 42, encuentre algebraicamente el conjunto solución de la desigualdad y escríbalo con notación de intervalos. Verifique de forma gráfica las soluciones.

37. $|x^2 - 5| < 4$

38. $|y^2 - 10| \leq 6$

39. $|t^2 - 5t| \leq 6$

40. $|x^2 - 3x - 1| < 3$

41. $|x^2 - 17| \geq 8$

42. $|x^2 + x - 4| > 2$

En los ejercicios 43 a 46 resuelva la ecuación gráficamente. Verifique la solución de manera algebraica. Sugerencia: *aplique la igualdad* $|a| = \sqrt{a^2}$ *y use el método de la Sección 2.4 para resolver ecuaciones que contengan radicales.*

43. $|x - 1| + |x| = 3$

44. $|x + 3| + |x| = 6$

45. $|2x + 1| = 3 - |2x|$

46. $|x - 1| + |x + 1| = 8$

En los ejercicios 47 y 48, verifique la desigualdad del triángulo para los valores de a y b.

47. (a) $a = 5$ y $b = 7$ (b) $a = 5$ y $b = -7$
(c) $a = -5$ y $b = 7$ (d) $a = -5$ y $b = -7$

48. (a) $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$ (b) $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$
(c) $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{3}$ (d) $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{3}$

49. Demuestre el Teorema 2.

50. Demuestre la desigualdad del triángulo. *Sugerencia:* primero pruebe que

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{y} \quad -|b| \leq b \leq |b|$$

Después aplique el resultado del ejercicio 51 de la Sección 2.5 y la expresión (1) de esta sección, donde $<$ se sustituye por $\leq$.

En los ejercicios 51 y 52, utilice la desigualdad del triángulo para demostrar el enunciado.

51. Si $|x - 1| < \frac{1}{3}$ y $|y + 1| < \frac{1}{4}$, entonces $|x + y| < \frac{7}{12}$

52. Si $|x - 1| < \frac{1}{3}$ y $|y - 1| < \frac{1}{4}$, entonces $|x - y| < \frac{7}{12}$

53. Demuestre: si a y b son números reales, entonces $|a - b| \leq |a| + |b|$. *Sugerencia:* escriba $a - b$ como $a + (-b)$ y emplee la desigualdad del triángulo.

54. Demuestre: si a y b son números reales, entonces $|a| - |b| \leq |a - b|$. *Sugerencia:* considere $|a| = |(a - b) + b|$ y use la desigualdad del triángulo.

55. Explique por qué las desigualdades $|a| > |b|$ y $a^2 > b^2$ son equivalentes. Emplee este hecho para explicar cómo se puede resolver algebraicamente la desigualdad $|2x - 1| > |x - 3|$ de la misma manera en que se resolvió la desigualdad cuadrática en el ejemplo 1 de la Sección 2.6.

56. Remítase al ejercicio 55 y explique cómo la desigualdad presentada en este ejercicio puede resolverse gráficamente de la misma manera como se resolvió la desigualdad cuadrática en el ejemplo 1 de la Sección 2.6.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 2

VISIÓN RETROSPECTIVA

2.1 Se mostró cómo encontrar la solución real exacta de una ecuación lineal. También se resolvieron ecuaciones lineales en una graficadora. En el inicio de esta sección se planteó una ecuación como modelo matemático de una situación práctica.

2.2 Se encontraron las soluciones exactas reales o imaginarias de ecuaciones cuadráticas por factorización, raíz cuadrada y la fórmula cuadrática. A partir del discriminante de una ecuación cuadrática se determinó la naturaleza de sus raíces. Se aplicó la graficadora para ilustrar que las soluciones reales de las ecuaciones cuadráticas son las intercepciones x de la correspondiente parábola. Primeramente se aplicó el proceso de completar cuadrados para deducir la fórmula cuadrática, y demostrar cómo esta idea se emplea en Cálculo para escribir ciertas expresiones algebraicas en formas reconocibles.

2.3 Se discutió detalladamente cómo obtener una ecuación como modelo matemático del enunciado de un problema. Se resolvió la ecuación algebraica o gráficamente y se completó el problema redactando una conclusión que respondiera las preguntas del problema.

2.4 Se resolvieron algebraica y gráficamente ecuaciones que contenían radicales, ecuaciones en forma cuadrática y ecuaciones polinomiales particulares de grado mayor que 2.

2.5 Se inició la discusión de desigualdades estableciendo las propiedades de orden: de tricotomía y transitiva, se mencionaron las propiedades de $<$ empleadas para obtener desigualdades equivalentes con el objeto de resolver desigualdades. En esta sección, se pusó énfasis en resolver desigualdades lineales.

2.6 El método algebraico de resolución de desigualdades polinomiales implicó el uso de tablas para mostrar el signo de una expresión polinomial en un intervalo particular. Se discutieron dos métodos para resolver gráficamente desigualdades polinomiales.

2.7 Se resolvieron algebraica y gráficamente ecuaciones y desigualdades que implican valor absoluto. Se discutieron en esta sección tres teoremas, incluyendo la desigualdad del triángulo, muy importante en Cálculo.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 y 2, encuentre el conjunto solución de la ecuación y muestre la solución en una graficadora.

1. $4x - 11 = 0$
2. $2x + 9 = 0$

En los ejercicios 3 a 6, resuelva la ecuación de dos formas: (i) con la graficadora, (ii) algebraicamente.

3. $6x + 5 = 23$
4. $5x - 6 = 2 + 9x$
5. $2(5x - 4) = 11 - (3 + 2x)$
6. $5(2t - 4) = 11 - (3 + 2t)$

En los ejercicios 7 a 16, encuentre el conjunto solución de la ecuación. Trace la gráfica de la parábola correspondiente en la graficadora. Si la ecuación tiene raíces reales verifique que las intercepciones x de la parábola sean las raíces de la ecuación. Si la ecuación no tiene raíces reales, verifique que la parábola no intersecte al eje x.

7. $49x^2 - 64 = 0$
8. $5x^2 = x$
9. $x^2 - 3x - 10 = 0$
10. $5x^2 + 17x - 12 = 0$
11. $10x^2 + 7x - 6 = 0$
12. $x^2 + 2x - 1 = 0$
13. $2x^2 - 4x - 5 = 0$
14. $4x^2 + 2x + 1 = 0$
15. $3x^2 - 2x + 2 = 0$
16. $(3x + 10)(x - 3) = 2x + 14$

En los ejercicios 17 a 42, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

17. $\dfrac{2}{5 - y} - \dfrac{1}{y - 2} = 0$
18. $\dfrac{x - 1}{x - 1} = 1$

19. $\frac{x-1}{x-1} = 0$ **20.** $\frac{x}{2x-2} = \frac{x-4}{2x-4}$

21. $\frac{7}{x-4} = x+2$ **22.** $\frac{x+11}{x+8} - \frac{3x-2}{x-2} = 0$

23. $\frac{6}{t^2-1} + \frac{1}{t-1} = \frac{1}{2}$

24. $\frac{w^2-3}{w^2-6w+5} = \frac{2w+3}{w-5} - \frac{w+3}{w-1}$

25. $\sqrt{2x+5} + x = 5$

26. $\sqrt{x+2} + 2 + x = 0$

27. $\sqrt{3t+7} + \sqrt{t+6} = 3$

28. $\sqrt{y+2} + \sqrt{y+5} - \sqrt{8-y} = 0$

29. $x^3 - 8 = 0$ **30.** $x^4 - 8x^2 = 9$

31. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

32. $8z^3 + 27 = 0$

33. $(x^2+3x)^2 - 3(x^2+3x) - 10 = 0$

34. $6\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 35\left(y + \frac{1}{y}\right) + 50 = 0$

35. $2\sqrt{t-5} + \sqrt[4]{t-5} = 3$

36. $15t^{-2} - 14t^{-1} - 8 = 0$

37. $y^{-2/3} + y^{-1/3} - 6 = 0$

38. $3x^{1/3} + 5 = 2x^{-1/3}$

39. $|2x+5| = 7$ **40.** $|3y-4| = 8$

41. $\left|\frac{w+1}{w-1}\right| = 3$ **42.** $|4x-1| = |x+5|$

En los ejercicios 43 a 48, resuelva para x en términos de los otros símbolos.

43. $Ax + By + C = 0$ **44.** $\frac{d}{10x} - \frac{d}{5} = \frac{1}{x}$

45. $x^2 + b^2 = 2bx + a^2$

46. $x^2 + xy + 2x - 1 = 0$

47. $6x^2 - 2xy - x + y - 1 = 0$

48. $rsx^2 + s^2x + rtx + st = 0$

En los ejercicios 49 y 50, agregue un término a la expresión algebraica con el objeto de obtener el cuadrado de un binomio; también escriba las expresiones resultantes como el cuadrado de un binomio.

49. (a) $x^2 - 8x$ (b) $y^2 + 3y$ (c) $x^2 + \frac{5}{3}x$

50. (a) $w^2 + 10w$ (b) $x^2 - \frac{6}{5}x$ (c) $x^2 + 7bx$

En los ejercicios 51 y 52, encuentre el discriminante, determine la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática; no resuelva la ecuación. Trace la gráfica de la parábola correspondiente en la graficadora y verifique su conclusión.

51. (a) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ (b) $8x^2 - 10x =$
(c) $5t - 3 = 4t^2$

52. (a) $15x^2 - 19x = 10$ (b) $2y^2 = 9 -$
(c) $9x^2 - 42x + 49 = 0$

En los ejercicios 53 a 56, estime en la graficadora el valor aproximado de la raíz indicada hasta centésimos.

53. $x^3 + x = 2x^2 + 1$: la raíz positiva.

54. $x^3 - 5x^2 + 7x + 8 = 0$: la raíz negativa

55. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4 = 0$: la raíz positiva

56. $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 17x - 4 = 0$: (a) la raíz positiva más grande; (b) la raíz positiva más pequeña.

En los ejercicios 57 a 78, encuentre algebraicamente el conjunto solución de la desigualdad: represente el conjunto solución en notación de intervalos, y muestre el conjunto solución en la recta numérica real. Verifique el resultado gráficamente.

57. $3x - 1 \le 11$ **58.** $5x + 7 \ge 2x -$

59. $3x - 2 > 7x + 3$ **60.** $4x < 8x -$

61. $\frac{x+1}{2} - 3 \ge \frac{x+2}{4}$ **62.** $\frac{2x+1}{3} \le \frac{9+2}{6}$

63. $-4 < 1 - 5x < 11$ **64.** $7 < 2x + 3 \le$

65. $-5 \le \frac{4x-5}{-3} < 7$ **66.** $-7 \le \frac{7-3x}{-4} \le$

67. $|x+1| \ge 2$ **68.** $|x-4| \le 6$

69. $|2x-5| < 7$ **70.** $|3x+7| >$

71. $\frac{4}{3} < \left|\frac{3}{2} - x\right|$ **72.** $\left|\frac{3-2x}{5}\right| <$

73. $x^2 < 25$ **74.** $x^2 + 3x -$

75. $2x^2 - 3x \ge 5$ **76.** $3t^2 < 4t +$

77. $4y^3 < 5y^2 - 6y$ **78.** $x^3 > x$

En los ejercicios 79 y 80, encuentre algebraicamente el conjunto solución de la desigualdad y escríbalo en notación de intervalos. Verifique las soluciones de forma gráfica.

79. $|x^2 - 3x - 7| < 3$ **80.** $|y^2 - 26| \geq 10$

En los ejercicios 81 a 86, emplee el concepto de completar el cuadrado para escribir la ecuación en una de las formas siguientes, donde x y y representan variables y las otras letras constantes:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

81. $y = 4(x^2 - 6x - 8)$

82. $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$

83. $x^2 + 4y^2 = 8(x - 2y - 2)$

84. $4x^2 - 9y^2 = 4(17 - 2x - 9y)$

85. $2x^2 - 5y^2 + 4x - 20y - 68 = 0$

86. $x^2 = 8(4 - 2y - x)$

En los ejercicios 87 y 88, utilice el concepto de completar el cuadrado para escribir la expresión indicada en la forma requerida, donde a y b son constantes y p es un entero positivo.

87. $\sqrt{16x^2 + 32x + 12}$ en la forma $p\sqrt{(x-h)^2 - a^2}$

88. $\sqrt{-9x^2 + 18x - 8}$ en la forma $p\sqrt{a^2 - (x-h)^2}$

En los ejercicios 89 y 90, muestre que las dos desigualdades son equivalentes.

89. $|(4x + 3) - 11| < \frac{1}{2}$; $|x - 2| < \frac{1}{8}$

90. $|(2x - 5) - 7| < \frac{4}{5}$; $|x - 6| < \frac{2}{5}$

91. El costo del alquiler de una *limousine* manejada por un chofer es de \$180 por el automóvil y el chofer, más 52 centavos por milla de recorrido. ¿Cuál es el costo de un viaje de **(a)** 30 millas; **(b)** 40 millas y **(c)** 100 millas?; **(d)** si y dólares es el costo de un viaje de x millas, escriba una ecuación que implique a x y y. **(e)** Trace la gráfica de la ecuación del inciso (d) y a partir de la gráfica estime el costo de un viaje de 83 millas. **(f)** Compruebe algebraicamente el costo estimado en el inciso (e). **(g)** A partir de la gráfica del inciso (e) estime la distancia de un viaje que costó \$205, **(h)** compruebe algebraicamente lo estimado en el inciso (g).

92. Si S es la suma de los primeros n números naturales consecutivos, entonces $S = \frac{1}{2}n(n + 1)$. **(a)** Resuelva la ecuación para n en términos de S y **(b)** encuentre n cuando S es 435.

En los ejercicios 93 a 102, resuelva el problema encontrando una ecuación como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio redactando una conclusión.

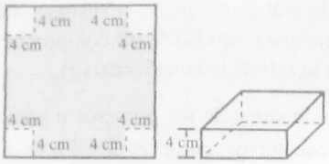
93. Un grupo de cuatro estudiantes decide compartir el costo del alquiler de un instructor para una sesión de repaso antes de un examen. Si dos estudiantes más se unen al grupo, el costo para cada estudiante se reduce en \$6. ¿Cuál es el costo por estudiante si el grupo sólo es de cuatro?

94. Una compañía obtuvo dos préstamos, los cuales hacen un total de \$30 000 y tiene tasas de interés de 16 y 12%, respectivamente. El interés total para los dos préstamos igualó el interés que la compañía debería pagar si la cantidad completa hubiera sido prestada al 15%. ¿Cuál fue la cantidad de los dos préstamos? Estime la solución de la ecuación en la graficadora. Resuelva la ecuación algebraicamente.

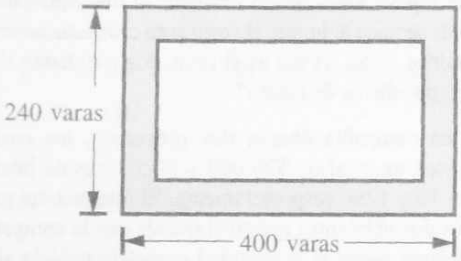
95. El radiador de un automóvil contiene 8 litros de una solución que es 10% de anticongelante y 90% agua. Se piensa reemplazar la solución con una que contenga 25% de anticongelante drenando parte de la solución y sustituyéndola con anticongelante puro. ¿Qué cantidad de anticongelante puro deberá ser agregada? Estime la solución de la ecuación en la graficadora. Resuelva la ecuación algebraicamente.

96. Para obtener una solución que contenga 35% de glicerina se agregó una solución de glicerina al 55% a 25 litros de otra solución de glicerina al 28%. ¿Qué cantidad fue agregada de la solución de glicerina al 55%? Estime la solución de la ecuación en la graficadora. Resuelva la ecuación algebraicamente.

97. Para formar una caja abierta que tenga un volumen de 400 cm^3, de una pieza cuadrada de hoja de lata, se cortan, en cada esquina, cuadrados de 4 cm de lado. Determine la longitud del lado de la pieza original de hoja de lata. Estime la solución de la ecuación en la graficadora. Resuelva la ecuación algebraicamente.

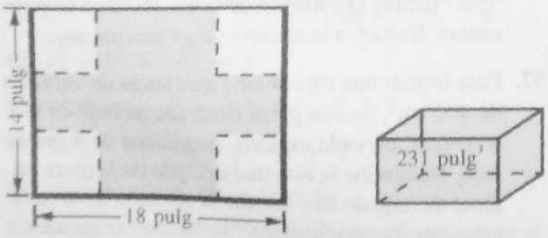


98. Un granjero aró una franja alrededor de un campo rectangular que tiene 400 varas de longitud y 240 varas de ancho. La mitad del campo se encontraba arada cuando el granjero terminó. Determine el ancho de la franja. Estime la solución de la ecuación en la graficadora. Resuelva la ecuación algebraicamente.

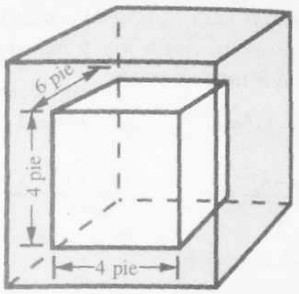


99. Suponga que la pieza cuadrada de hoja de lata del ejercicio 97 tiene un área de 400 cm^2. Con la graficadora determine, aproximando a centésimos de centímetro, la longitud del lado del cuadrado que será cortado para que la caja tenga un volumen de 400 cm^3.

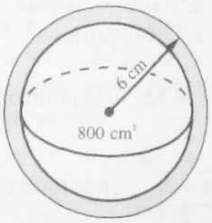
100. Un recipiente metálico abierto, que tiene un volumen de un galón (231 $pulg^3$), se fabrica cortando cuadrados del mismo tamaño de las esquinas de una pieza rectangular metálica de 14 por 18 pulg, y se doblan hacia arriba los lados. Con la graficadora determine, aproximando a centésimos de pulgada, la longitud de un lado de los cuadrados cortados en cada esquina.



101. Una protección rectangular cerrada se fabrica de plomo de grueso uniforme en los lados, tapa y fondo. Las dimensiones internas son 4 pie × 4 pie × 6 pie y se utilizan en la construcción 450 pie^3 de plomo. Empleando la graficadora, encuentre, aproximando a centésimos de pie, el grueso de los lados.



102. Un recipiente esférico hueco, cuya capacidad es 800 cm^3, tiene un radio interno de 6 cm. Empleando la graficadora, halle, aproximando a centésimos de centímetro, el grueso de la pared del recipiente. La fórmula para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



En los ejercicios 103 y 104, resuelva el problema encontrando una desigualdad como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio redactando una conclusión.

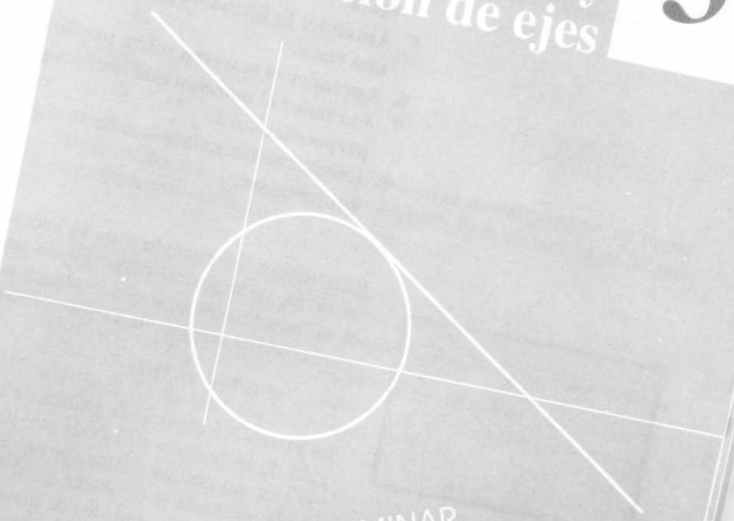
103. El perímetro de un rectángulo no debe ser mayor que 30 cm y su largo debe ser de 8 cm. ¿Cuál es el intervalo de variación para el ancho?

104. Un estudiante deberá tener una calificación promedio de al menos 90 en 5 exámenes para obtener una calificación de A en un curso particular. Si las calificaciones del estudiante en los cuatro primeros exámenes son 93, 95, 79 y 88, ¿cuál deberá ser la calificación del quinto examen para que la calificación del curso sea A?

Capítulo

3

Rectas, parábolas, circumfereneias y traslación de ejes



▶ VISIÓN PRELIMINAR

La geometría analítica es un fundamento para el estudio del Cálculo. El estudio de la geometría analítica, iniciado en la Sección 1.4, se continúa en este capítulo con el material tradicional sobre rectas, parábolas y circunferencias. Las gráficas de estas curvas fueron presentadas anteriormente en el texto, de modo que ellas se tratarán antes del estudio de funciones y gráficas del Capítulo 4. La discusión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas es una extensión natural del estudio de las rectas. La traslación de ejes se utiliza para obtener ecuaciones más generales de algunas curvas en el plano y prepara el camino para las reglas de traslación vertical y horizontal, las cuales serán aplicadas posteriormente a las gráficas de funciones.

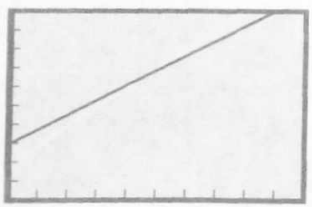
Sumario

3.1 Rectas
3.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
3.3 Parábolas
3.4 Circunferencias
3.5 Traslación de ejes

3.1 RECTAS

OBJETIVOS

1. Definir la pendiente de una recta.
2. Dibujar rectas y determinar sus pendientes.
3. Definir la ecuación de una gráfica.
4. Aprender la forma de punto-pendiente de la ecuación de una recta.
5. Aprender la forma de pendiente-intercepción de la ecuación de una recta.
6. Aprender el teorema sobre pendientes de rectas paralelas.
7. Aprender el teorema que implica pendientes de rectas perpendiculares.
8. Encontrar las ecuaciones de rectas que tienen determinadas propiedades.



[0, 1 000] por [0, 1 000]
$y = 0.75x + 310$
FIGURA 3.1

Recordemos del ejemplo 4 de la Sección 2.1, que si el costo de alquiler de un avión de una plaza en una aerolínea privada es de \$310 para el avión y el piloto, más 75 centavos por milla de vuelo, y si y dólares es el costo de un viaje de x millas, entonces

$$y = 0.75x + 310$$

La Figura 3.1 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección [0,1 000] por [0,1 000], con divisiones de 100 en los ejes. La gráfica parece ser una recta. Que la gráfica sea verdaderamente una recta se establece en el Teorema 2 de esta sección. Observe que por cada 100 unidades de incremento en x, y aumenta en 75 unidades o de manera equivalente, por cada unidad de incremento de x, y se aumenta en 0.75 unidades. Así que la razón de cambio en y respecto al cambio en x es la constante 0.75. Esta razón constante es llamada la **pendiente de la recta.** Ahora se procederá a llegar a una definición formal de la pendiente.

Sea l una recta no vertical y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos sobre l. La Figura 3.2 muestra la mencionada recta. En la figura, R es el punto (x_2, y_1) y los puntos P_1, P_2 y R son los vértices de un triángulo rectángulo; además, $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$ y $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$. El número $y_2 - y_1$ proporciona la medida del cambio en la ordenada de P_1 a P_2, y puede ser positivo, negativo o cero. El número $x_2 - x_1$ da la medida del cambio en la abscisa de P_1 a P_2, y puede ser positivo, o negativo. Debido a que la recta l es no vertical, $x_2 \neq x_1$, y por tanto, $x_2 - x_1$ no puede ser cero. Sea

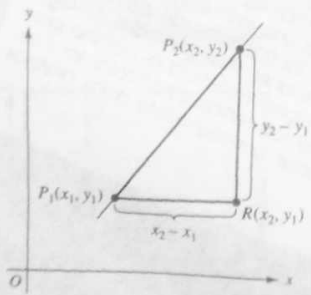


FIGURA 3.2

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

El valor de m calculado de esta ecuación es independiente de la elección de los puntos P_1 y P_2 sobre l. Para demostrar esto, suponga que se

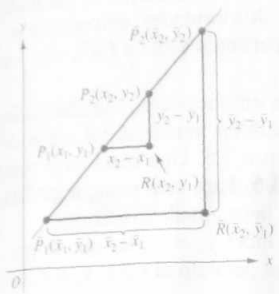


FIGURA 3.3

eligen otros dos puntos distintos $\bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ y $\bar{P}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ de l, y se calcula el número $\bar{m}$ mediante (1),

$$\bar{m} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$$

Se demostrará que $\bar{m} = m$. *Véase* la Figura 3.3. Los triángulos $\bar{P}_1 \bar{R} \bar{P}_2$ y $P_1 R P_2$ son semejantes, así que las longitudes de lados correspondientes son proporcionales. Por tanto

$$\frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o bien,

$$\bar{m} = m$$

Así que el valor de m calculado de (1) es el mismo número, no importando cuáles dos puntos de l son elegidos. Este número m es llamado la *pendiente* de la recta.

DEFINICIÓN **Pendiente**

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera y diferentes sobre la recta l, la cual no es paralela al eje y, entonces, la **pendiente** de l, representada por m, está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se multiplican ambos lados de la ecuación anterior por $x_2 - x_1$, se obtiene

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Se deduce de esta ecuación que si se considera una partícula moviéndose a través de una recta, el cambio en la ordenada de la partícula es igual al producto de la pendiente y al cambio en la abscisa.

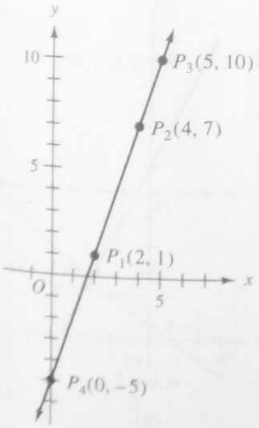


FIGURA 3.4

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Si l es la recta que pasa a través de los puntos $P_1(2, 1)$ y $P_2(4, 7)$ y m es la pendiente de l, entonces

$$m = \frac{7 - 1}{4 - 2}$$
$$= 3$$

Con referencia a la Figura 3.4, si la partícula se está moviendo a través de la recta l, el cambio en la ordenada es tres veces el cambio en la

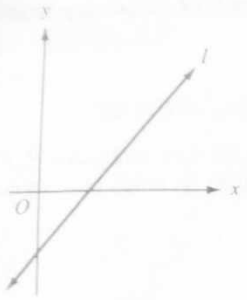


FIGURA 3.5

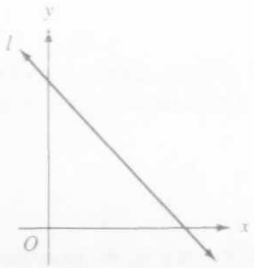


FIGURA 3.6

abscisa. Esto es, si la partícula está en $P_2(4, 7)$ y la abscisa se incrementa en una unidad, entonces la ordenada aumenta tres unidades, y la partícula está en el punto $P_3(5, 10)$. De forma similar, si la partícula está en $P_1(2, 1)$ y la abscisa disminuye en dos unidades, entonces la ordenada disminuirá en seis unidades, y la partícula está en $P_4(0, -5)$. ◂

Si la pendiente de la recta es positiva, entonces como la abscisa de un punto se incrementa, la ordenada también aumenta, tal como se puede ver en la recta mostrada en la Figura 3.5. Una recta cuya pendiente es negativa aparece en la Figura 3.6. Para esta recta, a medida que la abscisa de un punto se incrementa, la ordenada disminuye.

Si una recta es paralela al eje x, entonces $y_2 = y_1$, así que la pendiente de esta recta es cero. Si una recta es paralela al eje y, $x_2 = x_1$, así que la fracción $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ está indeterminada, en virtud de que no se puede dividir entre cero. Por esta razón, las rectas paralelas al eje y están excluidas en la definición de pendiente. Es decir, que la pendiente de una recta vertical no está definida.

▸ EJEMPLO 1 *Gráfica a mano de una recta que pasa por dos puntos y determinación de su pendiente*

Para cada par de puntos, dibuje la recta que pasa a través de ellos y determine su pendiente: **(a)** $A(3, 7)$ y $B(-2, -4)$; **(b)** $A(-2, 5)$ y $B(2, -3)$; **(c)** $A(-3, 4)$ y $B(5, 4)$; **(d)** $A(5, 3)$ y $B(5, -1)$.

Solución Las rectas aparecen en la Figura 3.7 de (a) hasta (d). Se calcula la pendiente a partir de la definición.

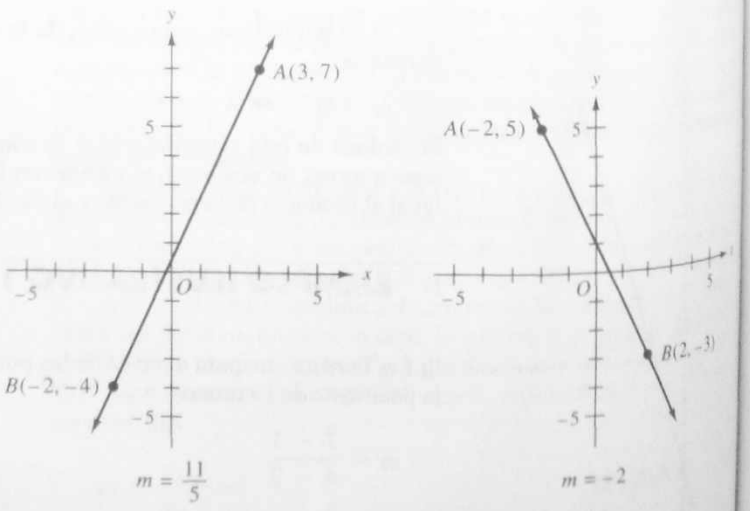
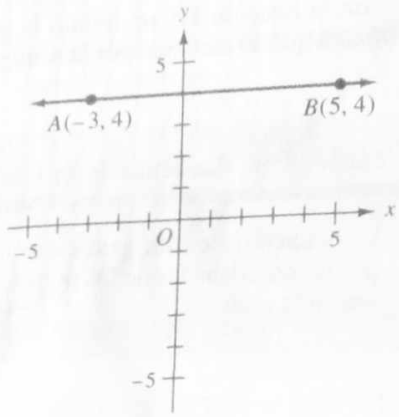
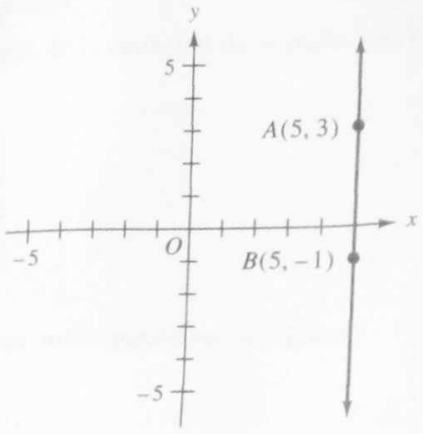


FIGURA 3.7



$m = 0$

(c)



la pendiente está indefinida

(d)

FIGURA 3.7

(a) $m = \dfrac{-4-7}{-2-3} = \dfrac{-11}{-5} = \dfrac{11}{5}$

(b) $m = \dfrac{-3-5}{2-(-2)} = -\dfrac{8}{4} = -2$

(c) $m = \dfrac{4-4}{5-(-3)} = \dfrac{0}{8} = 0$

(d) Debido a que la recta es vertical, la pendiente no está definida. Si se intenta emplear la definición para calcular la pendiente, se obtiene cero en el denominador. ◀

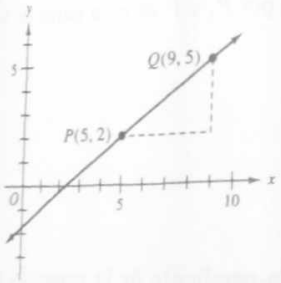


FIGURA 3.8

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

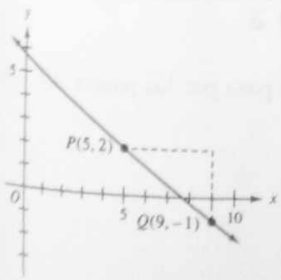


FIGURA 3.9

(a) Suponga que una recta contiene el punto $P(5, 2)$ y su pendiente es $\frac{3}{4}$. Para determinar otro punto sobre la recta, se inicia en el punto P, y debido a que la pendiente es $\frac{3}{4}$, se deben desplazar cuatro unidades a la derecha y tres unidades hacia arriba. Lo anterior da el punto $Q(9, 5)$ que también se encuentra sobre la recta. La recta se dibuja pasando a través de los puntos P y Q, como se muestra en la Figura 3.8.

(b) Si una recta pasa a través del punto $P(5, 2)$ y tiene una pendiente negativa $-\frac{3}{4}$. Se obtiene otro punto sobre la recta desplazándose a partir de P cuatro unidades a la derecha y tres unidades hacia abajo. Lo anterior nos da el punto $Q(9, -1)$. La Figura 3.9 muestra la recta que pasa por los puntos P y Q. ◀

En la Sección 1.5 se definió la gráfica de una ecuación, ahora se explicará qué se entiende por la *ecuación de una gráfica.*

DEFINICIÓN **La ecuación de una gráfica**

La **ecuación de una gráfica** es una ecuación que es satisfecha por las coordenadas de los puntos y solamente los puntos que están en la gráfica.

A partir de la definición anterior, se puede decir que la ecuación de una gráfica tiene las propiedades siguientes:

1. Si un punto $P(x, y)$ está sobre la gráfica, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación.
2. Si un punto $P(x, y)$ no se encuentra sobre la gráfica, entonces sus coordenadas no satisfacen la ecuación.

A fin de obtener la ecuación de una recta, se utiliza el hecho de que el punto $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente m determinan una recta única. Sea $P(x, y)$ cualquier punto sobre la recta excepto P_1. Entonces, debido a que la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m, a partir de la definición de pendiente se tiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

o, equivalentemente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta ecuación se llama la **forma punto-pendiente de la ecuación de una recta.** Esta forma proporciona la ecuación de una recta si un punto $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente de la recta son conocidos.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, -3)$ y $B(-2, 3)$, primeramente calcule m.

$$m = \frac{3 - (-3)}{-2 - 6}$$

$$= \frac{6}{-8}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

Si emplea la forma de punto-pendiente de la ecuación de la recta con A como P_1, se tiene

$$y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 6)$$
$$4y + 12 = -3x + 18$$
$$3x + 4y - 6 = 0$$

Si B se considera como P_1, en la forma punto-pendiente, se obtiene

$$y - 3 = -\frac{3}{4}[x - (-2)]$$
$$4y - 12 = -3x - 6$$
$$3x + 4y - 6 = 0$$

la cual, por supuesto, es la misma ecuación. ◀

Si en la forma de punto-pendiente se elige el punto particular $(0, b)$, que es el punto donde la recta intersecta al eje y para el punto (x_1, y_1), se tiene

$$y - b = m(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = mx + b}$$

El número b, que es la ordenada del punto donde la recta intersecta al eje y es la **intercepción y** (u **ordenada al origen**) de la recta. Consecuentemente, la ecuación anterior se llama **forma pendiente-intercepción** de la ecuación de una recta. Esta forma es especialmente útil debido a que nos permite determinar la pendiente de una recta a partir de su ecuación. También es importante porque expresa explícitamente la coordenada y de un punto de la recta en términos de su coordenada x.

► EJEMPLO 2 *Determinación de la pendiente de una recta a partir de su ecuación*

Encuentre la pendiente de la recta que tiene la ecuación siguiente

$$6x + 5y - 7 = 0$$

Solución Resuelva la ecuación para y.

$$5y = -6x + 7$$
$$y = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$$

Esta ecuación es de la forma pendiente-intercepción donde $m = -\frac{6}{5}$, $b = \frac{7}{5}$. Por tanto, la pendiente es $-\frac{6}{5}$.

En virtud de que la pendiente de una recta vertical no está definida, no puede aplicarse la forma punto-pendiente para obtener su ecuación. En su lugar, se utiliza el teorema siguiente, el cual también nos proporciona la ecuación de una recta horizontal.

TEOREMA 1

(i) La ecuación de una recta vertical que tiene a a como su intercepción x

$$x = a$$

(ii) La ecuación de la recta horizontal que tiene a b como su intercepción y es

$$y = b$$

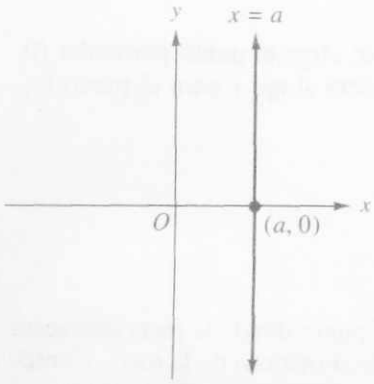


FIGURA 3.10

Demostración

(i) La Figura 3.10 muestra la recta vertical que intersecta el eje de las x en el punto $(a, 0)$. Esta recta contiene sólo los puntos que tienen la misma abscisa. Así que $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la recta si y sólo si

$$x = a$$

(ii) La recta horizontal que intersecta el eje y en el punto $(0, b)$ aparece en la Figura 3.11. Para esta recta $m = 0$. Por tanto, de la forma pendiente-intercepción la ecuación de esta recta es

$$y = b$$

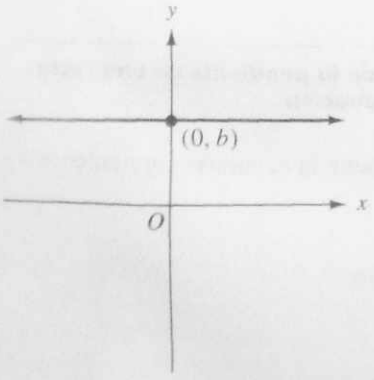


FIGURA 3.11

Se ha demostrado que la ecuación de una recta no vertical es de la forma $y = mx + b$, y la ecuación de una recta vertical es de la forma $x = a$. Dado que cada una de estas ecuaciones es un caso especial de la ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

donde A, B y C son constantes, y A y B no son a la vez cero, se deduce que cualquier recta tiene una ecuación de la forma (2). Lo inverso de este hecho está dado por el teorema siguiente.

TEOREMA 2

La gráfica de la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes, y donde A y B no son ambas cero, es una recta.

La demostración de este teorema se deja como un ejercicio. *Véase* el ejercicio 55.

Como la gráfica de (2) es una recta, se le llama **ecuación lineal;** es la ecuación general de primer grado en x y y.

A fin de trazar una recta en una graficadora, primero es necesario escribir su ecuación en la forma pendiente-intercepción y proceder como se hizo en la Sección 2.1. Para dibujar una recta a mano, se necesita únicamente determinar las coordenadas de dos puntos sobre la recta, localizar los puntos y dibujar la recta. Dos puntos cualesquiera serán suficientes, pero por conveniencia normalmente se eligen los dos puntos donde la recta intersecta a los ejes.

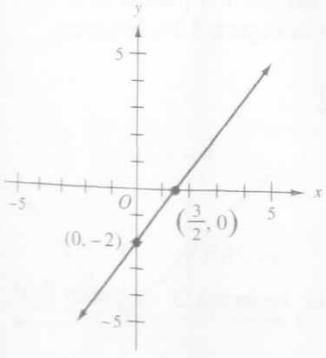


FIGURA 3.12

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Para dibujar la recta que tiene la ecuación

$$4x - 3y = 6$$

primero se determina la intercepción x, o sea a, y la intercepción y, o sea b. Al sustituir y por 0 en la ecuación se determina que $a = \frac{3}{2}$. Si sustituye x por 0, obtiene $b = -2$. Así, la gráfica de la recta se muestra en la Figura 3.12. ◀

Una aplicación del concepto de pendiente está dada en el teorema siguiente.

TEOREMA 3

Si l_1 y l_2 son dos rectas no verticales distintas, las cuales tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

Demostración Dadas las ecuaciones de l_1 y l_2, respectivamente,

$$y = m_1 x + b_1 \quad \text{y} \quad y = m_2 x + b_2$$

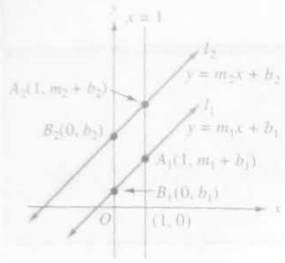


FIGURA 3.13

La Figura 3.13 muestra las dos rectas intersectando el eje y en los puntos $B_1(0, b_1)$ y $B_2(0, b_2)$. Dado que la recta vertical $x = 1$ intersecta a l_1 en el punto $A_1(1, m_1 + b_1)$ y a l_2 en el punto $A_2(1, m_2 + b_2)$. Entonces

$$|\overline{B_1B_2}| = b_2 - b_1 \quad \text{y} \quad |\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

Las dos rectas son paralelas si y sólo si las distancias verticales $|\overline{B_1B_2}|$ y $|\overline{A_1A_2}|$ son iguales; es decir, que l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si

$$b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$
$$b_2 - b_1 = m_2 + b_2 - m_1 - b_1$$
$$m_1 = m_2$$

Así, l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Siendo l_1 la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, -6)$ y m_1 es la pendiente de l_1; y si l_2 es la recta que pasa por los puntos $C(2, -5)$ y $D(-1, 7)$ y m_2 es la pendiente de l_2. *Véase* la Figura 3.14. Entonces

$$m_1 = \frac{-6 - 2}{3 - 1} \qquad m_2 = \frac{7 - (-5)}{-1 - 2}$$
$$= \frac{-8}{2} \qquad = \frac{12}{-3}$$
$$= -4 \qquad = -4$$

Debido a que $m_1 = m_2$, basándonos en el Teorema 3, se puede decir que l_1 y l_2 son paralelas.

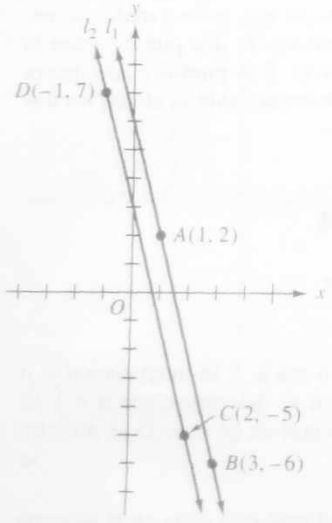


FIGURA 3.14

Dos puntos distintos determinan una recta. Tres puntos distintos pueden o no estar sobre la misma recta. Si tres o más puntos están en la misma recta, se dice que son **colineales.** De lo anterior, se afirma que tres puntos, A, B y C, son colineales si y sólo si la recta que pasa por los puntos A y B es la misma que la recta que pasa a través de los puntos B y C. Debido a que la recta que pasa por A y B y la recta que pasa de B y C ambas contienen el punto B, éstos estarán en la misma recta si y sólo si sus pendientes son iguales.

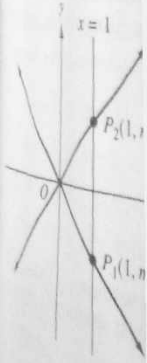


FIGURA 3.15

▸ EJEMPLO 3 *Empleo de las pendientes para determinar si tres puntos dados son colineales*

Determine, por medio de las pendientes, si los puntos $A(-3, -4)$, $B(2, -1)$ y $C(7, 2)$ son colineales.

Solución Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por A y B y m_2 es la pendiente de la recta que pasa por B y C, entonces

$$m_1 = \frac{-1 - (-4)}{2 - (-3)} = \frac{3}{5} \qquad m_2 = \frac{2 - (-1)}{7 - 2} = \frac{3}{5}$$

De aquí, $m_1 = m_2$. Por tanto, la recta que pasa por los puntos A y B y la recta que pasa por B y C tienen la misma pendiente y además contienen al punto común B. Así, ambas son la misma recta, y en consecuencia, A, B y C son colineales. ◀

A continuación, se enunciará y demostrará un teorema relativo a las pendientes de dos rectas perpendiculares.

TEOREMA 4

Dos rectas no verticales l_1 y l_2 cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

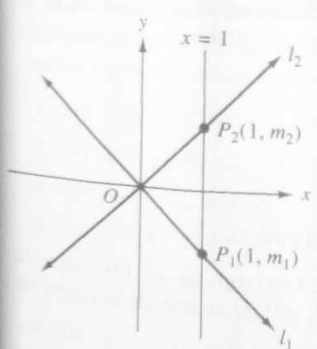


FIGURA 3.15

Demostración Elija los ejes coordenados de tal forma que el origen es el punto de intersección de l_1 y l_2. *Véase* la Figura 3.15. Dado que ni l_1 ni l_2 son verticales, ambas intersectan la recta $x = 1$ en los puntos P_1 y P_2, respectivamente. La abscisa de ambos puntos P_1 y P_2 es 1. Sea $\bar{y}$ la ordenada de P_1. Como l_1 contiene los puntos $(0, 0)$ y $(1, \bar{y})$ y su pendiente es m_1, entonces

$$m_1 = \frac{\bar{y} - 0}{1 - 0}$$

Así, $\bar{y} = m_1$. De manera semejante, se demuestra que la ordenada de P_2 es igual a m_2. Del teorema de Pitágoras y su inverso, el triángulo P_1OP_2 es un triángulo rectángulo si y sólo si

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 \tag{3}$$

Al aplicar la fórmula de distancia, se obtiene

$$|\overline{OP_1}|^2 = (1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 = 1 + m_1^2 \qquad |\overline{OP_2}|^2 = (1 - 0)^2 + (m_2 - 0)^2 = 1 + m_2^2$$

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

Si se sustituye en (3), se puede concluir que P_1OP_2 es un triángulo rectángulo si y sólo si

$$1 + m_1^2 + 1 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$
$$2 = -2m_1m_2$$
$$m_1m_2 = -1$$

Porque $m_1m_2 = -1$ es equivalente a

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

El Teorema 4 postula que dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una de ellas es el recíproco negativo de la pendiente de la otra.

FIGURA

► EJEMPLO 4 *Determinar si la ecuación de una recta que pasa por un punto dado es paralela o perpendicular a una recta dada*

Dada la recta l que tiene la ecuación

$$5x + 4y - 20 = 0$$

hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es (**a**) paralela a l, y (**b**) perpendicular a l.

Solución Primero se determina la pendiente de l escribiendo la ecuación en la forma pendiente-intercepción. Al resolver la ecuación para y, se tiene

$$4y = -5x + 20$$
$$y = -\frac{5}{4}x + 5$$

La pendiente de l es el coeficiente de x, el cual es $-\frac{5}{4}$.

(**a**) La pendiente de una recta paralela a l es también $-\frac{5}{4}$. Dado que la recta requerida contiene el punto $(2, -3)$, si se utiliza la forma de punto-pendiente, se obtiene

$$y - (-3) = -\frac{5}{4}(x - 2)$$
$$4y + 12 = -5x + 10$$
$$5x + 4y + 2 = 0$$

(**b**) La pendiente de una recta perpendicular a l es el recíproco negativo de $-\frac{5}{4}$ el cual es $\frac{4}{5}$. A partir de la forma de punto-pendiente, la ecuación de la recta que pasa por $(2, -3)$ y con pendiente $\frac{4}{5}$ es

$$y - (-3) = \frac{4}{5}(x - 2)$$
$$5y + 15 = 4x - 8$$
$$4x - 5y - 23 = 0$$

▶ EJEMPLO 5 *Demostración de que cuatro puntos dados son los vértices de un rectángulo*

Demuestre por medio de las pendientes que los cuatro puntos $A(6, 2)$, $B(8, 6)$, $C(4, 8)$ y $D(2, 4)$ son los vértices de un rectángulo.

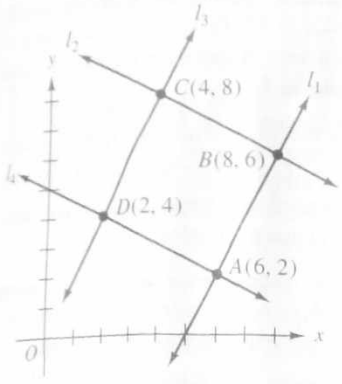


FIGURA 3.16

Solución *Véase* la Figura 3.16, donde l_1 es la recta que pasa por A y B, l_2 es la recta que pasa pro B y C, l_3 es la recta que pasa por D y C, y l_4 es la recta que pasa a través de A y D; m_1, m_2, m_3 y m_4 son sus pendientes respectivas.

$$m_1 = \frac{6-2}{8-6} = 2 \qquad m_2 = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2} \qquad m_3 = \frac{8-4}{4-2} = 2 \qquad m_4 = \frac{4-2}{2-6} = -\frac{1}{2}$$

Dado que $m_1 = m_3$, l_1 es paralela a l_3; y debido a que $m_2 = m_4$, l_2 es paralela a l_4. Como $m_1\, m_2 = -1$, l_1 y l_2 son perpendiculares. Por tanto, el cuadrilátero tiene sus lados opuestos paralelos, y un par de lados adyacentes perpendiculares. En consecuencia, el cuadrilátero es un rectángulo. ◀

EJERCICIOS 3.1

En los ejercicios 1 a 6, dibuje la recta que pasa por los puntos A y B y determine la pendiente de la recta.

1. (a) $A(1, 4)$, $B(6, 5)$ (b) $A(2, -3)$, $B(-4, 3)$
2. (a) $A(5, 2)$, $B(-2, -3)$ (b) $A(-4, 2)$, $B(8, 5)$
3. (a) $A(-4, 3)$, $B(0, 0)$ (b) $A(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $B(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$
4. (a) $A(7, 0)$, $B(0, -6)$ (b) $A(-\frac{3}{4}, \frac{1}{8})$, $B(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$
5. (a) $A(1, 5)$, $B(-2, 5)$
   (b) $A(-2.1, 0.3)$, $B(2.3, 1.4)$
6. (a) $A(3, -5)$, $B(3, 4)$
   (b) $A(5.2, -3.5)$, $B(-6.3, -1.4)$

En los ejercicios 7 y 8, dibuje la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

7. (a) $P(3, 4)$, $m = \frac{2}{5}$ (b) $P(-1, 6)$, $m = -3$
8. (a) $P(4, 3)$, $m = 2$ (b) $P(2, -5)$, $m = -\frac{4}{3}$

En los ejercicios 9 a 20, encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones.

9. (a) La pendiente es 4 y pasa por el punto $(2, -3)$;
   (b) pasa por los puntos $(-1, -5)$ y $(3, 6)$.
10. (a) La pendiente es -2 y pasa por el punto $(-4, 3)$;
    (b) pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(-5, 4)$.
11. (a) La pendiente es $-\frac{2}{3}$ y la intercepción y es 1;
    (b) la pendiente es 2 y la intercepción x es $-\frac{4}{3}$.
12. (a) La pendiente es $\frac{3}{5}$ y la intercepción y es -4;
    (b) la pendiente es -2 y la intercepción x es 4.
13. (a) Pasa por el punto $(1, -7)$ y es paralela al eje x;
    (b) pasa por el punto $(2, 6)$ y es paralela al eje y.
14. (a) Pasa por el punto $(-5, 2)$ y es paralela al eje x;
    (b) pasa por el punto $(-3, -4)$ y es paralela al eje y.
15. (a) La intercepción x es -3 y la intercepción y es 4;
    (b) pasa por el origen y bisecta el ángulo entre los ejes en el primero y tercer cuadrante.
16. (a) La intercepción x es 5 y la intercepción y es -6;
    (b) pasa por el origen y bisecta el ángulo entre los ejes en el segundo y cuarto cuadrantes.
17. Pasa por el punto $(-2, 3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x - y - 2 = 0$.
18. Pasa por el punto $(1, 4)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 7 = 0$.

19. Pasa por el punto (2, 4) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x - 5y + 10 = 0$.

20. Pasa por el origen y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 6 = 0$.

En los ejercicios 21 a 24, encuentre la pendiente y la intercepción y de la recta que tiene la ecuación dada y dibuje la recta.

21. **(a)** $x + 3y - 6 = 0$ **(b)** $4y - 9 = 0$

22. **(a)** $8x - 4y = 5$ **(b)** $3y - 5 = 0$

23. **(a)** $7x - 8y = 0$ **(b)** $x = 6 - 2y$

24. **(a)** $x = 4y - 2$ **(b)** $4x = 3y$

En los ejercicios 25 y 26, encuentre la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos, escriba la ecuación en la forma pendiente-intercepción; y dibújela

25. (1, 3) y (2, –2) **26.** (3, –5) y (1, –2)

27. Demuestre que las rectas que tienen las ecuaciones $3x + 5y + 7 = 0$ y $6x + 10y - 5 = 0$ son paralelas, y dibuje sus gráficas.

28. Compruebe que las rectas que tienen las ecuaciones $4x - 3y + 12 = 0$ y $8x - 6y + 15 = 0$ son paralelas, y dibuje sus gráficas.

29. Demuestre que las rectas que tienen las ecuaciones $2x - 3y + 6 = 0$ y $3x + 2y - 12 = 0$ son perpendiculares, y dibuje sus gráficas.

30. Pruebe que las rectas que tienen las ecuaciones $2y = 10 - 5x$ y $5y = 2x + 20$ son perpendiculares, y dibuje sus gráficas.

31. Encuentre el valor de k tal que las rectas cuyas ecuaciones son $3x + 6ky = 7$ y $9kx + 8y = 15$ sean paralelas.

32. Halle el valor de k tal que las rectas cuyas ecuaciones son $3kx + 8y = 5$ y $6y - 4kx = -1$ sean perpendiculares.

En los ejercicios 33 a 36, determine por medio de las pendientes si los puntos son colineales.

33. **(a)** (2, 3), (−4, −7), (5, 8)
(b) (2, −1), (1, 1), (3, 4)

34. **(a)** (4, 6), (1, 2), (−5, −4)
(b) (−3, 6), (3, 2), (9, −2)

35. **(a)** (2, 5), (−1, 4), (3, −2)
(b) (0, 2), (−3, −1), (4, 6)

36. **(a)** (−1, 2), (7, 4), (2, −1)
(b) (4, −9), (4, 1), (4, 8)

37. Demuestre mediante pendientes que los cuatro puntos (0, 0), (−2, 1), (3, 4) y (5, 3) son los vértices de un paralelogramo (cuadrilátero con los lados opuestos paralelos).

38. Compruebe por medio de pendientes que los cuatro puntos (−4, −1), $(3, \frac{8}{3})$, (8, −4) y (2, −9) son los vértices de un cuadrilátero trapezoidal (cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos).

39. Pruebe por medio de pendientes que los tres puntos (3, 1), (6, 0) y (4, 4) son los vértices de un triángulo rectángulo, y encuentre el área del triángulo.

40. Demuestre por medio de pendientes que los puntos (−6, 1), (−4, 6), (4, −3) y (6, 2) son los vértices de un rectángulo.

41. El fabricante de un artículo de primera necesidad tiene un gasto total a la semana de 3 000 dólares y un costo de manufactura de $25 por unidad. **(a)** Si x unidades se producen semanalmente y y dólares es el costo semanal total, escriba una ecuación que relacione a x y y. **(b)** Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).

42. El gasto total de un fabricante consiste en $20 por unidad manufacturada y un gasto general de fabricación diario fijo. **(a)** Si el costo total para producir 200 unidades en un día es $4 500, determine el gasto general de fabricación fijo diario. **(b)** Si x unidades se producen por día y y dólares es el costo total diario. Escriba una ecuación que involucre a x y y. **(c)** Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (b).

43. Haga el ejercicio 42, considerando ahora que el costo de manufactura es $30 por unidad y el costo total para producir 200 unidades en un día es $6 600.

44. La gráfica de la ecuación que relaciona las temperaturas en grados Celsius y en grados Fahrenheit es una recta. El agua se congela a 0°C y a 32°F, el agua hierve a 100°C y 212°F. **(a)** Si y grados Fahrenheit corresponden a x grados Celsius, escriba una ecuación que involucre a x y y. **(b)** Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso **(a)**. **(c)** ¿Cuál es la

temperatura Fahrenheit correspondiente a 20°C? (d) ¿Cuál es la temperatura Celsius correspondiente a 86°F?

45. Encuentre la ordenada del punto cuya abscisa es –3 y que es colineal con los puntos (3, 2) y (0, 5).

46. La ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a y b son las intercepciones x y y, respectivamente, es la *forma intercepción* de la ecuación de una recta. Explique cómo puede obtenerse esta forma a partir de la forma pendiente-intercepción y la relación entre la pendiente y las intercepciones.

47. Si se conocen las coordenadas de los tres vértices A, B y C de un triángulo, explique cómo podría encontrarse la ecuación de la mediana que va de A al lado formado por B y C.

48. Con respecto al triángulo del ejercicio 47, explique cómo podría determinarse la ecuación de la altura que va del lado A al lado formado por B y C.

49. Utilice la explicación del ejercicio 47 para encontrar las ecuaciones de las tres medianas del triángulo cuyos vértices son (3, –2), (2, 4) y (–1, 1).

50. Emplee la explicación del ejercicio 48 para hallar las ecuaciones de las tres alturas del triángulo del ejercicio 49.

En los ejercicios 51 a 54, utilice la geometría analítica para demostrar el teorema dado de geometría plana.

51. Las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente.

52. Los segmentos de recta que unen puntos medios consecutivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

53. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan mutuamente, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

54. Las diagonales de un rombo (un paralelogramo equilátero) son perpendiculares.

55. Demuestre el Teorema 2: La gráfica de la ecuación $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes y donde A y B no pueden ser simultáneamente cero, es una recta. *Sugerencia:* considere dos casos $B \neq 0$ y $B = 0$. Si $B \neq 0$, demuestre que la ecuación es la de una recta que tiene una pendiente $-A/B$ y la intercepción y es $-C/B$. Si $B = 0$, demuestre que la ecuación es la de una recta vertical.

3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

OBJETIVOS

1. **Dibujar y trazar las gráficas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en el mismo sistema coordenado.**
2. **Determinar gráfica y algebraicamente si los sistemas de ecuaciones son (i) consistentes e independientes, (ii) inconsistentes, o (iii) dependientes.**
3. **Resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución.**
4. **Resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación.**
5. **Resolver un sistema de ecuaciones lineales que contiene a los recíprocos de las incógnitas.**
6. **Resolver problemas que tienen un sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático.**

Muchas aplicaciones de las matemáticas conducen a más de una ecuación con diversas incógnitas. Las ecuaciones resultantes son llamadas **sistema de ecuaciones** y el conjunto solución consiste de todas las soluciones comunes para las ecuaciones en el sistema.

En la Sección 3.1, se ha demostrado que la gráfica de una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

es una recta y todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación son las coordenadas de puntos que están sobre la recta. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y puede escribirse como

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son números reales. La llave colocada en el lado izquierdo se utiliza para indicar que las dos ecuaciones forman un sistema. Si un par ordenado (x, y) satisface un sistema de dos ecuaciones lineales, el punto correspondiente a (x, y) deberá estar en las dos rectas, que son las gráficas de las ecuaciones.

Para resolver, con la graficadora, un sistema de dos ecuaciones lineales, trace las gráficas de ambas rectas en el mismo rectángulo de inspección. Si la intersección de las rectas es un punto, las coordenadas de tal punto forman el par ordenado que es la solución del sistema.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

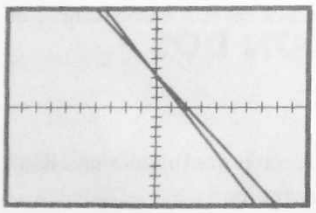
Un sistema particular de dos ecuaciones lineales es

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$$

La Figura 3.17 muestra las gráficas de las dos rectas del sistema. De la figura, aparentemente ambas rectas se intersectan en un punto. Este punto $(-1, 5)$ puede ser verificado por sustitución en las ecuaciones como sigue:

$$2(-1) + 5 = 3$$
$$5(-1) + 3(5) = 10$$

El único par ordenado que es común en los conjuntos solución de las dos ecuaciones es $(-1, 5)$. Por lo que el conjunto solución del sistema es $\{(-1, 5)\}$.



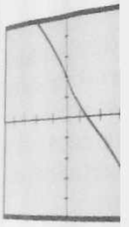
[−10, 10] por [−10, 10]
$2x + y = 3$ y $5x + 3y = 10$
FIGURA 3.17

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

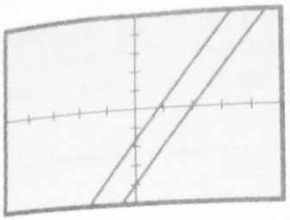
Considere el sistema

$$\begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

[−5, 5] por [−5, 5]
$6x - 3y = 5$ y $2x - y =$
FIGURA 3.18



[−5, 5] por [−5, 5]
$3x + 2y = 4$ y $6x + 4y$
FIGURA 3.19



[−5, 5] por [−5, 5]
$6x - 3y = 5$ y $2x - y = 4$
FIGURA 3.18

Como se puede ver en la Figura 3.18, las rectas que tienen estas ecuaciones parecen ser paralelas. Es sencillo demostrar que las rectas son paralelas escribiendo cada una de las ecuaciones en la forma pendiente-intercepción $y = mx + b$, al despejar y en cada ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= 5 & \qquad 2x - y &= 4 \\ -3y &= -6x + 5 & \qquad -y &= -2x + 4 \\ y &= 2x - \frac{5}{3} & \qquad y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

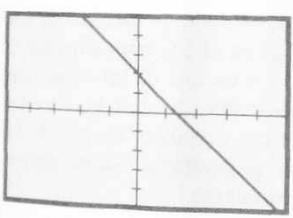
Para cada ecuación la pendiente $m = 2$. Las dos rectas no son la misma debido a que las intercepciones y, $-\frac{5}{3}$ y -4, no son iguales. Por tanto, las rectas son paralelas y no tienen un punto en común. El conjunto solución del sistema es $\varnothing$. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Para el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$$

las gráficas de ambas ecuaciones es la misma recta. *Véase* la Figura 3.19. Este hecho es evidente cuando las ecuaciones se escriben en la forma pendiente-intercepción. Al despejar y en cada una de las ecuaciones, se tiene



[−5, 5] por [−5, 5]
$3x + 2y = 4$ y $6x + 4y = 8$
FIGURA 3.19

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 & \qquad 6x + 4y &= 8 \\ 2y &= -3x + 4 & \qquad 4y &= -6x + 8 \\ y &= -\frac{3}{2}x + 2 & \qquad y &= -\frac{3}{2}x + 2 \end{aligned}$$

◀

Tres posibilidades acerca de los conjuntos solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Posibilidad 1. La intersección de los dos conjuntos solución contiene exactamente un par ordenado, como en el ejemplo ilustrativo 1. Las gráficas se cortan exactamente en un punto. Para este caso, se dice que las ecuaciones son **consistentes** e **independientes.**

Posibilidad 2. La intersección de los dos conjuntos solución es el conjunto vacío, como en el ejemplo ilustrativo 2. Las gráficas son rectas paralelas. Dada esta posibilidad, se dice que las ecuaciones son **inconsistentes.**

Posibilidad 3. Los conjuntos solución de las dos ecuaciones son iguales, como en el ejemplo ilustrativo 3. Las gráficas son la misma recta. Para este caso, se dice que las ecuaciones son **dependientes.**

Cuando dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son consistentes e independientes, como en el ejemplo ilustrativo 1, la solución obtenida de las gráficas es únicamente una aproximación, debido a que la lectura de números a partir de gráficas depende de la medición. Para obtener soluciones exactas de sistemas de ecuaciones lineales, se deberán emplear métodos algebraicos. Estos métodos consisten en reemplazar el sistema dado por un **sistema equivalente,** el cual tiene el mismo conjunto solución.

Si cualquier ecuación en un sistema dado se reemplaza por una ecuación equivalente, el sistema resultante es equivalente al sistema dado. Además, si cualesquiera de las dos ecuaciones de un sistema dado son intercambiadas, el sistema resultante es equivalente al sistema dado.

Un método para encontrar el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es llamado **método de sustitución.** Para cualquier par ordenado (x, y) en el conjunto solución de un sistema de ecuaciones, las variables x y y en una de las ecuaciones representan los mismos números como las variables x y y en la otra ecuación. Por tanto, si se reemplaza una de las variables en una de las ecuaciones por su igual de la otra ecuación, se tendrá un sistema equivalente. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento.

▸ EJEMPLO 1 *Solución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución*

Utilice el método de sustitución para encontrar el conjunto solución del sistema en el ejemplo ilustrativo 1:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$$

Solución Al resolver la primera ecuación para y, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$$

Si sustituye y en la segunda ecuación por su igual $3 - 2x$, de la primera ecuación, tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 5x + 3(3 - 2x) = 10 \end{cases}$$

Al simplificar la segunda ecuación, resulta

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ -x + 9 = 10 \end{cases}$$

Al despejar x en la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x = -1 \end{cases}$$

Finalmente, si se sustituye en la primera ecuación el valor de x obtenido de la segunda ecuación, se tiene

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al dado originalmente. De donde el conjunto solución es $\{(-1, 5)\}$. ◄

Otro enfoque para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales se llama **método de eliminación.** En este método se sustituye una de las ecuaciones del sistema por la ecuación obtenida de la manera siguiente: multiplicando cada ecuación por un número real diferente de cero, y sumando las ecuaciones resultantes. Así, se obtiene un sistema equivalente. (Debe entenderse que "multiplicar una ecuación por un número" significa multiplicar cada lado de la ecuación por el número y "sumar las dos ecuaciones" significa sumar los lados correspondientes de las ecuaciones.) Se eligen los factores de tal manera que al sumar las ecuaciones resultantes se elimine una de las incógnitas. En el ejemplo siguiente se mostrará el método de eliminación.

► EJEMPLO 2 *Solución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación*

Mediante el método de eliminación encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones del ejemplo 1.

Solución El objetivo es eliminar una de las incógnitas del sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$$

Observe que el coeficiente de y es 1 en la primera ecuación y 3 en la segunda ecuación. A fin de obtener una ecuación que no contenga a y, se debe sustituir la segunda ecuación por la suma de la segunda ecuación

y –3 veces la primera. Para iniciar, se multiplica la primera ecuación por –3 y se escribe el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -6x - 3y = -9 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene el resultado siguiente:

$$\begin{array}{r} -6x - 3y = -9 \\ 5x + 3y = 10 \\ \hline -x \quad\quad = 1 \end{array}$$

Con esta ecuación y la primera del sistema original se tiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x = 1 \end{cases}$$

Si ahora se multiplican ambos lados de la segunda ecuación por –1, se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Enseguida se sustituye x por –1 en la primera ecuación para obtener

$$\begin{cases} 2(-1) + y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{(-1, 5)\}$, el cual concuerda con el resultado del ejemplo 1.

Los dos ejemplos ilustrativos siguientes muestran qué pasa cuando se emplea el método de eliminación si las dos ecuaciones en el sistema dado son inconsistentes o dependientes.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

El sistema del ejemplo ilustrativo 2 es

$$\begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Escriba el sistema equivalente que se obtiene al multiplicar la segunda ecuación por –3,

$$\begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al siguiente, se consigue sustituyendo la segunda ecuación por la suma de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x - 3y = 5 \\ 0 = -7 \end{cases}$$

El conjunto solución de este último sistema es el conjunto vacío $\varnothing$ debido a que no existe un par ordenado (x, y) para el cual la segunda ecuación sea un enunciado verdadero. De donde el conjunto solución del sistema dado es $\varnothing$. Las dos ecuaciones son inconsistentes. ◄

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

El sistema del ejemplo ilustrativo 3 es

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$$

Si se multiplica la segunda ecuación por $-\frac{1}{2}$, se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Al sustituir la segunda ecuación por la suma de estas dos ecuaciones, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación de este último sistema es una identidad, la cual es un enunciado verdadero para cualquier par ordenado (x, y). Por tanto, el conjunto solución del sistema es el mismo que el conjunto solución de la primera ecuación. El conjunto solución puede escribirse como $\{(x, y) \mid 3x + 2y = 4\}$. Las ecuaciones son dependientes. Otra manera de indicar el conjunto solución proviene de la resolución para x en función de y de la ecuación $3x + 2y = 4$, obteniéndose

$$x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}y$$

Entonces, el conjunto solución es el conjunto de pares ordenados $\{(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}y, y)\}$. Alternativamente, tomando y como cualquier número

real t, x es igual a $\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t$, y el conjunto solución se escribe como $\{(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t, t)\}$.

El sistema en el ejemplo siguiente, se dice que es lineal en los recíprocos de x y y.

▶ EJEMPLO 3 *Solución de un sistema de ecuaciones lineales en los recíprocos de x y y*

Encuentre el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 4 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{y} = -3 \end{cases}$$

Solución El sistema se puede representar como

$$\begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{x}\right) + 3\left(\dfrac{1}{y}\right) = 4 \\ 2\left(\dfrac{1}{x}\right) - 6\left(\dfrac{1}{y}\right) = -3 \end{cases}$$

Así que el sistema es lineal en $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$. Si se hacen las sustituciones de $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} 4u + 3v = 4 \\ 2u - 6v = -3 \end{cases}$$

A fin de resolver este sistema, primero se multiplica la segunda ecuación por –2 y se obtiene

$$\begin{cases} 4u + 3v = 4 \\ -4u + 12v = 6 \end{cases}$$

Ahora, se sustituye la segunda ecuación por la suma de las dos ecuaciones. Se consigue

$$\begin{cases} 4u + 3v = 4 \\ 15v = 10 \end{cases}$$

Al resolver la segunda ecuación para v, se tiene

$$\begin{cases} 4u + 3v = 4 \\ v = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Si se sustituye $\frac{2}{3}$ por v en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{cases} 4u + 3\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \\ v = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4u + 2 = 4 \\ v = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4u = 2 \\ v = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, la solución del sistema (II) es $u = \frac{1}{2}$ y $v = \frac{2}{3}$. Para obtener la solución del sistema (I), se sustituyen u y v por $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$, respectivamente. Entonces

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$$

$$x = 2 \qquad y = \frac{3}{2}$$

Por lo que el conjunto solución del sistema (I) es $\{(2, \frac{3}{2})\}$. ◀

En el ejemplo 3, las variables son tratadas como $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$. Si cada una de las ecuaciones en el sistema (I) se multiplica por xy (el mínimo común divisor), se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 4y + 3x = 4xy \\ 2y - 6x = -3xy \end{cases} \qquad \textbf{(III)}$$

Debido a que $4xy$ y $-3xy$ son términos de segundo grado, las ecuaciones en el sistema (III) son de segundo grado. Para resolver este sistema para x y y se requiere un procedimiento más complicado que el usado en el ejemplo 3. Observe que (0, 0) es una solución para el sistema (III), mientras que las ecuaciones del sistema (I) no están definidas cuando $x = 0$ o $y = 0$.

En las discusiones previas sobre enunciados de problemas, se obtuvo una sola ecuación como modelo matemático para representar

cada una de las incógnitas empleando únicamente una variable. En esta sección se obtendrá un sistema de ecuaciones como modelo matemático usando variables diferentes para representar cada una de las incógnitas. Observe que algunos problemas que tienen un sistema de dos ecuaciones lineales como modelo matemático, también pueden ser resueltos utilizando como modelo matemático una ecuación lineal con una sola variable.

▶ EJEMPLO 4 *Resolución de un problema que tiene un sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático*

Dos libras de té de la India y 5 lb de té de China pueden comprarse por $50.16, y 3 lb de té de la India y 4 lb de té de China cuestan $50.88. ¿Cuál es el precio por libra de cada tipo de té?

Solución Debido a que se desea obtener el precio para cada uno de los dos tipos de té, deberán emplearse dos variables.

x: el número de centavos en el costo por libra del té de la India
y: el número de centavos en el costo por libra del té de China

Dado que el costo de 2 lb de té de la India más el costo de 5 lb de té de China es $50.16, se tiene la ecuación

$$2x + 5y = 5\,016$$

Debido a que el costo de 3 lb de té de la India más el costo de 4 lb de té de China es $50.88, se tiene la ecuación

$$3x + 4y = 5\,088$$

Así que se tiene el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = 5\,016 \\ 3x + 4y = 5\,088 \end{cases}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda por -2, se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} 6x + 15y = 15\,048 \\ -6x - 8y = -10\,176 \end{cases}$$

En el siguiente sistema equivalente, la primera ecuación es la primera ecuación del sistema original, y la segunda ecuación es la suma de las dos ecuaciones en el sistema (IV).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 5\,016 \\ 7y = 4\,872 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 5\,016 \\ y = 696 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5(696) = 5\,016 \\ y = 696 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3480 = 5\,016 \\ y = 696 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 768 \\ y = 696 \end{cases}$$

Comprobación: Con $x = 768$ y $y = 696$, el número de dólares en el precio de 2 lb de té de la India es $2(7.68) = 15.36$, y el número de dólares en el precio de 5 lb de té de China es $5(6.96) = 34.80$; $15.36 + 34.80 = 50.16$. El número de dólares en el precio de 3 lb de té de la India es $3(7.68) = 23.04$ y el número de dólares en el precio de 4 lb de té de China es $4(6.96) = 27.84$; $23.04 + 27.84 = 50.88$.

Conclusión: El precio por libra de té de la India es de \$7.68 y el precio por libra de té de China es de \$6.96. ◀

EJERCICIOS 3.2

En los ejercicios 1 a 10, trace la gráfica del sistema de ecuaciones. Clasifique las ecuaciones como: (i) consistentes e independientes, (ii) inconsistentes, o (iii) dependientes. Si las ecuaciones son consistentes e independientes, determine el conjunto solución del sistema a partir de las gráficas, y verifique la solución sustituyendo los valores en las dos ecuaciones.

1. $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = 8 + 2x \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 8x = 6y + 9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x - 3y = 7 \\ y = 3x - \frac{5}{2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 6x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x - 2y - 7 = 0 \\ x = \frac{1}{2}y + 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + 5y = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + 6y = -11 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$

En los ejercicios 11 a 22, encuentre, algebraicamente, el conjunto solución utilizando ya sea el método de sustitución o el de eliminación. Verifique la solución trazando la gráfica del sistema de ecuaciones.

11. $\begin{cases} 5x - 2y - 5 = 0 \\ 3x + y - 3 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ 5x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x + 3y + 6 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ x + 9y = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x + 6y = -5 \\ 15x - 3y = 13 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x + 4y - 4 = 0 \\ 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 18x + 3y - 10 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 8x + 5y = 3 \\ 7x + 3y = -7 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x - 5y = -21 \\ 5x + 3y = -6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = -1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$

En los ejercicios 23 a 26, halle, algebraicamente, el conjunto solución del sistema.

23. $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} + \frac{7}{y} = -2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 14 \\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = -7 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{10}{y} = 6 \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 2 \end{cases}$

En los ejercicios 27 a 36, resuelva el problema encontrando un sistema de ecuaciones como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio escribiendo la conclusión.

27. Tres libras de té y 8 lb de café cuestan \$39.70, y 5 lb de té y 6 lb de café cuestan \$47.10. ¿Cuál es el costo por libra de té? ¿Cuál es el costo por libra de café?

28. El costo de envío de un telegrama está basado en una tarifa para las primeras diez palabras y un cargo fijo para cada palabra adicional. Si un telegrama de 15 palabras cuesta \$11.65 y un telegrama de 19 palabras cuesta \$14.57. ¿Cuál es la tarifa y cuál es el cargo fijo por cada palabra adicional?

29. Un grupo de mujeres decidieron contribuir con cantidades iguales para contratar un conferenciante para la reseña de un libro. Si hay 10 mujeres más, cada una deberá pagar \$2 menos. Sin embargo, si hay 5 mujeres menos, cada una deberá pagar \$2 más. ¿Cuántas mujeres estuvieron en el grupo y cuánto se le pagó al conferenciante?

30. Una mujer tiene cierta cantidad de dinero invertida. Si tuviera \$6 000 más invertidos a una tasa 1% menor, ella debería tener la misma ganancia anual de su inversión. Además, si ella hubiera tenido \$4 500 menos invertidos a una tasa 1% más, la ganancia anual de la inversión hubiera sido la misma. ¿Cuánto tenía invertido ella, y cuál era la tasa de inversión?

31. Un químico tiene dos soluciones ácidas. Una contiene 15% de ácido y la otra contiene 6%. ¿Cuántos centímetros cúbicos de cada solución deberán utilizarse para obtener 400 cm^3 de una solución al 9% de ácido?

32. Un tanque contiene una mezcla de insecticida y agua, en el tanque hay 5 galones de insecticida y 25 galones de agua. Un segundo tanque contiene 5 galones de insecticida pero solamente 15 galones de agua. Si se desea tener 7.5 galones de una mezcla de la cual el 20% sea insecticida, ¿cuántos galones deberán tomarse de cada tanque?

33. Si una niña trabaja durante 8 min y su hermano 15 min, ellos pueden lavar en estos tiempos las ventanas del frente de su casa. También si la niña trabaja 12 min y su hermano 10 min, ellos pueden lavar las mismas ventanas. ¿Cuánto tiempo se tomará cada persona sola para lavar las ventanas? *Sugerencia:* Si una persona sola se toma t minutos para realizar el trabajo, entonces en 1 min la persona puede hacer $\frac{1}{t}$ del trabajo.

34. Un pintor y su hijo pueden pintar juntos un cuarto en 8 h. Si el padre trabaja sólo por 3 h y entonces es ayudado por su hijo, los dos juntos pueden completar el trabajo en 6 h más. ¿Cuánto tiempo emplearía cada persona para pintar sola el cuarto? *Véase la* sugerencia para el ejercicio 33.

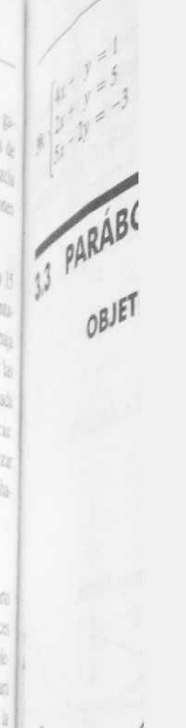
35. Si se agrega 4 al denominador de una fracción o se resta 2 al numerador de la misma, la fracción resultante es equivalente a $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción?

36. Si tanto el numerador como el denominador de una fracción se incrementan en 5, la fracción resultante es equivalente a $\frac{2}{3}$. Sin embargo, si al numerador y al denominador se les resta 5, la fracción resultante es equivalente a $\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la fracción?

37. ¿Cómo se podría determinar algebraica y gráficamente si dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son equivalentes?

38. ¿Cómo se podría determinar gráficamente cuando un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas es consistente o inconsistente?

Aplique la respuesta del ejercicio 38 a los sistemas de los ejercicios 39 a 42 trazando las gráficas de las tres ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección. ¿Son consistentes o inconsistentes las ecuaciones? Verifique la respuesta algebraicamente; para demostrar que son inconsistentes resuelva un sistema de dos de las ecuaciones y compruebe que ningún miembro del conjunto solución satisface la tercera ecuación. Para demostrar que son consistentes, halle el conjunto solución.



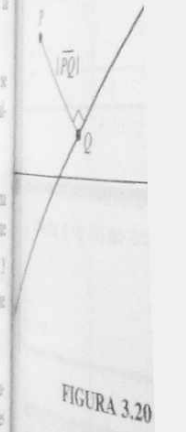


FIGURA 3.20

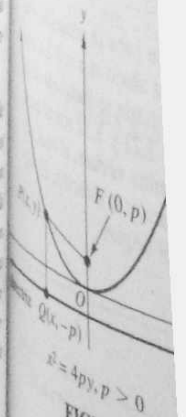


FIGURA 3.21

39. $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases}$ 40. $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x - y = 10 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$ 41. $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 3x - 2y = -5 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$ 42. $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - 4y = -5 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$

3.3 PARÁBOLAS

OBJETIVOS

1. **Definir una parábola.**
2. **Dibujar parábolas a partir de sus ecuaciones.**
3. **Trazar parábolas a partir de sus ecuaciones.**
4. **Aprender las propiedades de las parábolas.**
5. **Encontrar las propiedades de las parábolas a partir de sus ecuaciones.**
6. **Hallar las ecuaciones de parábolas a partir de sus propiedades.**
7. **Resolver problemas que tienen una parábola como modelo matemático.**

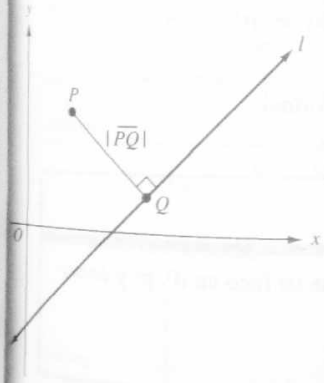


FIGURA 3.20

En la Sección 1.5 se presentaron parábolas. Las gráficas de las figuras 1.32 y 1.35 de esa sección son parábolas. Estas curvas tienen muchas aplicaciones importantes. Se emplean en el diseño de espejos parabólicos, reflectores y faros de automóvil. La trayectoria de un proyectil es una parábola, si se considera que el movimiento se lleva a cabo en un plano y se desprecia la resistencia del aire. Los arcos tienen algunas veces apariencia parabólica; y el cable de un puente suspendido puede colgar con la forma de una parábola. Las antenas para la recepción de señales de televisión provenientes de satélites son también de forma parabólica.

En la definición de parábola se hace referencia a la distancia de un punto a una recta. Se entiende por tal distancia la longitud del segmento de recta perpendicular del punto a la recta. *Véase* la Figura 3.20, donde $|\overline{PQ}|$ es la distancia del punto P a la recta l.

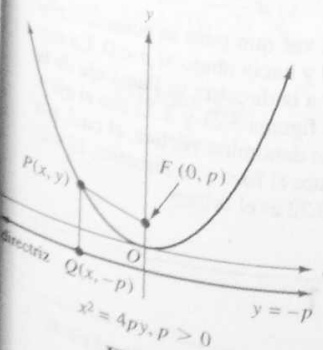


FIGURA 3.21

DEFINICIÓN **La parábola**

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos situados en un plano que equidistan de un punto y una recta fijos. El punto fijo se denomina **foco** y la recta fija, **directriz.**

Ahora se derivará la ecuación de una parábola a partir de su definición. Se elige el eje y como perpendicular a la directriz, de modo que contenga al foco. El origen se toma como el punto sobre el eje y a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Observe que se eligieron los ejes (*no* la parábola) de una forma especial. *Véase* la Figura 3.21.

Sea p la distancia dirigida $\overline{OF}$. El foco es el punto $F(0, p)$, y la directriz es la recta cuya ecuación es $y = -p$. Un punto $P(x, y)$ está sobre la parábola si y sólo si P es equidistante de F y de la directriz. O sea, si $Q(x, -p)$ es el pie de la recta perpendicular que va de P a la directriz, entonces P está sobre la parábola si y sólo si

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}|$$

Dado que

$$|\overline{FP}| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

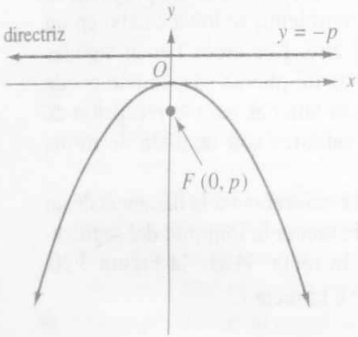
el punto P está sobre la parábola si y sólo si

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación para obtener

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Se establecerá este resultado de manera formal.



$x^2 = 4py, p < 0$

FIGURA 3.22

Ecuación de una parábola

La ecuación de una parábola que tiene su foco en $(0, p)$ y como directriz la recta $y = -p$ es

$$x^2 = 4py$$

En la Figura 3.21, p es positiva; sin embargo, p puede ser negativo debido a que es la distancia dirigida $\overline{OF}$. La Figura 3.22 muestra una parábola para $p < 0$.

De las figuras 3.21 y 3.22 se puede ver que para la ecuación $x^2 = 4py$ la parábola abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama **eje de la parábola.** Los ejes de las parábolas de las figuras 3.21 y 3.22 son el eje y. La intersección de la parábola con su eje se denomina **vértice,** el cual, por supuesto, está a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. El vértice de las parábolas de las figuras 3.21 y 3.22 es el origen.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 10y$$

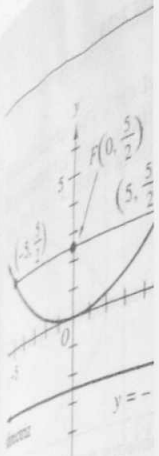


FIGURA 3.23

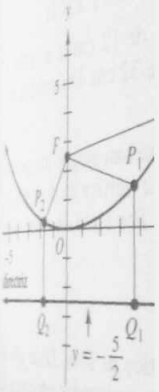


FIGURA 3.24

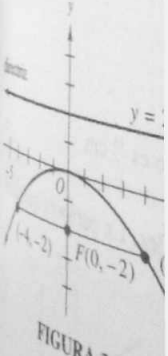


FIGURA 3.25

* N. del R. Se llama cuerda

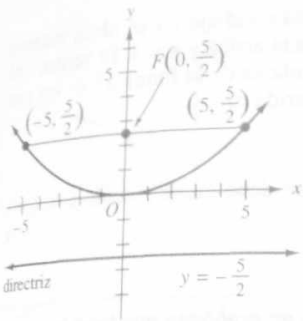


FIGURA 3.23

es una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje es el eje y. Dado que $4p = 10$, $p = \frac{5}{2} > 0$, y por tanto la parábola abre hacia arriba. El foco está en el punto $F(0, \frac{5}{2})$, y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{5}{2}$. Dos puntos sobre la parábola son $(5, \frac{5}{2})$ y $(-5, \frac{5}{2})$. Éstos son los extremos de una cuerda* que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola. Esta cuerda se conoce como el **lado recto** de la parábola. En el ejercicio 41 se le pedirá que demuestre que la longitud del lado recto de una parábola es $|4p|$. Cuando se dibuja una parábola es de utilidad trazar los extremos del lado recto. La Figura 3.23 muestra la parábola, el foco, la directriz y el lado recto. ◄

La parábola de la Figura 3.23 con tres puntos P_1, P_2 y P_3 en ella se muestra en la Figura 3.24. Dado que la definición de una parábola establece que cualquier punto sobre la parábola es equidistante del foco y la directriz,

$$|\overline{FP_1}| = |\overline{Q_1P_1}| \qquad |\overline{FP_2}| = |\overline{Q_2P_2}| \qquad |\overline{FP_3}| = |\overline{Q_3P_3}|$$

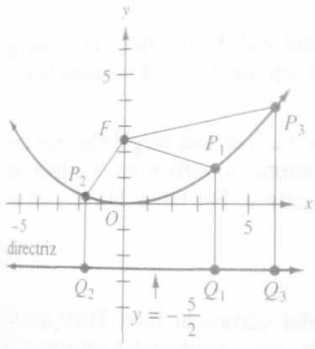


FIGURA 3.24

► **EJEMPLO 1** ***Dibujo de una parábola y determinación de sus propiedades a partir de su ecuación***

Dibuje la parábola que tiene la ecuación

$$x^2 = -8y$$

y determine el foco, la ecuación de la directriz y los extremos del lado recto.

Solución La gráfica es una parábola cuyo vértice está en el origen y su eje es el eje y. Debido a que $4p = -8$, $p = -2$, y como $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. El foco está en el punto $F(0, -2)$, y la ecuación de la directriz es $y = 2$. Los extremos del lado recto son $(4, -2)$ y $(-4, -2)$. Estos puntos se obtienen sustituyendo y por -2 en la ecuación de la parábola y resolviéndola para x. La parábola está trazada en la Figura 3.25, la cual también muestra el foco y la directriz. ◄

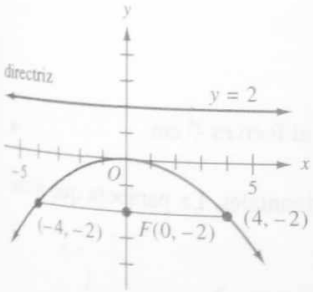


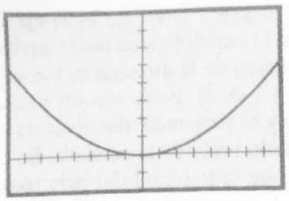
FIGURA 3.25

Por supuesto, se puede comprobar la parábola del ejemplo 1 trazando la gráfica de la ecuación $y = -\frac{1}{8}x^2$, en la graficadora.

► **EJEMPLO 2** ***Determinación de la ecuación de una parábola a partir de sus propiedades y su gráfica***

Encuentre la ecuación de la parábola que tiene su foco en $(0, 3)$ y como directriz la recta $y = -3$. Trace la parábola.

* N. del R. Se llama *cuerda* de una curva al segmento rectilíneo cuyos extremos están sobre la curva.



[−8, 8] por [−2, 8]
$y = \frac{1}{12}x^2$

FIGURA 3.26

Solución Debido a que el foco está en el eje y y se ubica también arriba la directriz, la parábola abre hacia arriba y $p = 3$. El vértice está en el origen. La ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 4py$ con $4p = 12$. Por lo que la ecuación requerida es

$$x^2 = 12y$$

Para trazar la parábola, la ecuación se debe escribir como $y = \frac{1}{12}x^2$. *Véase* la Figura 3.26.

► EJEMPLO 3 *Resolución de un problema que tiene la ecuación de una parábola como modelo matemático*

Un espejo parabólico tiene una profundidad de 12 cm en el centro y un diámetro en la parte superior del espejo de 32 cm. Encuentre la distancia del vértice al foco.

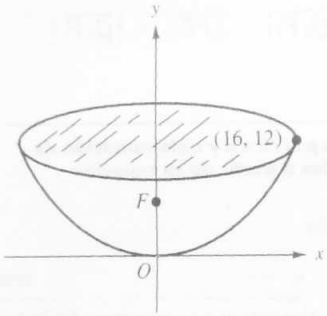


FIGURA 3.27

Solución Como se ve en la Figura 3.27, se han elegido los ejes coordenados de modo que la parábola tenga su vértice en el origen, su eje coincida con el eje y y abra hacia arriba. Por tanto, la ecuación de la parábola es de la forma

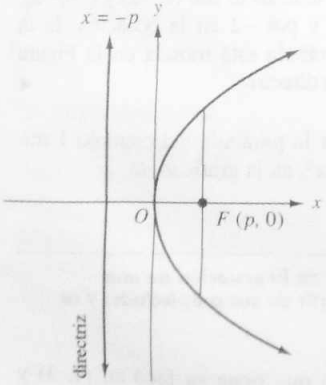
$$x^2 = 4py$$

donde p centímetros es la distancia del vértice al foco. Dado que el punto (16, 12) está sobre la parábola, sus coordenadas satisfacen la ecuación y se tiene

$$16^2 = 4p(12)$$

$$p = \frac{16}{3}$$

Conclusión: La distancia del vértice al foco es $\frac{16}{3}$ cm.



$y^2 = 4px, p > 0$

FIGURA 3.28

Algunas parábolas tienen ejes horizontales. La parábola que tiene por ecuación

$$y^2 = 7x$$

es un ejemplo. Esta ecuación es de la forma

$$y^2 = 4px$$

la cual puede obtenerse a partir de la ecuación $x^2 = 4py$ intercambiando x y y. La parábola cuya ecuación es $y^2 = 4px$ tiene su vértice en el origen, como su eje, el eje x, y su foco en el punto $F(p, 0)$; la ecuación de su directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha, como en la Figura 3.28; si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda, como en la Figura 3.29.

A continuación se resumirán estos resultados.

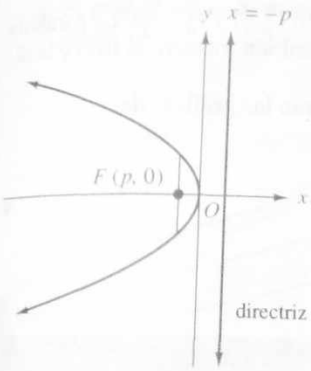


FIGURA 3.29

Ecuación de una parábola

La ecuación de la parábola que tiene su foco en $(p, 0)$ y su directriz es la recta $x = -p$ es

$$y^2 = 4px$$

Trazo de una parábola

Para trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y^2 = 4px$:

1. Resolver para y extrayendo la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación y obtener las dos ecuaciones

$$y = \sqrt{4px} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4px}$$

2. La unión de las gráficas de estas dos ecuaciones proporciona la gráfica de

$$y^2 = 4px$$

▸ EJEMPLO 4 *Dibujo de una parábola y determinación de sus propiedades a partir de su ecuación*

Dibuje la parábola cuya ecuación es

$$y^2 = 7x$$

y encuentre el foco, la ecuación de la directriz y los extremos del lado recto. Comprobar la gráfica trazándola en la graficadora.

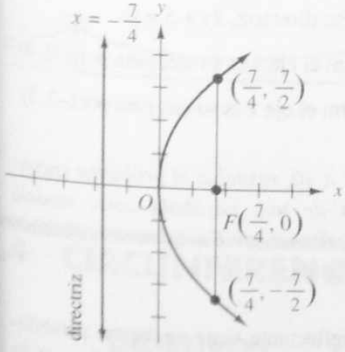


FIGURA 3.30

Solución La ecuación dada es de la forma $y^2 = 4px$, por tanto, el vértice está en el origen, y el eje de la parábola es el eje x. Debido a que $4p = 7$, $p = \frac{7}{4} > 0$: así que la parábola abre a la derecha. El foco está en el punto $F(\frac{7}{4}, 0)$, y la ecuación de la directriz es $x = -\frac{7}{4}$. Para obtener los extremos del lado recto, se sustituye $x = \frac{7}{4}$ en la ecuación dada, y se tiene

$$y^2 = \frac{49}{4}$$

$$y = \pm\frac{7}{2}$$

Los extremos del lado recto son, por tanto $(\frac{7}{4}, \frac{7}{2})$ y $(\frac{7}{4}, -\frac{7}{2})$. La parábola está dibujada en la Figura 3.30, la cual también muestra el foco y la directriz.

A fin de trazar la parábola, se muestran las gráficas de

$$y = \sqrt{7x} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{7x}$$

en el mismo rectángulo de inspección.

EJERCICIOS 3.3

En los ejercicios 1 a 16, para la parábola con la ecuación dada, encuentre (a) el vértice, (b) el eje, (c) el foco, (d) la ecuación de la directriz y (e) los extremos del lado recto. Dibuje la parábola.

1. $x^2 = 4y$
2. $x^2 = 8y$
3. $x^2 = -16y$
4. $x^2 = -12y$
5. $x^2 - y = 0$
6. $x^2 - 2y = 0$
7. $y^2 = 12x$
8. $y^2 = -6x$
9. $y^2 = -8x$
10. $y^2 = x$
11. $y^2 - 5x = 0$
12. $y^2 + 3x = 0$
13. $3x^2 + 8y = 0$
14. $2x^2 + 5y = 0$
15. $2y^2 - 9x = 0$
16. $3y^2 - 4x = 0$

En los ejercicios 17 a 22, trace la parábola que tiene la ecuación dada.

17. (a) $y = 4x^2$ (b) $y = -4x^2$ (c) $x = 4y^2$ (d) $x = -4y^2$
18. (a) $y = 2x^2$ (b) $y = -2x^2$ (c) $x = 2y^2$ (d) $x = -2y^2$
19. (a) $y = \frac{1}{4}x^2$ (b) $y = -\frac{1}{4}x^2$ (c) $x = \frac{1}{4}y^2$ (d) $x = -\frac{1}{4}y^2$
20. (a) $y = \frac{1}{2}x^2$ (b) $y = -\frac{1}{2}x^2$ (c) $x = \frac{1}{2}y^2$ (d) $x = -\frac{1}{2}y^2$
21. (a) $x^2 - 16y = 0$ (b) $x^2 + 16y = 0$ (c) $y^2 - 16x = 0$ (d) $y^2 + 16x = 0$
22. (a) $4x^2 - 3y = 0$ (b) $4x^2 + 3y = 0$ (c) $4y^2 - 3x = 0$ (d) $4y^2 + 3x = 0$

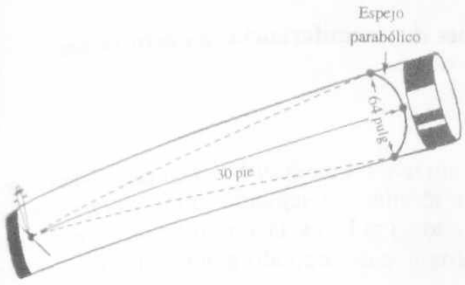
En los ejercicios 23 a 36, determine la ecuación de la parábola que tiene las propiedades dadas. Dibuje la parábola y compruebe la gráfica trazándola en la graficadora.

23. Foco $(0, 4)$; directriz, $y = -4$.
24. Foco $(0, -2)$; directriz, $y = 2$.
25. Foco $(0, -5)$; directriz, $y - 5 = 0$.
26. Foco $(0, -\frac{1}{2})$; directriz, $2y - 1 = 0$.
27. Foco $(2, 0)$; directriz, $x = -2$.
28. Foco $(1, 0)$; directriz, $x = -1$.
29. Foco $(-\frac{5}{3}, 0)$; directriz, $5 - 3x = 0$.
30. Foco $(-\frac{3}{2}, 0)$; directriz, $2x - 3 = 0$.
31. Vértice, el origen; abre hacia arriba, pasa por $(6, 3)$.
32. Vértice, el origen; abre hacia abajo, pasa por $(-4, -2)$.
33. Vértice, el origen; directriz, $2x = 3$.
34. Vértice, el origen; directriz, $2y + 5 = 0$.
35. Vértice, el origen; el eje y es su eje; pasa por $(-2, 4)$.
36. Vértice, el origen; el eje x es su eje; pasa por $(-3, 3)$.

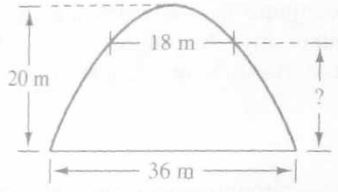
En los ejercicios 37 a 40, resuelva el problema encontrando la ecuación de una parábola como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio escribiendo la conclusión.

37. Un telescopio reflectante tiene un espejo parabólico para el cual la distancia del vértice al foco es de 30 pie. Si el diámetro de la parte superior de la tapa

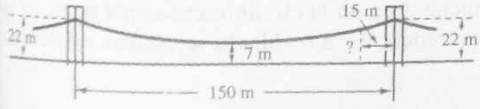
de 64 pulg. ¿Cuál es la profundidad del espejo en el centro?



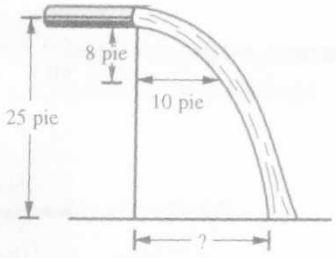
38. Un arco parabólico tiene una altura de 20 m y un ancho de 36 m en la base. Si el vértice de la parábola se encuentra en la parte alta del arco, ¿a qué altura sobre la base tiene un ancho de 18 m?



39. El cable de un puente colgante tiene la forma de una parábola cuando la carga está distribuida uniformemente de manera horizontal. La distancia entre dos torres es de 150 m, los puntos de soporte del cable sobre la torre están a 22 m arriba de la carretera, y el punto más bajo del cable está 7 m arriba. Determine la distancia vertical de la carretera al cable de un punto que se encuentra a 15 m de la base de una torre.



40. Considere que el agua que está fluyendo del extremo de un tubo horizontal, que se encuentra 25 pie arriba del suelo, describe una curva parabólica, el vértice de la parábola se halla en el extremo del tubo. Si en un punto 8 pie abajo del tubo, el flujo de agua en su trayectoria curva se localiza a 10 pie de distancia de la línea recta vertical que pasa por el extremo del tubo, ¿qué tan alejado de esta recta vertical llega el agua al piso?



41. Demuestre que la longitud del lado recto de una parábola es $|\ 4p\ |$.

42. Determine la ecuación de una parábola cuyo vértice está en el origen y los extremos del lado recto son $(-8, 4)$ y $(8, 4)$.

43. Los extremos del lado recto de una parábola son $(5, k)$ y $(-5, k)$. Si el vértice de la parábola está en el origen y la parábola abre hacia abajo, encuentre: **(a)** el valor de k; **(b)** la ecuación de la parábola.

44. Determine todos los puntos sobre la parábola $y^2 = 8x$ tales que el foco y el pie de la perpendicular dibujada del punto a la directriz son los vértices de un triángulo equilátero.

45. Trace las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^4$. Explique por qué la gráfica de la primera ecuación es una parábola y por qué la gráfica de la segunda no lo es. Emplee la definición de parábola en la explicación.

3.4 CIRCUNFERENCIAS

OBJETIVOS

1. **Definir una circunferencia.**
2. **Dibujar circunferencias a partir de sus ecuaciones.**

3. **Trazar circunferencias a partir de sus ecuaciones.**
4. **Aprender las propiedades de las circunferencias.**
5. **Encontrar las propiedades de las circunferencias a partir de sus ecuaciones.**
6. **Determinar ecuaciones de circunferencias a partir de sus propiedades.**

En la sección anterior se vio que las parábolas tienen ecuaciones de segundo grado con sólo un término de segundo grado. Otra curva que tiene ecuaciones de segundo grado es la *circunferencia*, pero estas ecuaciones poseen dos términos de segundo grado, uno en x y el otro en y.

DEFINICIÓN **Circunferencia**

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistante de un punto fijo. Al punto fijo se le llama **centro** y la distancia constante, **radio** de la circunferencia.

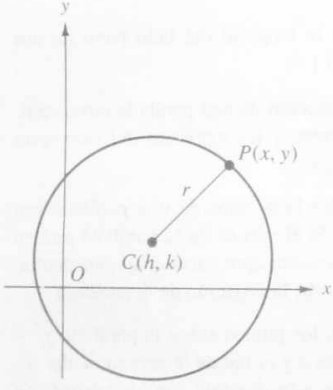


FIGURA 3.31

Para obtener la ecuación de la circunferencia con centro en $C(h, k)$ y radio r, se utilizará la fórmula de distancia. *Véase* la Figura 3.31. El punto $P(x, y)$ se encuentra en la circunferencia si y sólo si $|\overline{PC}| = r$, es decir, si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Esto es cierto si y sólo si

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

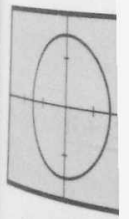
Esta ecuación es satisfecha por las coordenadas de aquéllos y sólo aquellos puntos que se encuentren en la circunferencia, por tanto, es la ecuación de dicha circunferencia. Este resultado se establecerá de manera formal.

Ecuación de la circunferencia

La circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio r tiene como ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

FIGURA 3.32



[-7.5, 7.5] por [-5, 5]
$y = \sqrt{16 - x^2}$ y $y = -\sqrt{16}$
FIGURA 3.33

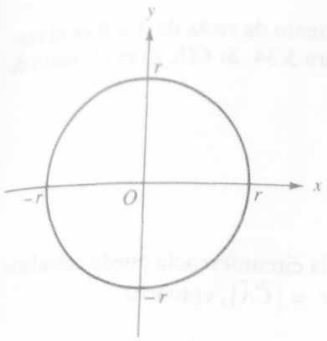


FIGURA 3.32

Si el centro de la circunferencia está en el origen, entonces $h = 0$ y $k = 0$, y por tanto, su ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Tal circunferencia aparece en la Figura 3.32. Si el radio de la circunferencia es 1, se le llama **circunferencia unitaria.**

Si se conocen el centro y el radio de una circunferencia, ésta puede ser dibujada usando un compás.

Trazo de una circunferencia

Para trazar la circunferencia cuando se tiene la ecuación

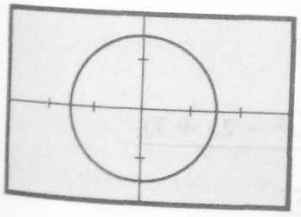
$$x^2 + y^2 = r^2$$

1. Se resuelve esta ecuación para y, y se obtiene

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones es una semicircunferencia.

2. Trazando estas dos semicircunferencias en el mismo rectángulo de inspección se obtiene la circunferencia deseada.



[-7.5, 7.5] por [-5, 5]
$y = \sqrt{16 - x^2}$ y $y = -\sqrt{16 - x^2}$

FIGURA 3.33

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 16$$

es la circunferencia con centro en el origen y radio 4. Al resolver esta ecuación para y se obtiene

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{16 - x^2}$$

Si se trazan estas dos semicircunferencias en el mismo rectángulo de inspección se obtiene la circunferencia mostrada en la Figura 3.33. ◄

► EJEMPLO 1 *Determinación de la ecuación de una circunferencia que satisface las condiciones dadas y trazo de su gráfica*

Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro cuyos extremos son $A(-2, 3)$ y $B(4, 5)$. Trace la circunferencia.

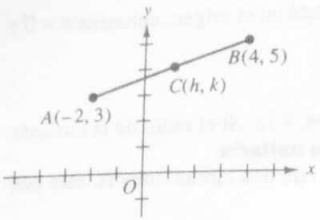


FIGURA 3.34

Solución El punto medio del segmento de recta de A a B es el centro de la circunferencia. *Véase* la Figura 3.34. Si $C(h, k)$ es el centro de la circunferencia, entonces

$$h = \frac{-2 + 4}{2} \qquad k = \frac{3 + 5}{2}$$
$$= 1 \qquad = 4$$

El centro está en $C(1, 4)$. El radio de la circunferencia puede calcularse ya sea como $|\overline{CA}|$ o como $|\overline{CB}|$. Si $r = |\overline{CA}|$, entonces

$$r = \sqrt{(1 + 2)^2 + (4 - 3)^2}$$
$$= \sqrt{10}$$

Una ecuación de la circunferencia es, por tanto,

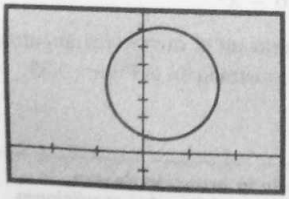
$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$$

A fin de trazar la circunferencia, primero se resuelve la ecuación para y, tratándola como una ecuación cuadrática en y:

$$y^2 - 8y + (x^2 - 2x + 7) = 0$$

De la fórmula de la ecuación cuadrática donde $a = 1$, $b = -8$, $c = x^2 - 2x + 7$, se tiene

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(x^2 - 2x + 7)}}{2(1)}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4x^2 + 8x - 28}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{36 + 8x - 4x^2}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{9 + 2x - x^2}}{2}$$
$$= 4 \pm \sqrt{9 + 2x - x^2}$$



[−7.5, 7.5] por [−2, 8]
$y = 4 + \sqrt{9 + 2x - x^2}$ y
$y = 4 - \sqrt{9 + 2x - x^2}$

FIGURA 3.35

Al trazar las gráficas de

$$y = 4 + \sqrt{9 + 2x - x^2} \quad \text{y} \quad y = 4 - \sqrt{9 + 2x - x^2}$$

en el mismo rectángulo de inspección se obtiene la circunferencia que aparece en la Figura 3.35.

N. del R. Otros nombres para es

La ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ se conoce como **forma de centro-radio*** de la ecuación de una circunferencia. Si se eliminan paréntesis y se reducen los términos semejantes, se obtiene

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 + r^2) = 0$$

Si se sustituye $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$, esta ecuación queda como

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la cual se llama **forma general** de la ecuación de una circunferencia. Debido a que cada circunferencia tiene centro y radio, la ecuación puede presentarse en la forma centro-radio, y de aquí transformarla a la forma general, como se hizo en el ejemplo 1. Si se parte de la ecuación de la circunferencia en la forma general, se puede escribir en la forma de centro-radio completando cuadrados. El ejemplo siguiente muestra el procedimiento.

► EJEMPLO 2 *Determinación del centro y radio de una circunferencia a partir de su ecuación*

Encuentre el centro y el radio de la circunferencia, cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$

Solución La ecuación dada puede expresarse como

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = 23$$

Completando los cuadrados de los términos entre paréntesis y agregando 9 y 4 en ambos lados de la ecuación, se tiene

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 23 + 9 + 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

Esta ecuación está en la forma centro-radio; por lo que es la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3, 2)$ y radio 6. ◄

Existen ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cuyas gráficas no son circunferencias. Suponiendo que cuando se completan los cuadrados se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d \qquad \text{donde } d < 0$$

No hay valores reales de x y y que satisfagan esta ecuación; es decir, la ecuación no tiene gráfica. En tal caso se establece que la gráfica es el conjunto vacío. *Véase* el ejercicio 32.

---

* N. del R. Otros nombres para esta forma son: *estándar* o *canónica*.

Si al completar cuadrados se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$$

los únicos valores reales que satisfacen esta ecuación son $x = h$ y $y = k$. Esto indica que la gráfica consta de un simple punto (h, k). Véase el ejercicio 31.

$\iint \frac{dy}{dx}$

En Cálculo aprenderá cómo encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva general en un punto de dicha curva. La definición de una recta tangente requiere del concepto de *límite* estudiado en Cálculo. Sin embargo, para una circunferencia, la definición de geometría plana establece que la *recta tangente* en el punto P de una circunferencia es la recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto.

▸ EJEMPLO 3 *Determinación de la ecuación de la recta tangente a una circunferencia en un punto*

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

en el punto (6, 5). Trace la circunferencia y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Al escribir la ecuación de la circunferencia en la forma centro-radio, y completar cuadrados, se obtiene:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) = 15$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

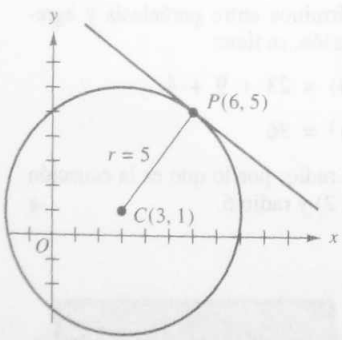


FIGURA 3.36

De esta ecuación, el centro de la circunferencia está en $C(3, 1)$ y el radio es 5. La Figura 3.36 muestra la circunferencia y un trozo de la recta tangente en (6, 5). Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por C y P.

$$m_1 = \frac{5 - 1}{6 - 3}$$

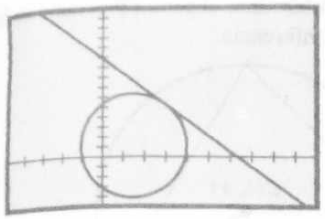
$$= \frac{4}{3}$$

De la geometría plana, se sabe que la recta tangente es perpendicular a la recta que pasa por C y P. Por tanto, si m_2 es la pendiente de la recta tangente,

$$m_2 m_1 = -1$$

$$m_2\left(\frac{4}{3}\right) = -1$$

$$m_2 = -\frac{3}{4}$$



[−10, 20] por [−5, 15]
$y = 1 + \sqrt{25 - (x - 3)^2}$ y
$y = 1 - \sqrt{25 - (x - 3)^2}$ y $y = -\frac{3}{4}x + \frac{19}{2}$

FIGURA 3.37

De la forma de punto-pendiente de la ecuación de la recta que pasa por (6, 5) con pendiente $-\frac{3}{4}$, se tiene la ecuación requerida

$$y - 5 = -\tfrac{3}{4}(x + 6)$$

$$4y - 20 = -3x + 18$$

$$3x + 4y - 38 = 0$$

La Figura 3.37 muestra la circunferencia y la tangente trazadas en el mismo rectángulo de inspección. ◀

EJERCICIOS 3.4

En los ejercicios 1 a 8, dibuje la gráfica de la ecuación.

1. (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$ (b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$ (c) $x^2 + y^2 = 4$
2. (a) $y = \sqrt{25 - x^2}$ (b) $y = -\sqrt{25 - x^2}$ (c) $x^2 + y^2 = 25$
3. $9x^2 + 9y^2 = 1$
4. $4x^2 + 4y^2 = 1$
5. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
6. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 36$
7. $(x + 4)^2 + y^2 = 1$
8. $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

En los ejercicios 9 a 14, trace la gráfica de la ecuación.

9. $x^2 + y^2 = 36$
10. $x^2 + y^2 = 16$
11. $4x^2 + 4y^2 = 81$
12. $9x^2 + 9y^2 = 49$
13. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 100$
14. $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 64$

En los ejercicios 15 a 20, determine la ecuación de la circunferencia con centro en C y radio r. Escriba la ecuación en la forma de centro-radio y en la forma general. Trace la circunferencia.

15. $C(4, -3)$, $r = 5$
16. $C(0, 0)$, $r = 8$
17. $C(-5, -12)$, $r = 3$
18. $C(-1, 1)$, $r = 2$
19. $C(0, 7)$, $r = 1$
20. $C(-3, 0)$, $r = 4$

En los ejercicios 21 a 24, encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas. Trace la circunferencia

21. El centro está en (1, 2) y pasa por el punto (3, −1).
22. El centro está en (−3, 4) y pasa por el punto (2, 0).
23. El diámetro tiene como extremos los puntos (3, −4) y (7, 2).
24. El diámetro tiene como extremos los puntos (−1, −5) y (4, −6).

En los ejercicios 25 a 30, encuentre el centro y el radio de la circunferencia. Dibuje la circunferencia.

25. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
26. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
27. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 18 = 0$
28. $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$
29. $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$
30. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$
31. Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 = 0$$

es un punto.

32. Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 30 = 0$$

es el conjunto vacío.

En los ejercicios 33 a 38, determine si la gráfica es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

33. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$
34. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$
35. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$
36. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$
37. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$
38. $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

En los ejercicios 39 a 42, encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P. Trace la circunferencia y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

39. $x^2 + y^2 = 25$; $P(-4, 3)$

40. $16x^2 + 16y^2 = 25$; $P(\frac{3}{4}, -1)$

41. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$; $P(5, 1)$

42. $x^2 + y^2 + 14x - 8y - 35 = 0$; $P(-1, -4)$

43. Emplee geometría analítica para demostrar que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

44. Use geometría analítica para demostrar que una recta que parte del centro de cualquier circunferencia bisectando cualquier cuerda, es perpendicular de la cuerda.

45. ¿Qué desigualdad que relaciona a D, E y F es necesaria para que la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

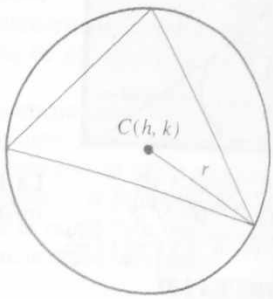
sea una circunferencia?

46. A partir del origen, se dibujan cuerdas de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

Demuestre que el conjunto de puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

47. La circunferencia que circunscribe un triángulo contiene los tres vértices del triángulo. Explique cómo se puede determinar el centro y el radio de la mencionada circunferencia.



48. Utilizando la explicación del ejercicio 47, encuentre el centro y el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo cuyos vértices son $(-3, 2)$, $(4, -1)$ y $(5, 2)$.

49. Describa el conjunto de puntos (x, y) en R^2 para los cuales

(a) $x^2 + y^2 \leq 1$ (b) $1 < x^2 + y^2 \leq 4$

(c) $x^2 + y^2 > 4$

50. Basándose en el hecho de que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$, escriba la ecuación de cada una de las gráficas siguientes: (a) la gráfica que consiste de todos los puntos en cualquiera de dos circunferencias, las cuales tienen su centro en el origen y una tiene radio 2 y la otra radio 3; (b) la gráfica que consiste del origen y todos los puntos en la circunferencia unitaria cuyo centro está en el origen.

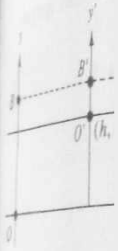


FIGURA 3

3.5 TRASLACIÓN DE EJES

OBJETIVOS

1. **Aprender las ecuaciones de traslación de los ejes.**
2. **Trasladar los ejes para simplificar una ecuación.**
3. **Aprender las formas estándar de la ecuación de una parábola.**
4. **Encontrar las propiedades de una parábola a partir de su ecuación en forma estándar y trazar la parábola a partir de estas propiedades.**
5. **Obtener la gráfica de una ecuación a partir de la gráfica de otra ecuación mediante una adecuada traslación de ejes.**

La forma de una gráfica no es afectada por la posición de los ejes coordenados, pero su ecuación sí. Por ejemplo, una circunferencia con radio 3 y centro en el punto $(4, -1)$ tiene la ecuación

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Sin embargo, si los ejes coordenados son elegidos de tal manera que el origen sea el centro, la misma circunferencia tiene una ecuación más simple

$$x^2 + y^2 = 9$$

Si pueden seleccionarse los ejes a voluntad, entonces, generalmente se hará de tal forma que las ecuaciones sean lo más simple posibles. Sin embargo, si los ejes están dados, es deseable encontrar una ecuación más sencilla de una gráfica particular relacionada a un conjunto de ejes diferentes. Si estos ejes diferentes son elegidos paralelos a los originales, se dice que ha habido una **traslación de ejes.**

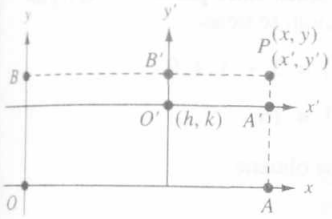


FIGURA 3.38

En particular, considérese que los ejes x y y son trasladados a los nuevos ejes x' y y', teniendo como origen (h, k) con respecto a los ejes dados. También, supóngase que los números positivos se encuentran en el mismo lado del origen en los ejes x' y y', como en los ejes x y y. *Véase* la Figura 3.38. Un punto P en el plano que tiene las coordenadas (x, y) con respecto a los ejes coordenados dados, tendrá las coordenadas (x', y') con respecto a los nuevos ejes. Para obtener las relaciones entre estos dos conjuntos de coordenadas, se dibujan dos rectas a través de P una paralela a los ejes y y y' y otra paralela a los ejes x y x'. Se observa que la primera recta intersecta el eje x en el punto A y el eje x' en el punto A', y la segunda recta intersecta el eje en el punto B y el eje y' en el punto B'. Estas rectas están mostradas en la Figura 3.38.

Con respecto a los ejes x y y, las coordenadas de P son (x, y), las coordenadas de A son $(x, 0)$ y las coordenadas de A' son (x, k). Dado que $\overline{A'P} = \overline{AP} - \overline{AA'}$,

$$y' = y - k$$

Con respecto a los ejes x y y, las coordenadas de B son $(0, y)$, y las coordenadas de B' son (h, y). Debido a que $\overline{B'P} = \overline{BP} - \overline{BB'}$,

$$x' = x - h$$

Ahora se establecerán estos resultados formalmente.

Ecuaciones de traslación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado, y (x', y') es la representación de P después de que los ejes son trasladados a un nuevo origen que tiene coordenadas (h, k) con respecto a los ejes dados, entonces

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

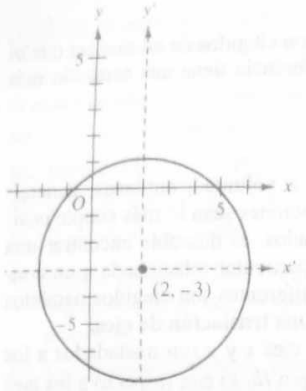


FIGURA 3.39

► **EJEMPLO 1** *Traslación de los ejes para simplificar una ecuación*

Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

traslade los ejes para que la ecuación de la gráfica con respecto a x' y y' no contenga términos de primer grado.

Solución Se reescribe la ecuación como:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 + 6y) = 3$$

Al completar los cuadrados de los términos entre paréntesis, agregando 4 y 9 a ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Si se considera $x' = x - 2$ y $y' = y + 3$, se obtiene

$$x'^2 + y'^2 = 16$$

La gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y' es una circunferencia con su centro en el origen y radio 4. Debido a las sustituciones de $x' = x - 2$ y $y' = y + 3$ el resultado es una traslación de ejes a un nuevo origen $(2, -3)$, la gráfica de la ecuación original con respecto a los ejes x y y es una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 4. Este resultado está de acuerdo con la discusión de la circunferencia en la Sección 3.4. La Figura 3.39 muestra la circunferencia con ambos conjuntos de ejes. ◄

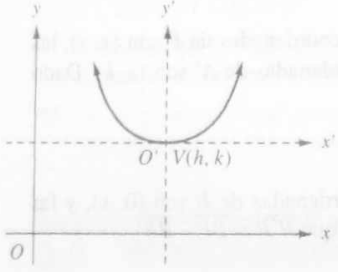


FIGURA 3.40

Ahora, se aplicará la traslación de ejes para encontrar la ecuación general de una parábola que tenga su vértice en el punto (h, k), siendo su eje vertical u horizontal. En particular, considérese que el eje es vertical. Los ejes x' y y' deberán tener el origen en $V(h, k)$. *Véase* la Figura 3.40. Con respecto a los ejes x' y y' la ecuación de la parábola en esta figura es

$$x'^2 = 4py'$$

Para obtener la ecuación de esta parábola con respecto a los ejes x y y se debe recordar que, $x' = x - h$ y $y' = y - k$, por lo que se obtiene

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

En la Figura 3.41 el eje de la parábola es horizontal, y el vértice está en $V(h, k)$. Por un argumento similar, esta ecuación con respecto a los ejes x y y es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

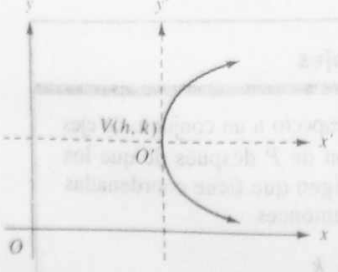


FIGURA 3.41

Se han obtenido las formas estándar de la ecuación de una parábola.

Formas estándar de la ecuación de una parábola

Si p es la distancia dirigida del vértice al foco, la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) y con su eje vertical es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Una parábola con el mismo vértice y con su eje horizontal tiene la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

La gráfica de cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$ es una parábola cuyo eje es vertical. Esta aseveración puede ser comprobada demostrando que (1) es equivalente a una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Se le pedirá hacer esto en el ejercicio 49. La ecuación en el ejemplo siguiente es un caso especial de (1), donde $a = -\frac{1}{4}$, $b = 1$ y $c = 6$.

▸ EJEMPLO 2 *Determinación de las propiedades de una parábola a partir de su ecuación y dibujar la parábola a partir de estas propiedades*

Dada la parábola que tiene la ecuación

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 6$$

encuentre el vértice, la ecuación del eje, el foco y los extremos del lado recto. Dibuje la parábola a partir de estas propiedades y compruebe la gráfica obtenida en una graficadora.

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$4y = -x^2 + 4x + 24$$

$$x^2 - 4x = -4y + 24$$

Al completar el cuadrado en el lado izquierdo de la ecuación sumando 4 a cada lado, se tiene

$$x^2 - 4x + 4 = -4y + 24 + 4$$

$$(x - 2)^2 = -4y + 28$$

$$(x - 2)^2 = -4(y - 7)$$

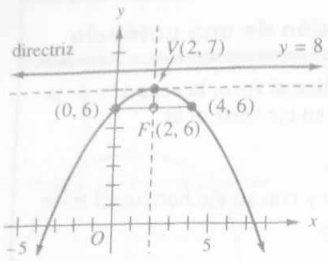


FIGURA 3.42

Esta ecuación es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

con $h = 2$, $k = 7$, y $p = -1$. Por tanto, su gráfica es una parábola con vértice en (2, 7), y el eje es vertical. En consecuencia, el eje tiene la ecuación $x = 2$. Dado que $p < 0$, la curva abre hacia abajo. Además, el foco es el punto sobre el eje, 1 unidad abajo del vértice; o sea, el foco está en (2, 6). Debido a que la longitud del lado recto es $4p = 4$, los extremos están 2 unidades a la derecha y a la izquierda del foco en los puntos (4, 6) y (0, 6).

La Figura 3.42 muestra la parábola dibujada a partir de estas propiedades. Con el uso de la graficadora puede verificar esta gráfica. ◀

Si x y y se intercambian en (1), se tiene la ecuación

$$x = ay^2 + by + c \tag{2}$$

La gráfica de cualquier ecuación de esta forma es una parábola cuyo eje es horizontal. Este hecho puede verificarse demostrando que (2) es equivalente a una ecuación de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

▶ EJEMPLO 3 *Determinación de las propiedades de una parábola a partir de su ecuación y dibujar la parábola a partir de estas propiedades*

Siga las instrucciones del ejemplo 2 para la parábola cuya ecuación es

$$x = 2y^2 + 8y + 11$$

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$2y^2 + 8y = x - 11$$

$$2(y^2 + 4y) = x - 11$$

Para completar el cuadrado de la expresión dentro del paréntesis, se debe sumar 4 a $y^2 + 4y$. Por lo que en realidad se está agregando 8 al lado izquierdo, así que se deberá agregar 8 al lado derecho, y se tiene

$$2(y^2 + 4y + 4) = x - 11 + 8$$

$$2(y + 2)^2 = x - 3$$

$$(y + 2)^2 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

Esta ecuación es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

con $h = 3$, $k = -2$ y $p = \frac{1}{8}$. Por tanto, la parábola tiene su vértice en $(3, -2)$, su eje es la recta horizontal $y = -2$, y como $p > 0$, abre a la derecha. En virtud de que el foco está $\frac{1}{8}$ de unidad a la derecha del vértice, el vér-

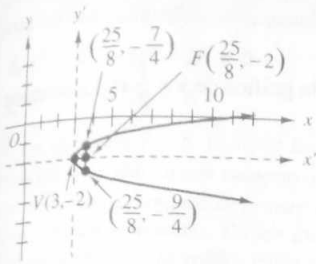


FIGURA 3.43

ce está en el punto $(\frac{25}{8}, -2)$. La longitud del lado recto es $|\ 4p\ | = \frac{1}{2}$, por lo que los extremos del lado recto están, $\frac{1}{4}$ de unidad por arriba y debajo del foco, en los puntos $(\frac{25}{8}, -\frac{7}{4})$ y $(\frac{25}{8}, -\frac{9}{4})$.

La parábola dibujada a partir de estas propiedades aparece en la Figura 3.43. Para trazar la parábola en la graficadora, primeramente se escribe la ecuación como

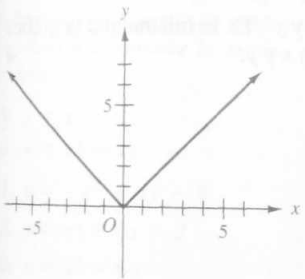
$$2y^2 + 8y + (11 - x) = 0$$

enseguida se resuelve para y en términos de x mediante la fórmula cuadrática, donde $a = 2$, $b = 8$ y $c = (11 - x)$. Se obtienen dos valores para y

$$y = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2x - 6} \quad \text{y} \quad y = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2x - 6}$$

Cuando se trazan las gráficas de estas dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección, se obtiene la parábola de la Figura 3.43. ◄

En los dos ejemplos siguientes, se aplicará la traslación de ejes para otras gráficas.



$y = |x|$

FIGURA 3.44

► EJEMPLO 4 *Obtención de la gráfica de una ecuación a partir de la gráfica de otra mediante una adecuada traslación de ejes*

A partir de la gráfica de $y = |\ x\ |$ y una adecuada traslación de ejes, obtenga la gráfica de $y = |\ x - 4\ | - 6$.

Solución La gráfica de $y = |\ x\ |$ que aparece en la Figura 1.42 de la Sección 1.5, se reproduce aquí en la Figura 3.44. La ecuación

$$y = |\ x - 4\ | - 6$$

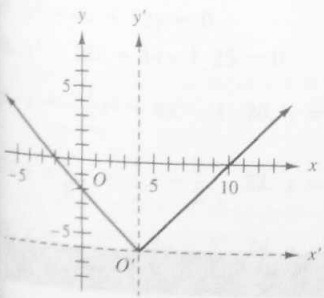
es equivalente a

$$y + 6 = |\ x - 4\ |$$

Para obtener la gráfica de esta ecuación, se consideran

$$x' = x - 4 \quad \text{y} \quad y' = y + 6$$

Hemos trasladado los ejes a un nuevo origen $(4, -6)$, por lo que la ecuación queda como $y' = |\ x'\ |$. La gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y' es igual a la que aparece en la Figura 3.44 con respecto a los ejes x y y. Así se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 3.45. ◄



$y = |x - 4| - 6$

FIGURA 3.45

► EJEMPLO 5 *Obtención de la gráfica de una ecuación a partir de la gráfica de otra por medio de una adecuada traslación de ejes*

Empleando la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$ del ejemplo 4 de la Sección 1.5, con una apropiada traslación de ejes, obtenga la gráfica de la ecuación

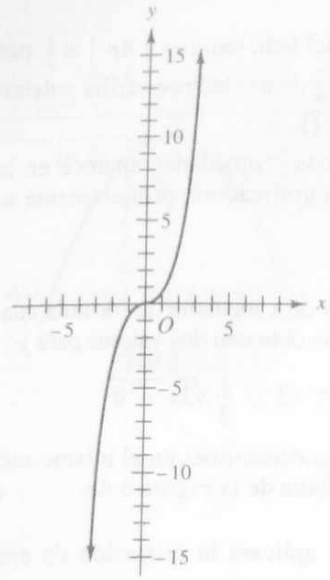


FIGURA 3.46

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)^3 + 3$$

Solución La Figura 3.46 muestra la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$. La ecuación

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)^3 + 3$$

es equivalente a

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 5)^3$$

Para obtener la gráfica de esta ecuación, se considera

$$x' = x + 5 \quad \text{y} \quad y' = y - 3$$

Se han trasladado los ejes a un nuevo origen $(-5, 3)$, por lo que la ecuación obtenida es $y' = \frac{1}{2}x'^3$. La Figura 3.47 muestra la gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y'. Es la misma que la gráfica de la Figura 3.46 con respecto a los ejes x y y.

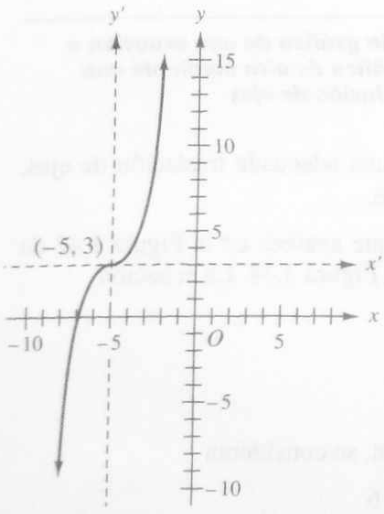


FIGURA 3.47

EJERCICIOS 3.5

En los ejercicios 1 a 4, traslade los ejes para que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes no contenga términos de primer grado. Dibuje los ejes originales y los nuevos así como la gráfica correspondiente.

1. $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

En los ejercicios 5 y 6, traslade los ejes para que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes x' y y' no contenga ni términos de primer grado en x' ni

términos constantes. Dibuje los ejes nuevos y los originales así como la gráfica correspondiente.

5. $x^2 - 4x - 8y - 28 = 0$

6. $x^2 + 4x + 2y = 0$

En los ejercicios 7 y 8, traslade los ejes para que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes x' y y' no contenga términos de primer grado en y' y tampoco términos constantes. Dibuje los ejes originales y los nuevos así como la gráfica correspondiente.

7. $y^2 + 6x + 7y + 39 = 0$

8. $2y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

En los ejercicios 9 a 24, para la parábola dada, determine (a) el vértice, (b) la ecuación del eje, (c) el foco, (d) la ecuación de la directriz, y (e) los extremos del lado recto. (f) A partir de estas propiedades dibuje la parábola y compruebe la gráfica empleando la graficadora.

9. $y = x^2 - 4$

10. $y = x^2 + 4x$

11. $y = -x^2 + 4x - 5$

12. $y = x^2 + 6x - 2$

13. $x = y^2 - 6y$

14. $x = -y^2 + 1$

15. $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

16. $x^2 - 4x + 8y + 28 = 0$

17. $y^2 + 4x + 12y = 0$

18. $y^2 - 12x - 14y + 25 = 0$

19. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$ **20.** $y = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x$

21. $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ **22.** $x = 2y^2 + 10y + 3$

23. $x = -2y^2 - 8y - 5$ **24.** $x = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - 2$

En los ejercicios 25 a 28, trace la parábola que tiene la ecuación dada

25. $y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$

26. $4y^2 - x + 16y + 12 = 0$

27. $5y^2 - 4x + 10y + 17 = 0$

28. $3y^2 + 8x - 12y + 20 = 0$

En los ejercicios 29 a 46, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de la primera ecuación; (b) a partir de la gráfica obtenida en el inciso (a) y una adecuada traslación de ejes, dibuje la gráfica de la segunda ecuación. (c) Compruebe las gráficas de los incisos (a) y (b) trazándolas en el mismo rectángulo de inspección.

29. $y = |x|; y = |x - 2|$

30. $y = |x|; y = |x + 3|$

31. $y = |x|; y = |x| + 3$

32. $y = |x|; y = |x| - 2$

33. $y = |x|; y = |x + 4| - 5$

34. $y = |x|; y = |x - 1| + 6$

35. $y = x^3; y = (x - 4)^3$

36. $2y = -x^3; 2y + 2 = -x^3$

37. $y = x^3; y = (x + 1)^3 + 1$

38. $2y = -x^3; 2y = -(x - 4)^3 + 4$

39. $y = \sqrt{x}; y = \sqrt{x - 2} + 4$

40. $y = \sqrt{x}; y = \sqrt{x + 3} - 2$

41. $y = x^2; y = (x - 4)^2$

42. $y = x^2; y = (x + 3)^2$

43. $y = x^2; y = x^2 + 3$

44. $y = x^2; y = x^2 - 4$

45. $y = x^2; y = (x + 1)^2 - 5$

46. $y = x^2; y = (x - 2)^2 + 1$

47. Dada la parábola que tiene la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, encuentre las coordenadas del vértice.

48. Encuentre las coordenadas del foco de la parábola del ejercicio 47.

49. Demuestre que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es equivalente a la ecuación de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ resolviendo la segunda ecuación para y.

50. Si una parábola tiene su foco en el origen y el eje x es su eje, demuestre que deberá tener una ecuación de la forma $y^2 = 4kx + 4k^2$, $k \neq 0$.

51. **(a)** Demuestre que la ecuación $y = x^2 + bx + c$ puede escribirse en la forma $y = (x - h)^2 + k$. **(b)** Explique cómo dibujar la gráfica de $y = (x - h)^2 + k$ a partir de la gráfica de $y = x^2$. En la explicación resuelva un ejemplo particular.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 3

▸ VISIÓN RETROSPECTIVA

3.1 Antes de determinar ecuaciones de rectas, se definió la pendiente de una recta, y entonces se dibujaron rectas y se obtuvieron sus pendientes. Se determinaron dos formas importantes de la ecuación de una recta, la forma de punto-pendiente y la forma de pendiente-intercepción. Se emplearon estas dos formas y los teoremas que implican pendientes de rectas paralelas y pendientes de rectas perpendiculares para encontrar ecuaciones de rectas que tienen ciertas propiedades.

3.2 Se trataron sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y se determinó tanto gráfica como algebraicamente si las ecuaciones eran (i) consistentes e independientes, (ii) inconsistentes, o (iii) dependientes. Se obtuvieron las soluciones algebraicas mediante los métodos de sustitución y eliminación. También se resolvieron sistemas de dos ecuaciones lineales con recíprocos de las incógnitas. En los ejemplos y ejercicios se presentaron enunciados de problemas que tienen un sistema de dos ecuaciones lineales como modelo matemático.

3.3 La discusión de parábolas incluyó la definición y propiedades de una parábola. Se encontraron las propiedades de las parábolas a partir de sus ecuaciones, y ecuaciones de las parábolas por medio de sus propiedades. Se dibujaron y trazaron parábolas a partir de sus ecuaciones.

3.4 Se siguió el formato utilizado para parábolas en el estudio de las circunferencias. A fin de trazar una circunferencia en la graficadora, primero se resolvió la ecuación de la circunferencia para y, de la cual resultaron dos ecuaciones en las que se expresa y en términos de x. La gráfica de cada una de estas ecuaciones fue una semicircunferencia y se obtuvo la circunferencia al trazar las dos semicircunferencias en el mismo rectángulo de inspección.

3.5 Se simplificaron ecuaciones por medio de la traslación de ejes. Para obtener la forma estándar de la ecuación de una parábola, se aplicó la traslación de ejes. Por medio de esta ecuación se encontraron las propiedades de la parábola y se dibujó la parábola a partir de estas propiedades. También se obtuvieron gráficas de algunas ecuaciones basándonos en las gráficas de ecuaciones muy simples y una adecuada traslación de ejes.

▸ EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 y 2, haga lo siguiente: (a) dibuje la recta que pasa por los dos puntos; (b) determine la pendiente de la recta; (c) encuentre la ecuación de la recta.

1. (1, –3) y (4, 5)

2. (–2, –5) y (6, –7)

En los ejercicios 3 y 4, haga lo siguiente: (a) dibuje la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m; (b) encuentre la ecuación de la recta.

3. $P(5, -2)$; $m = -\frac{3}{2}$

4. $P(-2, 1)$; $m = \frac{3}{4}$

En los ejercicios 5 y 6, haga lo siguiente: (a) encuentre la pendiente y la intercepción y de la recta que tiene la ecuación dada, (b) dibuje la recta.

5. $2x - 5y - 10 = 0$

6. $2x + 3y + 12 = 0$

7. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (–3, –2) y es paralela a la recta cuya ecuación es $7x - 3y - 4 = 0$. Dibuje ambas rectas en el mismo sistema coordenado.

8. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (–1, 6) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $4x + 2y - 5 = 0$. Dibuje ambas rectas en el mismo sistema coordenado.

9. Compruebe que las rectas que tienen las ecuaciones $2x + 5y + 20 = 0$ y $5x - 2y - 10 = 0$ son perpendiculares, y dibuje sus gráficas.

10. Compruebe que las rectas que tienen las ecuaciones $2x - 3y + 12 = 0$ y $4x - 6y - 3 = 0$ son paralelas, y dibuje sus gráficas.

11. Encuentre la abscisa del punto cuya ordenada es –3 y para la cual la recta que pasa por ese punto y el punto (2, 7) es paralela a la recta que tiene la ecuación $3x - 4y = 12$.

12. Empleando pendientes, haga el ejercicio 39 de los ejercicios de repaso para el Capítulo 1.

En los ejercicios 13 y 14, utilice las pendientes para determinar si los tres puntos se encuentran en la misma recta.

13. $(-2, -3), (-1, 4), (1, 17)$

14. $(0, -3), (1, 4), (2, 11)$

En los ejercicios 15 a 18, trace la gráfica del sistema de ecuaciones. Clasifique las ecuaciones como (i) consistentes e independientes, (ii) inconsistentes, o (iii) dependientes. Si las ecuaciones son consistentes e independientes, determine el conjunto solución del sistema por medio de las gráficas, y verifique las respuestas sustituyéndolas en las dos ecuaciones.

15. $\begin{cases} 4y + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 9x - 6y = 8 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2y = 4x - 6 \\ 6x = 3y + 9 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 8x - 2y = 1 \end{cases}$

En los ejercicios 19 a 22, encuentre, algebraicamente, el conjunto solución del sistema utilizando cualquiera de los métodos, ya sea de sustitución o de eliminación. Verifique la solución trazando la gráfica del sistema de ecuaciones.

19. $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 6x - 15y = 14 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$

En los ejercicios 23 y 24, encuentre, algebraicamente, el conjunto solución del sistema.

23. $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{y} = 4 \\ \dfrac{12}{x} + \dfrac{3}{y} = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 8 \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{4}{y} = -6 \end{cases}$

En los ejercicios 25 y 26, trace las gráficas de las tres ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección. ¿Son las ecuaciones consistentes o inconsistentes? Verifique algebraicamente la respuesta: para demostrar que son inconsistentes, resuelva dos ecuaciones del sistema y demuestre que ningún miembro del conjunto solución satisface la tercera ecuación; para demostrar que son consistentes, encuentre el conjunto solución.

25. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3y = 14 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 7x - 2y = 9 \\ 4x - 5y = 25 \end{cases}$

En los ejercicios 27 a 42, para la parábola que tiene la ecuación dada, encuentre (a) el vértice, (b) el eje, (c) el foco, (d) la ecuación de la directriz, y (e) los extremos del lado recto. (f) Dibuje la parábola y compruebe la gráfica en una graficadora.

27. $x^2 - 16y = 0$

28. $x^2 + 4y = 0$

29. $4x^2 + y = 0$

30. $3x^2 - 8y = 0$

31. $y^2 + 10x = 0$

32. $y^2 - 6x = 0$

33. $x^2 - y - 3 = 0$

34. $x^2 - 4y + 8 = 0$

35. $y^2 - x + 6 = 0$

36. $y^2 + 8x - 12 = 0$

37. $y^2 - x - 8y = 0$

38. $x^2 - y + 10x = 0$

39. $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$

40. $4y^2 - x + 16y + 21 = 0$

41. $y = -\dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{8}$

42. $x = -\dfrac{1}{6}y^2 - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{7}{3}$

En los ejercicios 43 a 48, encuentre la ecuación de la parábola que tiene las propiedades dadas, dibuje la parábola. Compruebe la gráfica en la graficadora.

43. Foco (0, 2); directriz, $y = -2$.

44. Foco $(-4, 0)$; directriz, $x = 4$.

45. Vértice, el origen; abre hacia la izquierda; pasa por el punto $(-3, 6)$.

46. Vértice, el origen; abre hacia arriba; pasa por el punto $(-5, 2)$.

47. Foco, el origen; directriz, $y = 6$.

48. Foco, el origen; directriz, $x = -3$.

En los ejercicios 49 a 56, encuentre el centro y radio de la circunferencia. Dibuje la circunferencia, y compruebe la gráfica en una graficadora.

49. $x^2 + y^2 = 9$ **50.** $2x^2 + 2y^2 = 1$

51. $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

52. $x^2 + y^2 - 8y = 0$

53. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

54. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 8 = 0$

55. $3x^2 + 3y^2 + 4x - 4 = 0$

56. $x^2 + y^2 - 14x + 16y + 32 = 0$

En los ejercicios 57 y 58, determine si la gráfica es una circunferencia, un punto, o el conjunto vacío.

57. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$

58. $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13 = 0$

En los ejercicios 59 a 62, encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas y dibuje la circunferencia.

59. Centro en (3, –5) y radio 2.

60. Centro en (–2, 5) y tangente a la recta $x = 7$.

61. Diámetro cuyos extremos son (2, –1) y (6, –5).

62. Centro en (4, 3) y pasa por el punto (–7, –1).

En los ejercicios 63 y 64, halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P. Trace la circunferencia y la tangente en el mismo rectángulo de inspección.

63. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$; $P(4, -7)$

64. $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 80 = 0$; $P(2, 6)$

En los ejercicios 65 a 74, trace la gráfica que tiene la ecuación dada.

65. $3x^2 + 4y = 0$ **66.** $5x^2 - 16y = 0$

67. $5y^2 - 12x = 0$ **68.** $7y^2 - 24x = 0$

69. $x^2 + y^2 = 10$ **70.** $4x^2 + 4y^2 = 25$

71. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

72. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

73. $3x^2 - 12x - 2y + 10 = 0$

74. $4y^2 - 3x + 16y + 4 = 0$

En los ejercicios 75 a 82, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de la primera ecuación; (b) de la gráfica obtenida en el inciso (a) y una traslación de ejes adecuada, dibuje la gráfica de la segunda ecuación. Compruebe las gráficas de los incisos (a) y (b) trazándolas en el mismo rectángulo de inspección.

75. $y = |x|$; $y = |x - 3| + 2$

76. $y = |x|$; $y = |x + 2| - 3$

77. $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x + 5} - 8$

78. $y = 2x^2$; $y = 2(x - 1)^2 + 4$

79. $y = 2x^{1/3}$; $y = 2(x - 4)^{1/3} - 6$

80. $y = \frac{1}{9}x^3$; $y = \frac{1}{9}(x + 3)^3 + 7$

81. $y = \frac{1}{4}x^4$; $y = \frac{1}{4}(x + 6)^4 + 1$

82. $y = 4x^{1/4}$; $y = 4(x - 5)^{1/4} - 2$

En los ejercicios 83 a 86, los puntos A, B, C y D son los vértices de un cuadrilátero. Utilizando pendientes determine si el cuadrilátero es un rectángulo, un paralelogramo, o un trapezoide. Dibuje el cuadrilátero.

83. $A(3, 1)$, $B(5, 2)$, $C(15, 5)$, $D(17, 6)$

84. $A(-8, 0)$, $B(-3, -5)$, $C(1, 4)$, $D(3, 2)$

85. $A(3, 1)$, $B(2, -2)$, $C(-1, -1)$, $D(0, 2)$

86. $A(2, 13)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -1)$, $D(7, 7)$

87. Encuentre la ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta entre los puntos (–1, 5) y (3, 2).

88. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, –3) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 5y = 1$.

89. Halle la ecuación de la parábola que tiene su vértice en (–3, 5) y su foco en (–3, –1).

90. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice está en (5, 1), cuyo eje es paralelo al eje y, y pasa por el punto (9, 3).

En los ejercicios 91 a 96, resuelva el problema encontrando un sistema de ecuaciones como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio escribiendo una conclusión.

91. Un hombre colocó sus ahorros en dos inversiones. La tasa de interés de la inversión *A* es *x*

10% y de la inversión B de 12%. El ingreso anual de las dos inversiones es de \$3 760. Si la inversión A fuera a 12% y la inversión B a 10%, su ingreso anual sería de \$3 720. ¿Cuál es la cantidad total de sus ahorros?

92. En un supermercado que vende fruta por libra, una persona compra 3 lb de naranjas y 6 lb de toronjas por un costo total de \$6, mientras que una segunda persona paga \$6.40 por 5 lb de naranjas y 4 lb de toronjas. ¿Cuál es el precio por libra de las naranjas y de las toronjas?

93. Un químico tiene una solución que es 50% ácido. Al ponerle agua, la solución reduce su contenido de ácido a 40%. Al agregar 500 cm^3 más de agua, la solución contiene sólo el 35% de ácido. Determine **(a)** ¿cuántos cm^3 de la solución al 50% de ácido tenía originalmente el químico?, y **(b)** ¿cuántos centímetros cúbicos de la solución ácida al 35% obtuvo el químico finalmente?

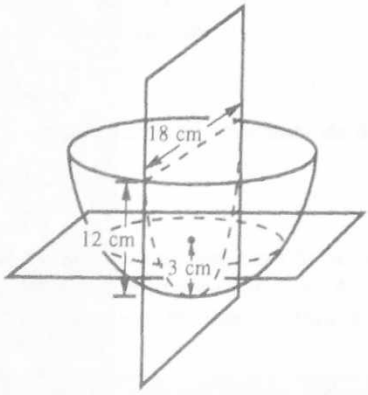
94. Una inversión produce un interés anual de \$7 500. Si se invierten \$5 000 más y la tasa es 1% menor, el interés anual es \$6 500. ¿Cuál es la cantidad invertida y la tasa de interés?

95. Los trabajadores A y B pueden completar un trabajo juntos en 12 días. Si A trabaja sólo por 20 días y B termina el trabajo en sólo 6 días más. ¿Cuánto tiempo tomará a cada trabajador para hacer el trabajo solo? Véase la sugerencia para el ejercicio 33 en la Sección 3.2.

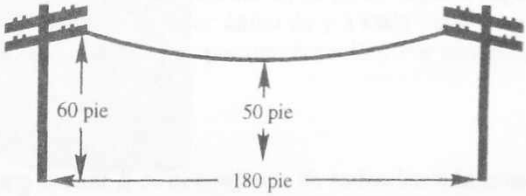
96. Una mujer tiene cierta cantidad de dinero invertida a una tasa de interés particular. Si ella tuviera \$2 000 más invertidos a una tasa 2% menor, debería recibir el mismo interés anual. Si ella tuviera \$2 000 menos invertidos y una tasa 3% mayor, también debería recibir el mismo interés anual. ¿Cuánto tiene ella invertido y a qué tasa?

En los ejercicios 97 y 98, resuelva el problema encontrando la ecuación de una parábola como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio escribiendo la conclusión.

97. Cualquier sección de un espejo parabólico formada al pasar un plano por el eje del espejo es un segmento de una parábola, la altura del segmento es 12 cm y la longitud de la base es 18 cm. Una sección del espejo formada por un plano perpendicular a su eje es un círculo. Encuentre la circunferencia de la sección plana circular si el plano perpendicular se halla a 3 cm del vértice.



98. Un alambre se une 60 pie arriba del suelo a dos postes telefónicos distantes entre sí 180 pie, el cable cuelga en forma de parábola. Si a la mitad de la distancia entre los postes, el alambre está 50 pie arriba del suelo, encuentre la altura del alambre a 45 pie de distancia de cualquiera de los postes.



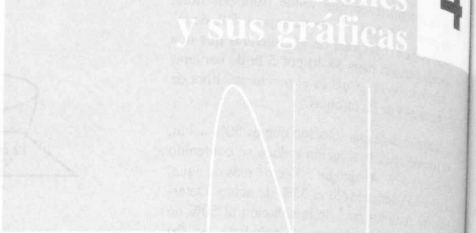
En los ejercicios 99 y 100, utilice la geometría analítica para demostrar el teorema de geometría plana dado.

99. Si las diagonales de un rectángulo son perpendiculares, el rectángulo es un cuadrado.

100. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

Capítulo 4

Funciones y sus gráficas



VISIÓN PRELIMINAR

A menudo, con relación a las aplicaciones prácticas, el valor de una cantidad depende del valor de la otra. Por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que ésta trabajó; la producción total de una fábrica está en función del número de máquinas empleadas; la distancia recorrida por un objeto puede depender del tiempo empleado desde que éste abandonó un punto específico; el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante está sujeto a la temperatura del gas; la resistencia de un cable eléctrico de longitud fija depende de su diámetro, etc. La relación entre tales cantidades y la frecuencia está determinada por medio de una función. La noción de función, una de las más importantes en las matemáticas, es fundamental para el estudio del Cálculo y sirve como concepto unificador a lo largo de este texto.

Sumario

4.1 Funciones
4.2 Gráficas de funciones
4.3 Funciones cuadráticas
4.4 Funciones como modelos matemáticos
4.5 Funciones compuestas

4.1 FUNCIONES

OBJETIVOS

1. **Aprender el concepto intuitivo de función.**
2. **Determinar el dominio de una función.**
3. **Enunciar la definición formal de función.**
4. **Calcular valores de funciones.**
5. **Calcular cocientes diferencia.**
6. **Encontrar la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.**

Debido a que el Cálculo está relacionado con *funciones* de números reales, tales funciones son de interés primario para nosotros. A continuación se introducirá el concepto de función de manera intuitiva.

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales a un conjunto Y de números reales, donde el número y es único para un valor específico de x.

FIGURA 4.1

La Figura 4.1 muestra tal correspondencia, en este caso, los conjuntos X y Y están formados por puntos de una región plana.

El concepto de función puede enunciarse de otra manera, intuitivamente se puede considerar que el número real y del conjunto Y es una *función* del número real x del conjunto X, si existe alguna regla por medio de la cual se asigne un valor único de y a cada valor de x. Esta regla con frecuencia se determina por una ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x^2$$

define la función para la cual X es el conjunto de todos los números reales y Y es el conjunto de los números no negativos. El valor de y en Y asignado al valor de x en X se obtiene multiplicando x por sí mismo. La Tabla 1 proporciona el valor de y asignado a algunos valores particulares de x, la Figura 4.2 muestra la correspondencia para los números en la tabla.

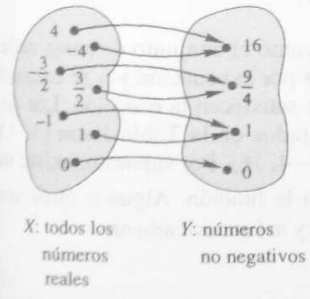


FIGURA 4.2

Tabla 1

x	1	$\frac{3}{2}$	4	0	-1	$-\frac{3}{2}$	-4
$y = x^2$	1	$\frac{9}{4}$	16	0	1	$\frac{9}{4}$	16

Se emplearán símbolos como f, g y h para denotar una función. El conjunto X de números reales descritos anteriormente es el *dominio* de la función, y el conjunto Y de números reales asignados a los valores de x en X es el *contradominio* (o *ámbito*) de la función. Los números x y y son variables. Dado que los valores están asignados para x, por lo

cual el valor de y es dependiente de la x elegida, x es la *variable independiente* y y la *variable dependiente*.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La ecuación

$$y = 2x^2 + 5$$

define una función llamada función f. La ecuación proporciona la regla por medio de la cual puede determinarse un valor único de y siempre que x esté dado; tal regla es: multiplicar x por sí misma, este producto se multiplica por 2, y se suma 5. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, el cual puede denotarse con la notación de intervalo como $(-\infty, +\infty)$. El valor más pequeño que y puede asumir es 5 (cuando $x = 0$). Entonces, el contradominio de f es el conjunto de todos los números positivos mayores o iguales que 5, el cual es $[5, +\infty)$. ◂

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Sea g la función definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

Debido a que los números están restringidos a los números reales, es una función de x sólo para $x \geq 2$, o bien, $x \leq -2$ (o simplemente $|x \geq 2|$); para cualquier x que satisfaga alguna de estas desigualdades, se determina un único valor de y. Sin embargo, si x está en el intervalo $(-2, 2)$, se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo y de aquí que y no sea un número real. Por tanto, se deberá restringir x a $|x| \geq 2$. El dominio de g es $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, y su contradominio es $[0, +\infty)$. ◂

Se puede considerar una función como el conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función definida por la ecuación $y = x^2$ consiste de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Los pares ordenados de esta función presentados en la Tabla 1 son $(1, 1)$, $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(4, 16)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ y $(-4, 16)$. Por supuesto, existe un número infinito de pares ordenados en la función. Algunos otros son $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(5, 25)$, $(-5, 25)$, $(\sqrt{3}, 3)$ y así sucesivamente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La función f del ejemplo ilustrativo 1 es el conjunto de los pares ordenados (x, y) para los cuales $y = 2x^2 + 5$. Algunos de los pares ordenados en f son $(0, 5)$, $(1, 7)$, $(\sqrt{2}, 9)$, $(2, 13)$, $(-1, 7)$, $(-\sqrt{5}, 15)$ y otros más. ◂

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

La función g del ejemplo ilustrativo 2 es el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales $y = \sqrt{x^2 - 4}$. Algunos de los pares ordenados de g son $(2, 0)$, $(5, \sqrt{21})$, $(-2, 0)$, $(3, \sqrt{5})$, $(-9, \sqrt{78})$, y muchos más. ◀

Ahora, se dará la definición formal de una función. Ésta se define como un conjunto de pares ordenados más que como una regla de correspondencia , lo cual hace su significado preciso.

DEFINICIÓN **Una función**

Una **función** es el conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) en los cuales dos pares ordenados distintos no tienen el mismo primer número. El conjunto de todos los valores permisibles de x es llamado **dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y se conoce como **contradominio** (o **ámbito**) de la función.

En esta definición, el hecho de que dos pares ordenados distintos no pueden tener igual el primer número, asegura que y es único para un valor específico de x.

Si f es la función en la que la variable x representa a los elementos de su dominio y la variable y representa a los del contradominio, el símbolo $f(x)$ (léase "f de x") denota el valor particular de y que corresponde al valor de x. Esta notación se debe al físico-matemático suizo **Leonhard Euler** (1707-1783).

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

En el ejemplo ilustrativo 1, f es la función definida por la ecuación $y = 2x^2 + 5$. Así,

$$f(x) = 2x^2 + 5$$

Dado que cuando $x = 1$, $2x^2 + 5 = 7$, se tiene que $f(1) = 7$. De manera similar $f(-2) = 13$, $f(0) = 5$, y así sucesivamente. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

En el ejemplo ilustrativo 2, g se define por la ecuación $y = \sqrt{x^2 - 4}$. Por tanto,

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

Ahora se calculará $g(x)$ para algunos valores específicos de x, $g(2) = 0$, $g(5) = \sqrt{21}$, $g(-2) = 0$, $g(-9) = \sqrt{78}$, y así sucesivamente.

Cuando se define una función, el dominio de la función debe darse de forma implícita o explícita; por ejemplo, si f está definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

esto implica que x puede ser cualquier número real. Sin embargo, si f se define por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad 1 \leq x \leq 10$$

entonces el dominio de f consta de todos los números reales entre 1 y 10, inclusive 1 y 10.

De manera similar, si g se define por la ecuación

$$g(x) = \frac{5x - 2}{x + 4}$$

está implícito que $x \neq -4$, debido a que el cociente no está definido para $x = -4$, de aquí que el dominio de g sea el conjunto de todos los números reales excepto -4.

Si

$$h(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

está implícito que x se encuentra en el intervalo cerrado $[-3, 3]$ debido a que $\sqrt{9 - x^2}$ no es un número real para $x > 3$, o bien $x < -3$. Así, el dominio de h es $[-3, 3]$, y su contradominio es $[0, 3]$.

► EJEMPLO 1 *Cálculo de valores de una función*

Dado que f es la función definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

encuentre: **(a)** $f(0)$; **(b)** $f(2)$; **(c)** $f(h)$; **(d)** $f(2h)$; **(e)** $f(2x)$.

Solución

(a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$
$= -4$

(b) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$
$= 6$

(c) $f(h) = h^2 + 3h - 4$

(d) $f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4$
$= 4h^2 + 6h - 4$

(e) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4$
$= 4x^2 + 6x - 4$

► EJEMPLO 2 *Cálculo de valores de una función*

Para la función del ejemplo 1, encuentre: **(a)** $f(x + h)$; **(b)** $f(x) + f(h)$

Solución

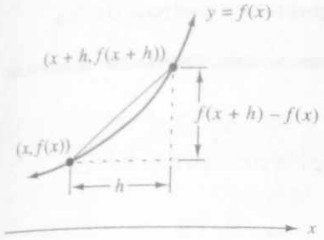


FIGURA 4.3

(a) $f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 4$

$= x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4$

$= x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 4)$

(b) $f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4)$

$= x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8)$ ◀

Compare los cálculos del ejemplo 2. En el inciso (a) se encontró $f(x + h)$, el cual es el valor de la función de la suma de x y h. En el inciso (b), donde se calculó $f(x) + f(h)$, se obtuvo la suma de dos valores de la función, $f(x)$ y $f(h)$.

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$

En Cálculo, frecuentemente, se determinan cocientes de la forma

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

llamados *cociente diferencia*. Un cociente diferencia se considera como la pendiente de una recta que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. *Véase* la Figura 4.3.

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ ▶ **EJEMPLO 3** ***Cálculo de un cociente diferencia***

Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, y $h \neq 0$, encuentre

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Solución

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{3(x + h)^2 - 2(x + h) + 4 - (3x^2 - 2x + 4)}{h}$$

$$= \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 2x - 2h + 4 - 3x^2 + 2x - 4}{h}$$

$$= \frac{6hx - 2h + 3h^2}{h}$$

$$= 6x - 2 + 3h$$ ◀

Ahora se definirán algunas operaciones entre funciones. En la definición se forman nuevas funciones mediante la suma, resta, multiplicación y división de los valores de las funciones dadas. Por tanto, estas nuevas funciones se conocen como la *suma*, la *diferencia*, el *producto* y el *cociente* de las funciones originales.

DEFINICIÓN **Suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones**

Dadas dos funciones f y g:

(i) Su **suma**, denotada por $f + g$, es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) Su **diferencia**, denotada por $f - g$, es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) Su **producto**, denotado por $f \cdot g$, es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) Su **cociente**, denotado por f/g, es la función definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

En cada uno de los casos, el *dominio* de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f y de g, con el requerimiento adicional en el inciso (iv) de que los valores de x para los cuales $g(x) = 0$ están excluidos.

▸ EJEMPLO 4 *Operaciones con funciones*

Dado que f y g son las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x - 4}$$

encuentre: **(a)** $(f + g)(x)$; **(b)** $(f - g)(x)$; **(c)** $(f \cdot g)(x)$; **(d)** $(f/g)(x)$. En cada caso determine el dominio de la función resultante.

Solución

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 4}$

(b) $(f - g)(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x - 4}$ **(d)** $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 4}}$

El dominio de f es $[-1, +\infty)$, y el dominio de g es $[4, +\infty)$. En los incisos (a), (b) y (c) el dominio de la función resultante es $[4, +\infty)$.

En el inciso (d) el denominador es cero cuando $x = 4$; por lo que 4 está excluido del dominio y éste es, por tanto $(4, +\infty)$. ◀

EJERCICIOS 4.1

1. Dada $f(x) = 2x - 1$, encuentre:
   (a) $f(3)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(0)$
   (d) $f(a + 1)$ (e) $f(x + 1)$

2. Dada $f(x) = x^2 + 1$, encuentre:
   (a) $f(2)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(0)$
   (d) $f(a - 1)$ (e) $f(x - 1)$

3. Dada $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, encuentre:
   (a) $f(-1)$ (b) $f(4)$ (c) $[f(x)]^2$
   (d) $f(x^2)$

4. Dada $f(x) = 8 - x^3$, encuentre:
   (a) $f(-2)$ (b) $f(5)$ (c) $[f(x)]^2$
   (d) $f(x^2)$

5. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, encuentre:
   (a) $f(1)$ (b) $f(-3)$ (c) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$
   (d) $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$ (e) $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ (f) $\dfrac{f(3)}{f(x)}$

6. Dada $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}$, encuentre:
   (a) $f(7)$ (b) $f(-5)$ (c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
   (d) $f\left(\dfrac{a}{2}\right)$ (e) $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (f) $\dfrac{f(x)}{f(2)}$

7. Dada $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, encuentre:
   (a) $f(-1)$ (b) $f(4)$ (c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
   (d) $f(11)$ (e) $f(2x + 3)$

8. Dada $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$, encuentre:
   (a) $f(-2)$ (b) $f(0)$ (c) $f(1)$
   (d) $f\left(\dfrac{4}{7}\right)$ (e) $f(2x^2 + 1)$

En los ejercicios 9 a 12, encuentre cada una de las siguientes expresiones para la función indicada:
(a) $2f(x)$; (b) $f(2x)$; (c) $f(x) + f(h)$; (d) $f(x + h)$.

9. La función del ejercicio 1.

10. La función del ejercicio 2.

11. La función del ejercicio 5.

12. La función del ejercicio 6.

En los ejercicios 13 a 22, calcule y simplifique el cociente diferencia para cada una de las funciones indicadas.

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

13. La función del ejercicio 1.

14. La función del ejercicio 2.

15. La función del ejercicio 3.

16. La función del ejercicio 4.

17. La función del ejercicio 5.

18. La función del ejercicio 6.

19. La función del ejercicio 7, simplificándola por racionalización del numerador.

20. La función del ejercicio 8, simplificándola por racionalización del numerador.

21. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$; simplificándola por racionalización del numerador.

22. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$; simplificándola por racionalización del numerador.

En los ejercicios 23 a 32, defina las funciones siguientes y determine el dominio de la función resultante:
(a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g y (e) g/f.

23. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

24. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

25. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

26. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

27. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

28. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$

29. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

30. $f(x) = \sqrt{x + 4}$; $g(x) = x^2 - 4$

31. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

32. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

33. Dada $H(x) = |x - 2| - |x| + 2$, exprese $H(x)$ sin las barras de valor absoluto, si x está en el intervalo
(a) $[2, +\infty)$ **(b)** $(-\infty, 0)$ **(c)** $[0, 2)$

34. Dada $f(t) = \dfrac{|3 + t| - |t| - 3}{t}$ exprese $f(t)$ sin las barras de valor absoluto, si t está en el intervalo:
(a) $(0, +\infty)$ **(b)** $[-3, 0)$ **(c)** $(-\infty, -3)$

35. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

encuentre
(a) $f(1)$ **(b)** $f(-1)$ **(c)** $f(4)$
(d) $f(-4)$ **(e)** $f(-x)$ **(f)** $f(x + 1)$
(g) $f(x^2)$ **(h)** $f(-x^2)$

36. En esta sección se introdujeron las notaciones f, $f(x)$, pertenecientes a funciones, así como sus diferentes significados. Explique lo que significa cada una de las notaciones, y en la explicación proponga una ecuación que defina una función, emplee la ecuación propuesta para diferenciar entre f y $f(x)$.

4.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

OBJETIVOS

1. **Definir la gráfica de una función.**
2. **Encontrar el dominio y contradominio de una función.**
3. **Dibujar gráficas de funciones.**
4. **Definir tipos de funciones.**
5. **Definir función par y función impar.**
6. **Determinar cuándo una función es par, impar o ninguna de las dos.**

En la Sección 4.1 se dijo que una función f puede representarse por una ecuación de la forma $y = f(x)$, la cual da el conjunto de pares ordenados en la función. El concepto de función como conjunto de pares ordenados permite proporcionar la siguiente definición de la gráfica de una función.

DEFINICIÓN **Gráfica de una función**

Si f es una función, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en R^2 para el cual (x, y) es un par ordenado de f.

A partir de esta definición se puede decir que la gráfica de la función f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

Recuerde que para una función existe un único valor de la variable dependiente por cada valor de la variable independiente del dominio de la función. En términos geométricos, esto significa:

La gráfica de una función puede ser cortada por una recta vertical, en no más de un punto.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

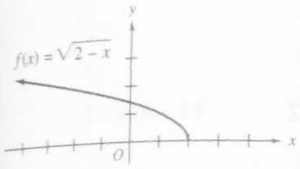


FIGURA 4.4

Dada,

$$f(x) = \sqrt{2 - x}$$

La gráfica de f se muestra en la Figura 4.4. Observe la recta vertical que tiene la ecuación $x = k$, donde $k \leq 2$, corta la gráfica en sólo un punto. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales menores o iguales que 2, el cual es el intervalo $(-\infty, 2]$, y su contradominio es el conjunto de todos los números reales no negativos, esto es, $[0, +\infty)$. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

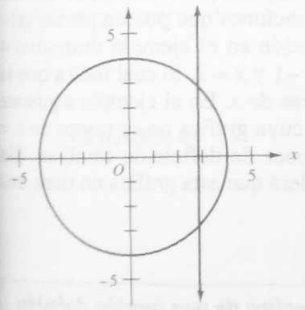


FIGURA 4.5

Considere el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los cuales

$$x^2 + y^2 = 25$$

La gráfica de este conjunto se muestra en la Figura 4.5. Este conjunto de pares ordenados no es una función, debido a que para cualquier x en el intervalo $(-5, 5)$ hay dos pares ordenados que tienen x como el primer número. Por ejemplo $(3, 4)$ y $(3, -4)$ son pares ordenados en el conjunto dado. Además, observe que la gráfica del conjunto es una circunferencia con centro en el origen y radio 5, y cualquier recta vertical cuya ecuación es $x = k$, donde $-5 < k < 5$, intersecta a la circunferencia en dos puntos. ◀

El dominio de una función es, generalmente, evidente a partir de la definición de la función. Con frecuencia, el contradominio puede ser determinado por medio de la gráfica de la función.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La gráfica de la función definida por

$$f(x) = |x - 4| - 6$$

es, por supuesto, la gráfica de la ecuación $y = |x - 4| - 6$, la cual se obtuvo en el ejemplo 4 de la Sección 3.5. Aquí se reproduce como la

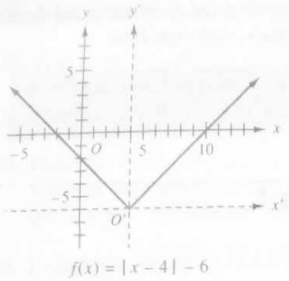


FIGURA 4.6

Figura 4.6. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$, y el contradominio, evidente en la gráfica, es $(-6, +\infty)$.

En el siguiente ejemplo ilustrativo se tiene una *función definida a trozos* (o tramos) la cual se obtiene por más de una ecuación.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

La gráfica de g se muestra en la Figura 4.7. El punto sólido $(-1, -3)$ y el punto vacío $(-1, 1)$ indican que el valor de y es -3 cuando $x = -1$. El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$, mientras que el contradominio consiste de tres números -3, 1 y 4.

Para trazar la gráfica de una función de este tipo se requiere consultar el manual de procedimientos de la calculadora gráfica o graficadora.

Las funciones definidas a trozos se emplean por lo común en Cálculo como ejemplos y contraejemplos de funciones que poseen ciertas propiedades. Esto es, la gráfica de la función en el ejemplo ilustrativo 4 tiene rupturas en los puntos donde $x = -1$ y $x = 2$, lo cual indica que la función es *discontinua* para esos valores de x. En el ejemplo siguiente se tiene una función definida a trozos cuya gráfica no se rompe en $x = 1$, el valor de x en el cual las ecuaciones de definición cambian. Sin embargo, al estudiar Cálculo se aprenderá que esta gráfica no tiene una recta tangente en el punto donde $x = 1$.

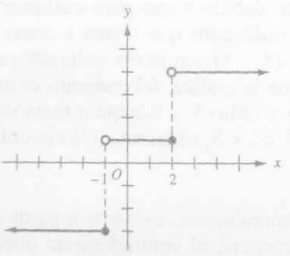


FIGURA 4.7

▸ EJEMPLO 1 *Dibujo de la gráfica de una función definida a trozos y determinación de su dominio y contradominio*

Dibuje la gráfica de la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 1) & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Determine el dominio y contradominio de h. Compruebe la gráfica por medio de la graficadora.

Solución Cuando $x < 1$, los valores de la función están en la recta $y = 3x - 2$ y cuando $1 \leq x$, los valores de la función están sobre

FIGURA

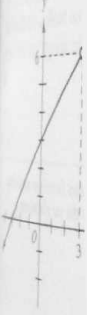


FIGURA 4.9

FIGURA 4.10

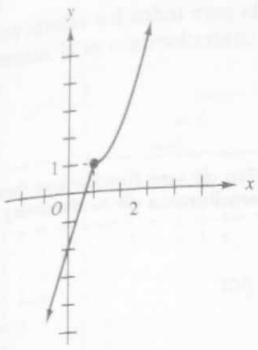


FIGURA 4.8

parábola $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. La gráfica se muestra en la Figura 4.8. Tanto el dominio como el contradominio son $(-\infty, +\infty)$. La graficadora proporciona la misma gráfica. ◄

► **EJEMPLO 2** ***Dibujo de la gráfica de una función que tiene un agujero y determinación de su dominio y contradominio***

Dibuje la gráfica de la función F definida por

$$F(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

y encuentre su dominio y su contradominio.

Solución Debido a que el valor de la función está determinado para cada valor de x, excepto 3; el dominio de F consta, de todos los números reales excepto 3. Cuando $x = 3$, tanto el numerador como el denominador son cero y $\frac{0}{0}$ no está definido.

Al factorizar el numerador como $(x - 3)(x + 3)$, se obtiene

$$F(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

o $F(x) = x + 3$, teniendo en cuenta que $x \neq 3$. En otras palabras, la función F consta de todos los pares ordenados (x, y) tales que

$$y = x + 3 \quad \text{y} \quad x \neq 3$$

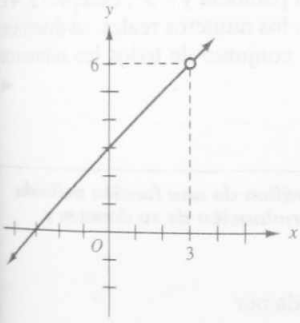


FIGURA 4.9

De esta definición de F, es evidente que la gráfica contiene todos los puntos sobre la recta $y = x + 3$ excepto el punto (3, 6). La gráfica se muestra en la Figura 4.9. El contradominio de F es el conjunto de todos los números reales excepto 6. ◄

En el ejemplo 2, la gráfica tiene un "agujero" en $x = 3$. Donde $F(3)$ no está definido. En el siguiente ejemplo, la gráfica también tiene un agujero en $x = 3$, pero el valor de la función en 3 está definido.

► **EJEMPLO 3** ***Dibujo de la gráfica de una función que tiene un agujero y determinación de su dominio y contradominio***

Dibuje la gráfica de la función G definida por

$$G(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Determine el dominio y contradominio de G.

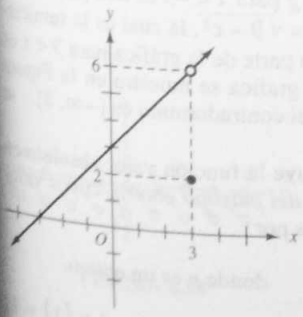


FIGURA 4.10

Solución La gráfica de G se muestra en la Figura 4.10. La gráfica contiene el punto (3, 2) y todos los puntos sobre la recta $y = x + 3$,

excepto (3, 6). La función G está definida para todos los valores de x, por tanto, el dominio es $(-\infty, +\infty)$. El contradominio es el conjunto de todos los números reales, excepto 6.

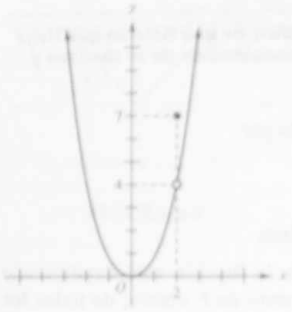


FIGURA 4.11

▸ EJEMPLO 4 *Dibujo de la gráfica de una función que tiene un agujero y determinación de su dominio y contradominio*

Dibuje la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determine el dominio y contradominio.

Solución La gráfica de f, mostrada en la Figura 4.11, consta del punto (2, 7) y todos los puntos sobre la parábola $y = x^2$, excepto (2, 4). Debido a que f está definida para todos los números reales, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. El contradominio es el conjunto de todos los números reales no negativos.

▸ EJEMPLO 5 *Dibujo de la gráfica de una función definida a trozos y determinación de su dominio y contradominio*

Dibuje la gráfica de la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 5 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Determine el dominio y contradominio de g.

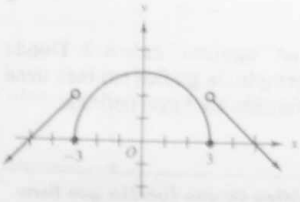


FIGURA 4.12

Solución La parte de la gráfica de g para $x < -3$ es una porción de la recta $y = x + 5$. Para $-3 \leq x \leq 3$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, la cual es la semicircunferencia superior de $x^2 + y^2 = 9$. La parte de la gráfica para $3 < x$ es una porción de la recta $y = 5 - x$. La gráfica se muestra en la Figura 4.12. El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$ y el contradominio es $(-\infty, 3]$.

De igual manera, como se construye la función valor absoluto en una graficadora, se *grafica la función del máximo entero*, cuyos valores se denotan por $[x]$ y están definidos por

$$[x] = n \quad \text{si } n \leq x < n + 1, \quad \text{donde } n \text{ es un entero.}$$

O sea, $[x]$ es el entero más grande, menor que o igual a x. Así $[6] = 6$, $[1.3] = 1$, $[\frac{1}{2}] = 0$, $[-4.2] = -5$, $[-8] = -8$, y así sucesivamente.

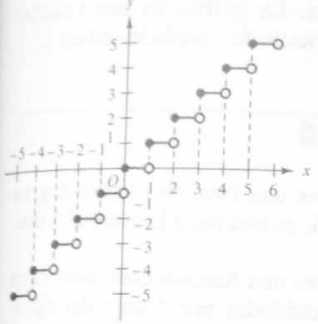


FIGURA 4.13

La gráfica de la función del máximo entero se muestra en la Figura 4.13. En muchas graficadoras esta función se denota por $INT(x)$. Los siguientes valores se utilizan para obtener la gráfica:

$$
\begin{aligned}
-5 \le x < -4 \quad & [\![x]\!] = -5 \\
-4 \le x < -3 \quad & [\![x]\!] = -4 \\
-3 \le x < -2 \quad & [\![x]\!] = -3 \\
-2 \le x < -1 \quad & [\![x]\!] = -2 \\
-1 \le x < 0 \quad & [\![x]\!] = -1 \\
0 \le x < 1 \quad & [\![x]\!] = 0 \\
1 \le x < 2 \quad & [\![x]\!] = 1 \\
2 \le x < 3 \quad & [\![x]\!] = 2 \\
3 \le x < 4 \quad & [\![x]\!] = 3 \\
4 \le x < 5 \quad & [\![x]\!] = 4
\end{aligned}
$$

El dominio de la función del máximo entero es el conjunto de todos los números reales y su contradominio consta de todos los enteros.

► **EJEMPLO 6** ***Dibujo de la gráfica de una función que implica la función del máximo entero y determinación de su dominio y contradominio***

Dibuje la gráfica de la función H definida por

$$H(x) = [\![x]\!] - x$$

Determine el dominio y contradominio de H y compruebe la gráfica obtenida en una graficadora.

Solución

Si $0 \le x < 1$, $[\![x]\!] = 0$; entonces $[\![x]\!] - x = -x$

Si $1 \le x < 2$, $[\![x]\!] = 1$; entonces $[\![x]\!] - x = 1 - x$

Si $2 \le x < 3$, $[\![x]\!] = 2$; entonces $[\![x]\!] - x = 2 - x$

Si $-1 \le x < 0$, $[\![x]\!] = -1$; entonces $[\![x]\!] - x = -1 - x$

Si $-2 \le x < -1$, $[\![x]\!] = -2$; entonces $[\![x]\!] - x = -2 - x$

y así sucesivamente.

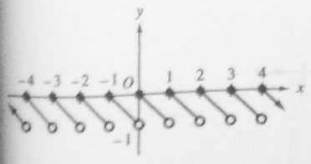


FIGURA 4.14

La gráfica de H se muestra en la Figura 4.14. El dominio es el conjunto de todos los números reales, y el contradominio es $(-1, 0]$.

La gráfica de la función H se obtiene en la graficadora mediante

$$y = INT(x) - x$$

◄

Una función cuyo contradominio consta de un solo número se denomina **función constante.** Es decir, si $f(x) = c$, donde c es cualquier número real, f es una función constante. La gráfica de una función constante es una recta horizontal a una distancia de c unidades del eje x.

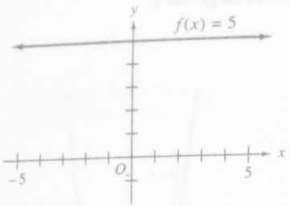


FIGURA 4.15

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) La función definida por $f(x) = 5$ es una función constante y su gráfica se muestra en la Figura 4.15, es una recta horizontal 5 unidades arriba del eje x.

(b) La función definida por $g(x) = -4$ es una función constante, cuya gráfica es una recta horizontal 4 unidades por debajo del eje x. *Véase* la Figura 4.16.

Una **función lineal** está definida por

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes y $m \neq 0$. Su gráfica es una recta que tiene pendiente m e intercepta el eje y en b.

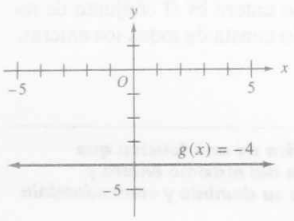


FIGURA 4.16

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

La función definida por

$$f(x) = 3x - 2$$

es lineal. Su gráfica es la recta que aparece en la Figura 4.17.

La función lineal particular definida por

$$f(x) = x$$

se denomina **función identidad.** Su gráfica, mostrada en la Figura 4.18, es la recta que bisecta los cuadrantes primero y tercero.

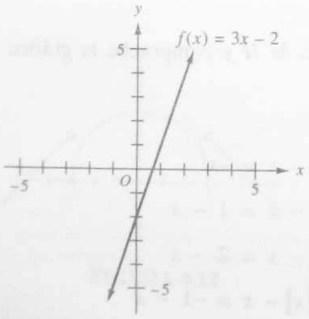


FIGURA 4.17

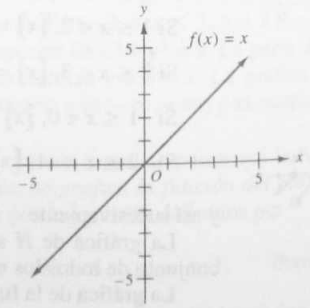


FIGURA 4.18

Si una función f está definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales ($a_n \neq 0$) y n es un entero no negativo, entonces, f se llama **función polinomial** de grado n. Así, la función

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

es una función polinomial de grado 5.

Una función lineal es una función polinomial de grado 1. Si el grado de una función polinomial es 2, ésta se denomina **función cuadrática,** y si el grado es 3 se llama **función cúbica.**

Las funciones cuadráticas se discutirán en la Sección 4.3, y la gráfica de la función polinomial se tratará en la Sección 5.3.

Una función que puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales se le llama **función racional.** Las gráficas de las funciones racionales están consideradas en la Sección 5.5.

Una **función algebraica** es aquella que está formada por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y la función constante. Estas operaciones algebraicas incluyen adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces. Las funciones polinomiales y racionales son formas particulares de funciones algebraicas. Un ejemplo complicado de una función algebraica es el que está definido por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Las **funciones trascendentales** también se discuten en este texto. Ejemplos de funciones trascendentales son las funciones exponenciales y logarítmicas que se presentan en el Capítulo 6, así como las funciones trigonométricas tratadas en el Capítulo 7.

Una función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y es una *función par*, y una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen en una *función impar*. A continuación se dan las definiciones formales.

DEFINICIÓN **Función par y función impar**

(i) Se dice que una función f es **par** si para cada x en el dominio de f, $f(-x) = f(x)$.

(ii) Se dice que una función f es **impar** si para cada x en el dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.

En ambos incisos, (i) y (ii), se sobreentiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

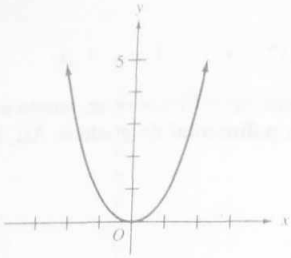


FIGURA 4.19

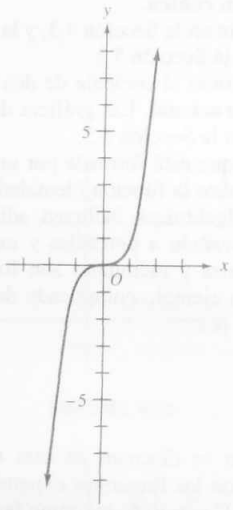


FIGURA 4.20

Las propiedades de simetría de las funciones pares e impares se deducen a partir de las pruebas de simetría determinadas en la Sección 1.5.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

(a) Si $f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2$. Por tanto, $f(-x) = f(x)$ y así, f es una función par. Su gráfica es una parábola simétrica con respecto al eje y. *Véase* la Figura 4.19.

(b) Si $g(x) = x^3$, $g(-x) = (-x)^3$. Dado que $g(-x) = -g(x)$, g es una función impar. La gráfica de g, mostrada en la Figura 4.20, es simétrica con respecto al origen.

▸ EJEMPLO 7 *Determinación gráfica y algebraica de cuándo una función es par, impar o de ninguna de las dos clases*

Trace la gráfica de la función dada y a partir de ésta establezca si la función es par, impar o ninguna de ellas. Demuestre lo mencionado de manera algebraica.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

(b) $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

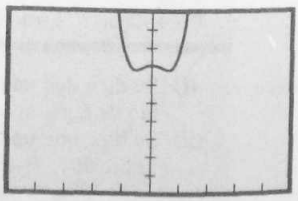
(c) $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

Solución

(a) La gráfica de f, presentada en la Figura 4.21, es simétrica con respecto al eje y. Por tanto, la función es par. Para demostrar esto de manera algebraica se calcula $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Debido a que $f(-x) = f(x)$, f es par.



[−5, 5] por [0, 10]
$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

FIGURA 4.21

[−5, 5] por [−11, 11]
$g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

FIGURA 4.22

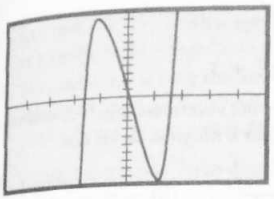
[−5, 5] por [−30, 30]
$h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

FIGURA 4.23

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 42, dibuje y determine su dominio y cualquier gráfica detectada en una gráfica

1. $F(x) = 3x - 1$
2. $F(x) = 2x^2$
5. $g(x) = 5 - x^2$
7. $G(x) = \sqrt{x - 1}$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
11. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
13. $h(x) = |x - 3|$
15. $F(x) = |3x + 2|$
17. $H(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$
19. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x + 3}$

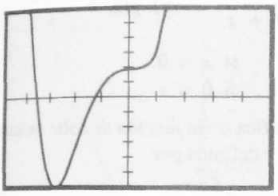


[-5, 5] por [-11, 11]
$g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$
FIGURA 4.22

(b) La Figura 4.22 muestra la gráfica de g, la cual es simétrica con respecto al origen. Por consiguiente, la función es impar. Al calcular $g(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Dado que $g(-x) = -g(x)$, se ha comprobado algebraicamente que g es impar.



[-5, 5] por [-30, 30]
$h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$
FIGURA 4.23

(c) La gráfica de h, que aparece en la Figura 4.23, no es simétrica ni con respecto al origen, ni en relación con el eje y. Por tanto, la función no es par ni impar. Si se calcula $h(-x)$ se tiene:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Debido a que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, h no es ni par ni impar. ◀

EJERCICIOS 4.2

En los ejercicios 1 a 42, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y contradominio. Compruebe la gráfica obtenida en una graficadora.

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $g(x) = 4 - x$
3. $F(x) = 2x^2$
4. $G(x) = x^2 + 2$
5. $g(x) = 5 - x^2$
6. $f(x) = (x - 1)^2$
7. $G(x) = \sqrt{x - 1}$
8. $F(x) = \sqrt{9 - x}$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
10. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$
11. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
13. $h(x) = |x - 3|$
14. $H(x) = |5 - x|$
15. $F(x) = |3x + 2|$
16. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
17. $H(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$
18. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x + 3}$
19. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$
20. $g(x) = \dfrac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 - x - 6}$
21. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$
22. $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$
23. $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$
24. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 8 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
25. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

26. $G(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

27. $G(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

28. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

29. $g(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x & \text{si } -2 < x \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

31. $h(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x & \text{si } 5 < x \end{cases}$

32. $H(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 2 - x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

33. $F(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ **34.** $G(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x + 3}$

35. $h(x) = |x| + |x - 1|$

36. $H(x) = |x^2 - 1|$

37. $g(x) = |x| \cdot |x - 1|$

38. $F(x) = [\![x + 2]\!]$

39. $f(x) = [\![x - 4]\!]$ **40.** $H(x) = |x| + [\![x]\!]$

41. $G(x) = x - [\![x]\!]$ **42.** $h(x) = [\![x^2]\!]$

En los ejercicios 43 a 48, trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica exprese si la función es par, impar o ninguna de las dos. Posteriormente, pruebe lo expresado de forma algebraica.

43. (a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ (b) $g(x) = 5x^5 + 1$

44. (a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ (b) $g(x) = x^6 - 1$

45. (a) $f(x) = 5x^3 - 7x$ (b) $g(x) = |x|$

46. (a) $f(x) = 4x^5 + 3x^3$ (b) $g(x) = x^3 + 1$

47. (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (b) $g(x) = 5x^4 - 4$

48. (a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(b) $g(x) = 2|x| + 3$

En los ejercicios 49 y 50, determine algebraicamente si la función es par, impar o ninguna de las dos.

49. (a) $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ (b) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

50. (a) $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + x}$ (b) $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

51. (a) Dibuje la gráfica de la *función de salto unitario*, denotada por U y definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Encuentre las fórmulas que definenen cada una de las siguientes funciones y dibuje sus gráficas.

(b) $U(x - 1)$ (c) $U(x) - U(x - 1)$

52. Encuentre las fórmulas que definen cada una de las siguientes funciones y dibuje sus gráficas, donde U es la función de salto unitario definida en el ejercicio 51:

(a) $x \cdot U(x)$ (b) $(x + 1) \cdot U(x + 1)$

(c) $(x + 1) \cdot U(x + 1) - x \cdot U(x)$

53. (a) Dibuje la gráfica de la *función signo* denotada por *sgn* y definida por

$$sgn\, x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

sgn x se lee "signo de x". Encuentre las fórmulas que definen cada una de las siguientes funciones y dibuje sus gráficas.

(b) $x \cdot sgn\, x$ (c) $2 - x \cdot sgn\, x$

(d) $x - 2\ sgn\ x$

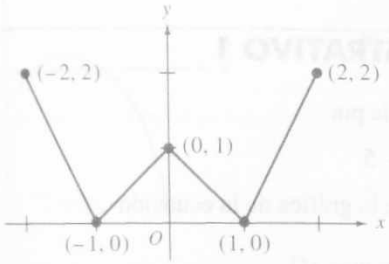
54. Encuentre las fórmulas que definen cada una de las siguientes funciones y dibuje sus gráficas, donde *sgn* es la función signo definida en el ejercicio 53:

(a) $sgn(x + 1)$ (b) $sgn(x - 1)$
(c) $sgn(x + 1) - sgn(x - 1)$

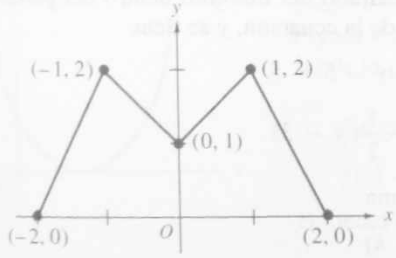
55. Demuestre que si f y g son ambas funciones impares, entonces $(f + g)$ y $(f - g)$ son también funciones impares y $f \cdot g$ y f/g son ambas funciones pares.

56. Existe una función, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, y que es par e impar. ¿Cuál es esa función? Compruebe que ésta es una función única.

57. La gráfica de la función f en la siguiente figura se parece a la letra W. Defina la función a trozos $f(x)$.

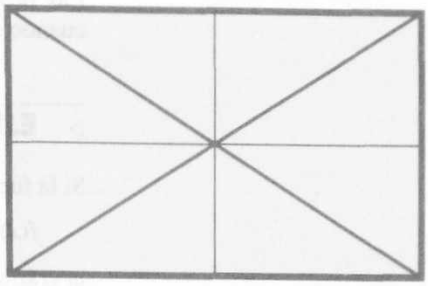


58. La gráfica de la función f en la figura siguiente se parece a la letra M. Defina la función a trozos $f(x)$.



59. Las gráficas de los ejercicios 57 y 58 se parecen a dos letras del alfabeto. Defina otras dos funciones cuyas gráficas tengan parecido con dos letras diferentes del alfabeto.

60. En la figura siguiente, la gráfica tiene un parecido con la letra X y es la unión de las gráficas de dos funciones f_1 y f_2 trazadas en el rectángulo de inspección $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Defina $f_1(x)$ y $f_2(x)$.



$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$

61. Existen tres funciones f_1, f_2 y f_3, la unión de sus gráficas trazadas en el rectángulo de inspección $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ se parece a la letra Z. Defina $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$.

62. Explique por qué la definición de una gráfica es consistente con la definición de una función como un conjunto de pares ordenados. En la explicación utilice un ejemplo específico.

4.3 FUNCIONES CUADRÁTICAS

OBJETIVOS

1. **Dibujar y trazar gráficas de funciones cuadráticas.**
2. **Encontrar los ceros de una función cuadrática.**
3. **Determinar el valor extremo de una función cuadrática.**
4. **Resolver enunciados de problemas que tienen una función cuadrática como modelo matemático.**

En la sección previa se dijo que una función cuadrática es una función polinomial de grado 2. Por consiguiente, la función cuadrática general está definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes que representan números reales y $a \neq 0$. La gráfica de f es la misma que la gráfica de la ecuación

$$y = ax^2 + bc + c$$

la cual, se vio en la Sección 3.3, es una parábola cuyo eje es vertical. Las propiedades discutidas en las secciones 3.3 y 3.5 son de ayuda cuando se dibujan parábolas.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Si la función f está definida por

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

la gráfica de f es igual que la gráfica de la ecuación

$$y = -2x^2 + 8x - 5$$

Esta ecuación es equivalente a

$$2(x^2 - 4x) = -y - 5$$

A fin de completar el cuadrado del binomio dentro del paréntesis, se suma 2(4) a ambos lados de la ecuación, y se tiene

$$2(x^2 - 4x + 4) = -y - 5 + 8$$

$$(x - 2)^2 = -\frac{1}{2}(y - 3)$$

Esta ecuación es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

donde (h, k) es $(2, 3)$ y $p = -\frac{1}{8}$. Por tanto, el vértice de la parábola está en $(2, 3)$ y el eje es la recta $x = 2$. Debido a que $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. Al localizar algunos puntos sobre la parábola y al dibujarla se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 4.24. Verifíquela en una graficadora.

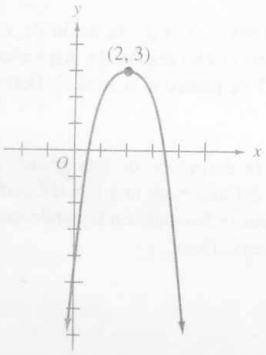


FIGURA 4.24

Los **ceros** de una función f son los valores para los cuales $f(x) =$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La función del ejemplo ilustrativo 1 está definida por

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

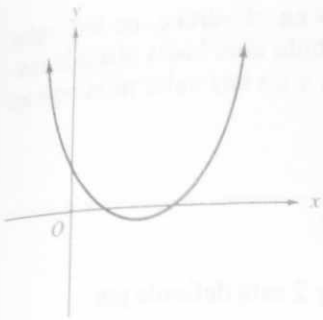


FIGURA 4.25

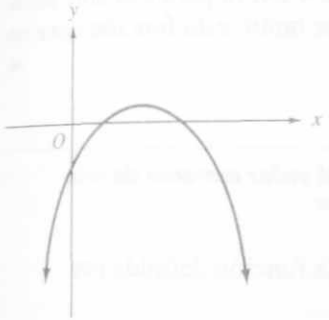


FIGURA 4.26

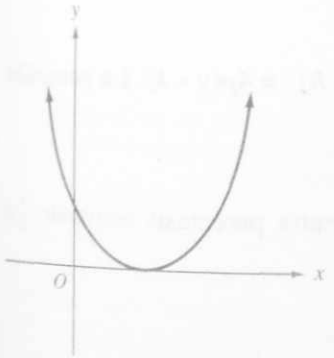


FIGURA 4.27

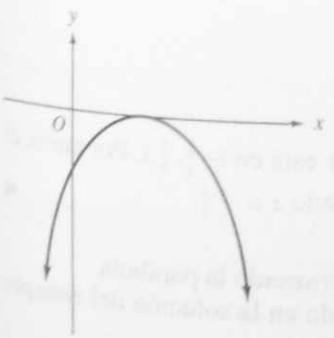


FIGURA 4.28

para encontrar los ceros de esta función, se sustituye 0 por $f(x)$ y se obtiene

$$-2x^2 + 8x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 8x + 5 = 0$$

Al resolver esta ecuación mediante la fórmula cuadrática, donde $a = 2$, $b = -8$ y $c = 5$, se tiene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 40}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{24}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$$

De aquí que los ceros de f son

$$\frac{4 + \sqrt{6}}{2} \approx 3.22 \quad \text{y} \quad \frac{4 - \sqrt{6}}{2} \approx 0.78$$

Estos números son también las intercepciones x de la parábola de la Figura 4.24. Verifique estas intercepciones x usando el aumento (*zoom in*) de la graficadora. ◀

En general, si

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

entonces los ceros de f son las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En la Sección 2.2 se vio que una ecuación cuadrática en una variable puede tener dos raíces reales, una raíz real (de multiplicidad 2), o dos raíces imaginarias. Si una ecuación cuadrática tiene dos raíces reales, la función cuadrática correspondiente tiene dos ceros reales y su gráfica intersecta al eje x en dos puntos distintos. Esta situación se muestra en la Figura 4.25, donde la parábola abre hacia arriba ($a > 0$), y en la Figura 4.26 en la cual la parábola abre hacia abajo ($a < 0$). Si la función tiene un cero real, entonces la gráfica intersecta al eje x en un solo punto, como se muestra en las figuras 4.27 ($a > 0$) y 4.28 ($a < 0$). Si la función tiene dos ceros imaginarios, la gráfica no intersecta al eje x; esto se muestra en las figuras 4.29 ($a > 0$) y 4.30 ($a < 0$).

Al valor de la función en el vértice de la gráfica de una función cuadrática se le llama **valor extremo.** Cuando la parábola abre hacia

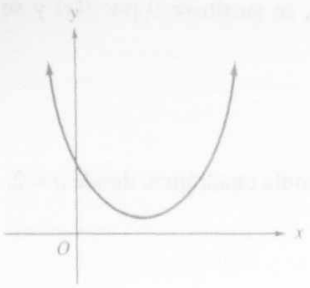


FIGURA 4.29

arriba, la función tiene un **valor mínimo** en el vértice, no hay valor máximo para tal función. Cuando la parábola abre hacia abajo la función tiene un **valor máximo** en el vértice; y no hay valor mínimo para esa función.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La función de los ejemplos ilustrativos 1 y 2 está definida por

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

La gráfica de f es la parábola de la Figura 4.24, la parábola abre hacia abajo y su vértice se localiza en (2, 3). Por tanto, esta función tiene un valor máximo de 3 cuando $x = 2$. ◁

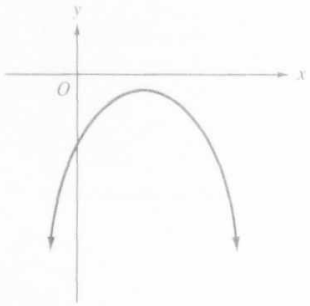


FIGURA 4.30

► EJEMPLO 1 *Determinación del valor extremo de una función cuadrática*

Encuentre el valor máximo o mínimo de la función definida por

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

Solución La gráfica de f es la parábola que tiene la ecuación

$$y = 3x^2 + 3x + 2$$

Se escribe esta ecuación en la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. La ecuación es equivalente a

$$3(x^2 + x) = y - 2$$

Al completar el cuadrado del binomio entre paréntesis sumando $\frac{3}{4}$ a ambos lados de la ecuación, se tiene

$$3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = y - 2 + \frac{3}{4}$$

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y - \frac{5}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(y - \frac{5}{4}\right)$$

La parábola abre hacia arriba, y su vértice está en $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$. Por tanto, el valor mínimo de f es $\frac{5}{4}$, lo que ocurre cuando $x = -\frac{1}{2}$. ◄

Verifique el resultado del ejemplo 1 trazando la parábola.

Ahora, se aplicará el método empleado en la solución del ejemplo 1 a la función cuadrática general definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

En esta ecuación si se sustituye $f(x)$ por y, se obtiene

$$y = ax^2 + bx + c$$

la cual es equivalente a

$$ax^2 + bx = y - c$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = y - c$$

Se completa el cuadrado del binomio dentro del paréntesis.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = y - c + \frac{b^2}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola que tiene su vértice en el punto $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, y f tiene un valor mínimo en el punto donde $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y f tiene un valor máximo en el punto donde $x = -\frac{b}{2a}$. Estos resultados están determinados en el teorema siguiente.

TEOREMA 1

La función cuadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$ tiene un valor extremo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a > 0$, el valor extremo es un valor mínimo; y si $a < 0$, el valor extremo es un valor máximo.

► EJEMPLO 2 *Determinación del valor extremo de una función cuadrática*

Emplee el Teorema 1 para encontrar el valor máximo o mínimo de la función g si

$$g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 10$$

Verifique el resultado trazando la gráfica de g.

Solución Para la ecuación cuadrática dada, $a = -\frac{3}{2}$ y $b = 6$. Debido a que $a < 0$, g tiene un valor máximo en el punto donde

$$x = -\frac{b}{2a}$$

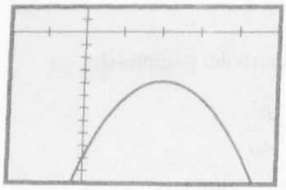
$$= -\frac{6}{2\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$= 2$$

El valor máximo es

$$g(2) = -\frac{3}{2}(2)^2 + 6(2) - 10$$

$$= -4$$



[−2, 5] por [−12, 2]
$g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 10$

FIGURA 4.31

La gráfica de g trazada en una graficadora se muestra en la Figura 4.31, la cual es una parábola con vértice en $(2, -4)$ y abre hacia abajo. Esto está de acuerdo con el resultado obtenido.

En aplicaciones de Cálculo, a menudo se requiere obtener una función como modelo matemático. A continuación se darán cuatro ejemplos que implican funciones cuadráticas como modelos matemáticos.

► EJEMPLO 3 *Resolución del enunciado de un problema que tiene una función cuadrática como modelo matemático*

En el ejemplo 7 de la Sección 2.6, se tenía la siguiente situación: Una decoradora diseñó adornos de pared y pudo venderlos a 75 dólares cada uno. Si x adornos son manufacturados al día, entonces el número de dólares en el costo de producción total es $x^2 + 25x + 96$. **(a)** ¿Cuántos adornos deberán producirse diariamente para que la decoradora obtenga la mayor utilidad? **(b)** Compruebe la respuesta del inciso (a) con una graficadora.

Solución

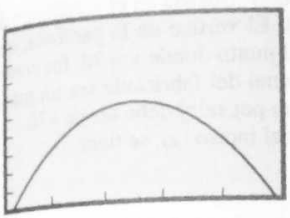
(a) Si $P(x)$ dólares es la utilidad diaria de la venta de x adornos, entonces, como en el ejemplo 7 de la Sección 2.6,

$$P(x) = -x^2 + 50x - 96$$

La función P es cuadrática con $a = -1$ y $b = 50$. Debido a que $a <$ P tiene un valor máximo en el punto donde

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$= 25$$



[0, 50] por [0, 1 000]
$P(x) = -x^2 + 50x - 96$
FIGURA 4.32

Conclusión: Para obtener la mayor utilidad, el número de adornos producidos y vendidos cada día debe ser 25.

(b) La Figura 4.32 muestra la gráfica de P trazada en el rectángulo de inspección [0, 50] por [0, 1 000]. La coordenada x del vértice de la parábola parece ser 25, lo cual está de acuerdo con la respuesta del inciso (a). ◄

► EJEMPLO 4 *Resolución del enunciado de un problema que tiene una función cuadrática como modelo matemático*

Un fabricante de relojes puede producir un tipo de reloj a un costo de \$15 por unidad. Si el precio de venta es de x dólares, entonces $(125 - x)$ relojes se venden por semana. **(a)** Exprese el número de dólares en la ganancia semanal del fabricante como una función de x. **(b)** A partir de la función obtenida en el inciso (a), determine la ganancia semanal si el precio de venta es de \$45 por reloj. **(c)** Trace la gráfica de la función del inciso (a) y estime el precio de venta para que la ganancia semanal del fabricante sea un máximo. **(d)** Compruebe algebraicamente lo estimado en el inciso (c).

Solución

(a) La ganancia puede obtenerse restando el costo total de las ventas totales. Sea $R(x)$ dólares la venta semanal. Debido a que la venta total es el producto del precio de venta y el número de relojes vendidos,

$$R(x) = x(125 - x)$$

Sea $C(x)$ dólares el costo total de los relojes que son vendidos semanalmente. Debido a que el costo total es el producto del costo de cada reloj y el número de relojes vendidos, entonces.

$$C(x) = 15(125 - x)$$

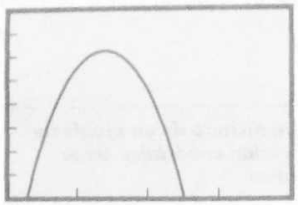
Si $P(x)$ dólares es la ganancia semanal, entonces

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= x(125 - x) - 15(125 - x) \\ &= (125 - x)(x - 15) \end{aligned}$$

(b) Si el precio de venta es de \$45 por unidad, el número de dólares en la ganancia semanal es $P(45)$. A partir de la expresión para $P(x)$ del inciso (a),

$$\begin{aligned} P(45) &= (125 - 45)(45 - 15) \\ &= 80 \cdot 30 \\ &= 2\,400 \end{aligned}$$

Conclusión: La ganancia semanal es de \$2 400 cuando los relojes se venden a \$45 cada uno.



[0, 200] por [0, 4 000]
$P(x) = (125 - x)(x - 15)$
FIGURA 4.33

(c) La Figura 4.33 muestra la gráfica de P trazada en el rectángulo de inspección [0, 200] por [0, 4 000]. El vértice de la parábola, que abre hacia abajo, parece estar en el punto donde $x = 70$. En consecuencia, para que la ganancia semanal del fabricante sea un máximo, se estima que el precio de venta por reloj debe ser de $70.

(d) A partir de la expresión para $P(x)$ del inciso (a), se tiene

$$P(x) = -x^2 + 140x - 1\,875$$

La función P es cuadrática con $a = -1$ y $b = 140$. Debido a que $a < 0$, P tiene un valor máximo en el punto donde

$$x = -\frac{b}{2a}$$
$$= 70$$

Conclusión: La ganancia semanal del fabricante será un máximo cuando el precio del reloj sea $70.

Esta conclusión está de acuerdo con lo estimado en la parte (c). ◀

En el ejemplo siguiente, primero se obtendrán dos ecuaciones multiplicando una variable dependiente y dos variables independientes. Posteriormente, se expresará la variable dependiente como función de una variable independiente, por la eliminación de la otra variable independiente, a partir del par de ecuaciones.

► EJEMPLO 5 *Resolución del enunciado de un problema que tiene una función cuadrática como modelo matemático*

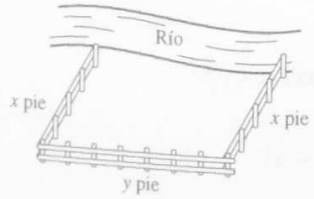


FIGURA 4.34

Se cerca un campo rectangular a la orilla de un río y no se requiere cerca en la parte del terreno que da al río. El costo del material de la cerca es de $8 por pie lineal para las cercas laterales y de $12 por pie lineal para el lado paralelo al río; se estima que se emplearán $3 600 para cercar. **(a)** Si x pies es la longitud de uno de los lados laterales, exprese el número de pies cuadrados del área del campo como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función resultante? Encuentre las dimensiones del campo de área más grande posible que puede ser encerrada con $3 600 de cerca, ¿cuál es la mayor área?

Solución

(a) Sea y pies la longitud del lado del campo paralelo al río y A pies cuadrados el área del campo. *Véase* la Figura 4.34.

$$A = xy$$

Dado que el costo del material para cada lado lateral es $8 por pie lineal y la longitud de la cerca lateral es x pies, el costo total de la cerca de cada uno de los laterales será $8x$ dólares, de manera semejante, el costo total de la cerca del tercer lado es $12y$ dólares. Entonces se tiene que

$$8x + 8x + 12y = 3\,600$$

Para expresar A en términos de una sola variable, primero se resuelve la ecuación (1) para y en términos de x.

$$12y = 3\,600 - 16x$$
$$y = 300 - \frac{4}{3}x$$

Si se sustituye este valor de y en la ecuación $A = xy$ se obtiene A como una función de x, y

$$A(x) = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right)$$

(b) Tanto x como y no deben ser negativas. El valor más pequeño que x y y pueden tomar es 0; cuando $y = 0$, se obtiene el valor de la ecuación (1), $x = 225$. Así, 225 es el valor más grande que x puede tomar. De aquí que x debe estar en el intervalo cerrado $[0, 225]$, y este intervalo es el dominio de A.

(c) A partir de la expresión de $A(x)$ en el inciso (a), se tiene

$$A(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 300x$$

La función A es cuadrática con $a = -\frac{4}{3}$ y $b = 300$. Dado que $a < 0$, A tiene un valor máximo en el punto donde

$$x = -\frac{b}{2a}$$
$$= -\frac{300}{2\left(-\frac{4}{3}\right)}$$
$$= \frac{225}{2}$$

Si $x = \frac{225}{2}$, entonces $300 - \frac{4}{3}x = 150$. Por tanto,

$$A\left(\frac{225}{2}\right) = \frac{225}{2}(150)$$
$$= 16\,875$$

Conclusión: El área más grande posible que puede ser encerrada por \$3 600 de cerca es 16 875 pie^2, y esto se obtiene cuando el lado paralelo al río es de 150 pie de longitud y los laterales miden 112.5 pie de longitud. ◄

► EJEMPLO 6 *Resolución del enunciado de un problema que tiene una función cuadrática como modelo matemático*

El gerente financiero de un boletín informativo escolar determina que 1 000 copias de éste deben venderse si el precio es 50 centavos, y que el

11. $h(x) = 9 - 6x + x^2$
12. $h(x) = 1 - 4x - x^2$
13. $f(x) = \frac{1}{8}(4x^2 + 20x + 49)$
14. $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$

En los ejercicios 15 a 18, utilice el método del ejemplo 1 para encontar el valor máximo o mínimo de la función. Compruebe la respuesta mediante el trazo de la parábola.

15. $f(x) = 4x^2 + 8x + 7$
16. $f(x) = 2 + 6x - x^2$
17. $g(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5)$
18. $G(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 4x - 4)$

En los ejercicios 19 a 22, aplique el Teorema 1 para encontrar el valor máximo o mínimo de la función. Compruebe la respuesta por medio de la parábola.

19. $f(x) = 2 + 4x - 3x^2$
20. $g(x) = 3x^2 + 6x + 9$
21. $G(x) = \frac{1}{8}(4x^2 + 12x - 9)$
22. $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 8x + 8)$

23. Se lanza un objeto desde el piso verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pie/s. Si la altura que alcanza el objeto es $f(t)$ pies, después de t segundos y la resistencia del aire es despreciable, entonces

$$f(t) = 96t - 16t^2$$

(a) Trace la gráfica de f, estime la altura máxima alcanzada por el objeto y determine cuántos segundos después de que el objeto es lanzado alcanza la altura máxima. (b) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones hechas en el inciso (a). (c) Escriba una conclusión.

24. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba desde un punto de 15 pie por encima del nivel del piso, con una velocidad inicial de 176 pie/s. Si la altura alcanzada por el proyectil es $f(t)$ pies después de t segundos y la resistencia del aire es despreciable, entonces

$$f(t) = 15 + 176t - 16t^2$$

(a) Trace la gráfica de f, estime la máxima altura alcanzada por el proyectil y el tiempo que tomó a éste llegar a esa altura máxima. (b) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones hechas en el inciso (a). (c) Escriba una conclusión.

En los ejercicios 25 a 38, resuelva el enunciado del problema encontrando una función cuadrática como modelo matemático de la situación. Para completar el ejercicio, escriba la conclusión.

25. En el ejercicio 43 de la Sección 2.6, se tenía la siguiente situación: Una compañía puede vender a \$100 por unidad un artículo de primera necesidad que elabora. Si se producen x unidades al día, el número de dólares en la producción diaria es $x^2 + 20x + 700$. (a) Exprese el número de dólares en la ganancia diaria de la compañía como una función de x. (b) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y estime la ganancia diaria mayor y cuántas unidades deben producirse al día para que la empresa tenga esta ganancia. (c) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones realizadas en el inciso (b).

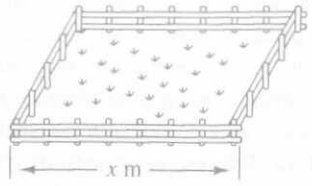
26. En el ejercicio 44 de la Sección 2.6, se tuvo la siguiente situación: Una compañía que fabrica escritorios puede venderlos todos a un precio de \$400 por unidad. Si x escritorios se producen y venden cada semana, entonces el número de dólares en el costo total de la producción semanal es $2x^2 + 80x + 3\,000$. (a) Exprese el número de dólares de la ganancia semanal de la compañía como una función de x. (b) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y estime la mayor ganancia semanal, así como cuántos escritorios deberán fabricarse cada semana para lograr tal ganancia. (c) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones hechas en el inciso (b).

27. Un carpintero puede construir libreros a un costo de 40 dólares cada uno. Si el carpintero vende los libreros a x dólares por unidad, se ha estimado que $300 - 2x$ libreros pueden ser vendidos mensualmente. (a) Exprese el número de dólares en las ganancias mensuales del carpintero como una función de x. (b) Utilice la función del inciso (a) para determinar que la ganancia mensual sea de \$110 por librero. (c) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y estime el precio de venta por cada librero que dará al carpintero la mayor ganancia mensual. (d) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones hechas en el inciso (c).

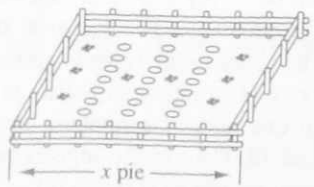
28. Un fabricante de juguetes puede producir un juguete particular a un costo de \$10 por unidad. Si el precio de venta del juguete es x dólares, entonces deben venderse diariamente $45 - x$ juguetes. (a) Exprese el número de dólares en la ganancia diaria del fabricante como una función de x. (b) Emplee

la función del inciso (a) para determinar la ganancia diaria si el precio de venta es de \$30 por unidad. (c) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y estime el precio de venta de cada juguete que permitirá al fabricante obtener la máxima ganancia diaria. (d) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones hechas en el inciso (c).

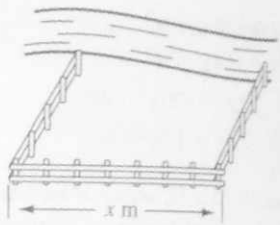
29. Se construirá una cerca de 240 m para un campo rectangular. (a) Si x metros es la longitud del campo, exprese el número de metros cuadrados del área del campo, como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y estime las dimensiones del mayor campo rectangular que puede ser encerrado con los 240 m de cerca. (d) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones hechas en el inciso (c).



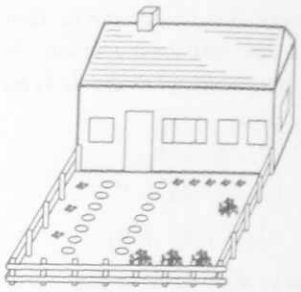
30. Un jardín rectangular es encerrado con 100 pie de cerca. (a) Si x pies es la longitud del jardín, exprese el número de pies cuadrados del área del jardín como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y estime las dimensiones del jardín rectangular más grande que puede ser encerrado con 100 pie de cerca. (d) Compruebe, algebraicamente, las estimaciones hechas en el inciso (c).



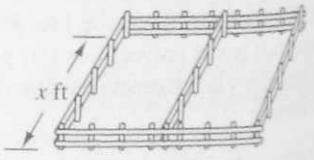
31. Haga el ejercicio 29, si uno de los lados del campo tiene un río como frontera natural y la cerca se construirá para los otros tres lados. Considere x metros como la longitud del lado del campo paralelo al río.



32. Haga el ejercicio 30, si el jardín es colocado de manera que el lado de una casa sirve como frontera, y la cerca será construida para los otros tres lados. Considere x pies como la longitud del lado de la cerca paralelo a la casa.



33. Un terreno rectangular es encerrado por una cerca y después es dividido a la mitad por otra barda. La cerca que divide al terreno a la mitad cuesta \$4 por pie lineal y la otra tiene un valor de \$10 por pie lineal, se emplearán \$1 920 en material para la cerca. (a) Si x pies es la longitud de la cerca que divide el terreno a la mitad, exprese el número de pies cuadrados del área del terreno como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) Encuentre las dimensiones del campo rectangular más grande, con una cerca que lo divide en dos, que puede ser encerrado con \$1 920 para material de las cercas.



34. Encuentre dos números cuya suma sea 10 y su producto sea un máximo.

35. Encuentre dos números cuya diferencia sea 14 y su producto sea un mínino.

36. Encuentre dos números positivos cuya suma sea 50 y la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

37. Una agencia de viajes ofrece la organización de una excursión con todo incluido en $800 por persona, siempre que más de 100 personas aprovechen el viaje. Sin embargo, el costo por persona será reducido en $5 por cada una arriba de 100. ¿Cuántas personas deben adquirir el viaje para que la agencia reciba el mayor ingreso bruto y cuál es este ingreso?

38. Un club estudiantil cobra la membresía anual a $20, menos 10 centavos por cada socio arriba de 60. ¿Cuántos miembros darán al club el ingreso más alto debido a las cuotas?

4.4 FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

OBJETIVOS

1. **Definir la variación directamente proporcional.**
2. **Definir la variación inversamente proporcional.**
3. **Definir la variación conjuntamente proporcional.**
4. **Resolver enunciados de problemas que impliquen variación, mediante una función como modelo matemático.**
5. **Resolver enunciados de problemas que tengan una función cúbica como modelo matemático.**

Las aplicaciones que implican la dependencia de una variable sobre otra se presentan en los negocios, la economía, así como en las ciencias naturales y sociales. Las fórmulas empleadas en estas aplicaciones con frecuencia determinan funciones. Por ejemplo, si y dólares es el interés simple de un año ganado por un capital de x dólares con una tasa de 12% por año, entonces.

$$y = 0.12x$$

Para un valor no negativo dado de x corresponde un valor único de y; así, el valor de y depende del valor de x. Si f es la función definida por $f(x) = 0.12x$, y el dominio de f es el conjunto de números reales no negativos, entonces la ecuación $y = 0.12x$ puede escribirse como $y = f(x)$. La ecuación $y = 0.12x$ es un ejemplo de una *proporción directa* y se dice que y es *directamente proporcional* a x.

DEFINICIÓN **Variación directamente proporcional**

Se dice que una variable y es **directamente proporcional** a la variable x si

$$y = kx$$

donde k es una constante diferente de cero. De manera más general, se dice que la variable es **directamente proporcional** a la n-ésima potencia de x $(n > 0)$ si

$$y = kx^n$$

La constante k se llama **constante de proporcionalidad.**

▶ EJEMPLO 1

Resolución del enunciado de un problema que implica una proporción directa mediante una función como modelo matemático

El peso del cerebro de una persona es aproximadamente proporcional al peso de su cuerpo, si una persona pesa 150 lb su cerebro pesa alrededor de 4 lb. (**a**) Exprese el número de libras del peso aproximado del cerebro de una persona como una función de su peso corporal. (**b**) Encuentre el peso aproximado del cerebro de una persona cuyo peso corporal es 176 lb.

Solución

(**a**) Sea $f(x)$ libras el peso aproximado del cerebro de una persona cuyo cuerpo pesa x libras. Entonces

$$f(x) = kx \tag{1}$$

Debido a que una persona con un peso corporal de 150 lb tiene un cerebro de aproximadamente 4 lb de peso, se sustituye en (1), 150 por x y 4 por $f(x)$, obteniéndose

$$4 = k(150)$$

$$k = \frac{2}{75}$$

Al sustituir k en (1) por este valor, se obtiene

$$f(x) = \frac{2}{75}x$$

(**b**) Dado que $f(x) = \frac{2}{75}x$,

$$f(176) = \frac{2}{75}(176)$$

$$= 4.7$$

Conclusión: El peso aproximado del cerebro de una persona de 176 lb es 4.7 lb.

DEFINICIÓN **Variación inversamente proporcional**

Se dice que una variable y es **inversamente proporcional** a una variable x si

$$y = \frac{k}{x}$$

donde k es una constante diferente de cero. De manera más general, se dice que y es **inversamente proporcional** a la n-ésima potencia de x ($n > 0$) si

$$y = \frac{k}{x^n}$$

► EJEMPLO 2 *Resolución del enunciado de un problema que implica una proporción inversa mediante una función como modelo matemático*

La iluminación de una fuente de luz específica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de ella. **(a)** Exprese el número de luxes (lx) de la iluminación como una función del número de metros a la distancia de la fuente de luz, si la iluminación es 225 lx a una distancia de 5 m de la fuente. **(b)** Encuentre la iluminación en un punto a 15 m de la fuente.

Solución

(a) Sea $f(x)$ luxes la iluminación de la fuente de luz a x metros de ella, entonces

$$f(x) = \frac{k}{x^2} \tag{2}$$

Debido a que la iluminación es 225 lx a una distancia de 5 m de la fuente, si se sustituye x por 5 y $f(x)$ por 225 en (2), se obtiene

$$225 = \frac{k}{5^2}$$

$$k = 5\,625$$

Al sustituir este valor de k en (2), se tiene

$$f(x) = \frac{5\,625}{x^2}$$

(b) A partir de la expresión anterior para $f(x)$, se obtiene

$$f(15) = \frac{5\,625}{15^2}$$

$$= \frac{5\,625}{225}$$

$$= 25$$

Conclusión: La iluminación en un punto a 15 m de la fuente es 25 lx. ◄

DEFINICIÓN **Variación conjuntamente proporcional**

Una variable z se dice que es **conjuntamente proporcional** a las variables x y y si

$$z = kxy$$

donde k es una constante diferente de cero. De manera más general, una variable z se dice que es **conjuntamente proporcional** a la n-ésima potencia de x y m-ésima potencia de y ($n > 0$ y $m > 0$) si

$$z = kx^n y^m$$

▸ EJEMPLO 3

Resolución del enunciado de un problema que involucra una proporción conjunta por medio de una función cuadrática como modelo matemático

En un medio limitado donde A es el número óptimo de bacterias tolerable, el índice de crecimiento de éstas es conjuntamente proporcional al número de bacterias presentes y a la diferencia entre A y este último número. Si se supone que un millón de bacterias es el número óptimo tolerable por el medio, y el índice de crecimiento es de 60 bacterias por minuto cuando 1 000 bacterias están presentes. **(a)** Exprese el índice de crecimiento bacteriano como una función del número de bacterias presentes. **(b)** Determine la velocidad de crecimiento cuando 100 000 bacterias están presentes. **(c)** Encuentre cuántas bacterias están presentes si el índice de crecimiento es un máximo.

Solución

(a) Sea $f(x)$ bacterias por minuto el índice de crecimiento cuando hay x bacterias presentes. Entonces

$$f(x) = kx(1\,000\,000 - x) \tag{3}$$

Debido a que el índice de crecimiento es 60 bacterias por minuto cuando hay 1 000 bacterias presentes, se sustituye en (3) x por 1 000 y $f(x)$ por 60, y se obtiene

$$60 = k(1000)(1\,000\,000 - 1000)$$

$$k = \frac{60}{999\,000\,000}$$

$$= \frac{1}{16\,650\,000}$$

Si se sustituye k en (3) por este valor, se obtiene

$$f(x) = \frac{x(1\,000\,000 - x)}{16\,650\,000}$$

(b) A partir de la expresión anterior $f(x)$, se tiene

$$f(100\,000) = \frac{100\,000(1\,000\,000 - 100\,000)}{16\,650\,000}$$

$$= \frac{100\,000(900\,000)}{16\,650\,000}$$

$$= 5\,405$$

Conclusión: El índice de crecimiento es de 5 405 bacterias por minuto, cuando 100 000 bacterias están presentes.

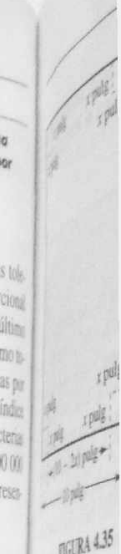


FIGURA 4.35

FIGURA 4.36

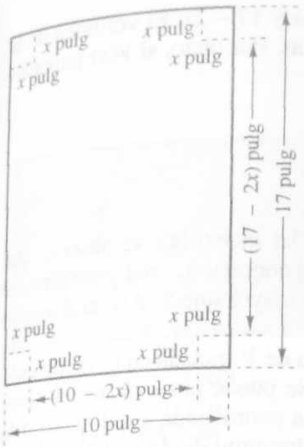


FIGURA 4.35

(c) A partir de la expresión para $f(x)$ en el inciso (a), se tiene

$$f(x) = -\frac{1}{16\,650\,000}x^2 + \frac{20}{333}x$$

La función f es cuadrática con $a = -\frac{1}{16\,650\,000}$ y $b = \frac{20}{333}$.

Debido a que $a < 0$, f tiene un valor máximo en el punto donde

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{20}{333}\left(-\frac{16\,650\,000}{2}\right)$$

$$= 500\,000$$

Conclusión: El índice de crecimiento es un máximo cuando 500 000 bacterias están presentes. ◄

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$

En la Sección 4.3, se determinó el valor extremo de una función cuadrática calculando la coordenada y del vértice de la parábola que es la gráfica de la función. Para la mayoría de las funciones no cuadráticas la determinación de los valores extremos de la función requiere de técnicas de Cálculo. Sin embargo, con una graficadora se pueden calcular los valores extremos de la función. Para ilustrar el procedimiento, regresemos al problema de la caja del ejemplo 6 de la Sección 2.4, donde una caja abierta fue formada cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas de una lámina de cartón y doblando hacia arriba los lados. En dicho ejemplo, se encontró la longitud del lado de los cuadrados que deben ser cortados si la caja formada tenía un volumen específico. Ahora se considerará el problema de determinar la longitud del lado de los cuadrados cortados, si la caja tiene un volumen máximo.

► EJEMPLO 4 *Resolución del enunciado de un problema que tiene una función cúbica como modelo matemático*

Un fabricante de cajas de cartón piensa producir cajas abiertas a partir de láminas de cartón con dimensiones de 10 por 17 pulg, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Si x pulgadas es la longitud del lado del cuadrado que va a ser cortado, exprese el número de pulgadas cúbicas del volumen de la caja como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en el inciso (a)? **(c)** En una graficadora encuentre, con una exactitud de dos decimales, la longitud del lado que debe ser cortado para que la caja tenga el volumen más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo?

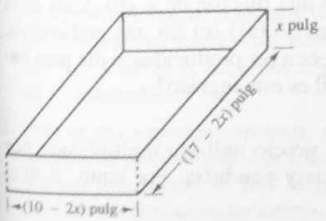


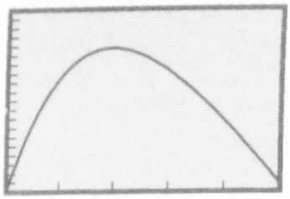
FIGURA 4.36

Solución

(a) La Figura 4.35 representa una hoja de cartón, y la Figura 4.36 muestra la caja de cartón obtenida. El número de pulgadas en las

dimensiones de la caja son x, $10 - 2x$ y $17 - 2x$. El volumen de la caja es el producto de las tres medidas. Por tanto, si $V(x)$ pulgadas cúbicas es el volumen

$$V(x) = x(10 - 2x)(17 - 2x)$$
$$= 170x - 54x^2 + 4x^3$$



[0, 5] por [0, 200]
$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$
FIGURA 4.37

(b) A partir de la expresión para $V(x)$ del inciso (a), se observa que $V(0) = 0$ y $V(5) = 0$. Con base en las condiciones del problema, se sabe que x no puede ser negativo ni mayor que 5. Así, el dominio de V es el intervalo cerrado $[0, 5]$.

(c) En la Figura 4.37, aparece la gráfica de V trazada en el rectángulo de inspección $[0, 5]$ por $[0, 200]$. Se puede observar que V tiene un valor máximo en su dominio. La coordenada x del punto más alto sobre la gráfica proporciona la longitud del lado del cuadrado que debe ser cortado para tener un volumen máximo y la coordenada y tiene el volumen máximo. Al emplear el aumento (zoom *in*) de la graficadora se determina el punto más alto (2.03, 156.03).

Conclusión: La longitud del lado del cuadrado que debe ser cortado es 2.03 pulg para dar una caja de volumen máximo, el cual es 156.03 pulg^3. ◀

Mediante técnicas de Cálculo se puede determinar que el valor exacto de la función en el ejemplo 4, ocurre cuando

$$x = \frac{27 - \sqrt{219}}{6} \approx 2.03$$

► EJEMPLO 5 *Resolución del enunciado de un problema que tiene una función cúbica como modelo matemático*

Con base en un monopolio, la ecuación de demanda para cierto producto de primera necesidad es $x^2 + p = 360$, donde x unidades son producidas diariamente cuando p dólares es el precio por unidad. (a) Exprese el número de dólares del ingreso diario total como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en el inciso (a)? (c) En una graficadora encuentre el número de unidades que deben ser producidas al día para hacer máximo el ingreso diario total. ¿Cuál es este ingreso?

Solución

(a) El ingreso diario total es igual al precio unitario multiplicado por el número de unidades producidas y vendidas. Por tanto, si $R(x)$ dólares es el ingreso diario total,

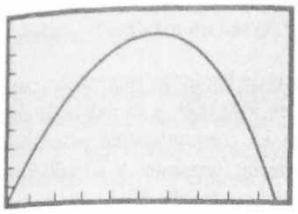
$$R(x) = px$$

Al resolver para p la ecuación de demanda, se obtiene

$$p = 360 - x^2$$

Si se sustituye esta expresión de p en la ecuación para $R(x)$, se tiene

$$R(x) = (360 - x^2)x$$



[0, 20] por [0, 3 000]
$R(x) = (360 - x^2)x$
FIGURA 4.38

(b) De la ecuación que define $R(x)$ en el inciso (a), se observa que $R(0) = 0$ y $R(\sqrt{360}) = 0$. Si x es negativo o mayor que $\sqrt{360}$, el ingreso total es negativo. Por tanto, el dominio de R es el intervalo cerrado $[0, \sqrt{360}]$.

(c) La Figura 4.38 muestra la gráfica de la función R trazada en el rectángulo de inspección [0, 20] por [0, 3 000]. Se observa que R tiene un valor máximo en su dominio. Al emplear el aumento (*zoom in*) en la graficadora se determina que el punto más alto es (10.95, 2 629.07). Debido a que x debe ser entero (el número de unidades producidas), R tiene un valor máximo cuando x es 11 y $R(11) = 2\,629$.

Conclusión: Se deben producir al día once unidades para obtener un ingreso diario total máximo de \$2 629. ◀

$\boxed{\int\!\!\int \frac{dy}{dx}}$ Nuevamente, empleando técnicas de Cálculo, el valor máximo de la función R, en el ejemplo 5, se presenta cuando

$$x = \sqrt{120} \approx 10.95$$

EJERCICIOS 4.4

En cada uno de los ejercicios, resuelva el enunciado del problema encontrando una función como modelo matemático de la situación. Asegúrese de escribir una conclusión.

1. El pago diario para una cuadrilla de trabajo es directamente proporcional al número de trabajadores, si una cuadrilla de 12 trabajadores gana un salario de \$540. (a) Exprese el número de dólares del pago diario como una función del número de trabajadores. (b) ¿Cuál es el pago diario para una cuadrilla de 15 trabajadores?

2. Para un gas a presión constante, su volumen es directamente proporcional a la temperatura absoluta, y a una temperatura de 180° el gas ocupa 100 m^3. (a) Exprese el número de metros cúbicos del volumen del gas como una función del número de grados en la temperatura absoluta. (b) ¿Cuál es el volumen del gas a una temperatura de 150°?

3. El periodo de un péndulo (tiempo para una oscilación completa) es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo, dicha longitud es de 8 pie y tiene un periodo de 2 s. (a) Exprese el número de segundos del periodo de un péndulo en función del número de pies de su longitud. (b) Encuentre el periodo de un péndulo de longitud de 2 pie.

4. Para una cuerda en vibración, la rapidez de vibración es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión en la cuerda. (a) Si una cuerda particular vibra 864 veces por segundo bajo una tensión de 24 kg, exprese el número de vibraciones por segundo como una función del número

de kilogramos de la tensión. (b) Encuentre el número de vibraciones por segundo bajo una tensión de 6 kg.

5. El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. (a) Si el cuerpo pesa 200 lb sobre la superficie de la Tierra, exprese el número de libras de su peso como una función del número de millas del centro de la Tierra. Considere que el radio de la Tierra es de 4 000 mi. (b) ¿Cuánto será el peso del cuerpo a una distancia de 400 mi por encima de la superficie de la Tierra?

6. Para un cable eléctrico de longitud fija, la resistencia es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del cable. (a) Un cable de longitud fija tiene un diámetro de $\frac{1}{2}$ cm y una resistencia de 0.1 ohm, exprese el número de ohm en la resistencia como una función del número de centímetros del diámetro. (b) ¿Cuál es la resistencia de un cable de longitud fija y un diámetro de $\frac{2}{3}$ cm?

7. En un pequeño pueblo de 5 000 habitantes el índice de crecimiento de una epidemia (el porcentaje de cambio del número de personas infectadas) es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de no infectadas. (a) Si la epidemia está creciendo a un ritmo de 9 personas por día cuando 100 personas están infectadas, exprese el índice de crecimiento de la epidemia como una función del número de personas infectadas. (b) ¿Qué tan rápido está creciendo la epidemia si están infectadas 200 personas? (c) Determine cuántas están infectadas cuando el índice de crecimiento de la epidemia es un máximo.

8. En una comunidad de 8 000 habitantes la velocidad con la cual corre un rumor es conjuntamente proporcional al número de gente que ha oído el rumor y al número de gente que no lo ha escuchado. (a) Si el rumor corre con una velocidad de 20 gentes por hora cuando 200 gentes lo han escuchado, exprese la velocidad a la cual el rumor se está difundiendo cuando 500 gentes lo han escuchado. (b) ¿Cuántas gentes han escuchado el rumor cuando éste está corriendo con la máxima rapidez?

9. Un lago en particular puede contener un máximo de 14 000 peces, y el índice de crecimiento de la población de éstos es conjuntamente proporcional al número de peces presentes y la diferencia entre 14 000 y dicho número. (a) Si $f(x)$ peces por día es el índice de crecimiento cuando x peces están presentes, escriba una ecuación que defina $f(x)$. (b) ¿Cuál es el dominio de la función f? (c) ¿Qué valor de x hace que $f(x)$ sea un máximo?

10. El máximo número de bacterias soportables por un medio particular es 900 000, y el índice de crecimiento bacteriano es conjuntamente proporcional al número de bacterias presentes y a la diferencia entre 900 000 y dicho número. (a) Si $f(x)$ bacterias por minuto es el índice de crecimiento cuando x bacterias están presentes, escriba una ecuación que defina $f(x)$. (b) ¿Cuál es el dominio de la función f? (c) ¿Qué valor de x provoca que $f(x)$ sea un máximo?

11. Un fabricante de cajas abiertas de hoja de lata piensa hacer uso de láminas de hoja de lata con dimensiones de 8 por 15 pulg, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. (a) Si x pulgadas es la longitud del cuadrado que será cortado, exprese el número de pulgadas cúbicas del volumen de la caja como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) En la graficadora, encuentre con una exactitud de décimos de pulgada, la longitud del lado del cuadrado que será cortado para que el volumen sea el máximo posible. ¿Cuál es el volumen máximo aproximado a pulgadas cúbicas?

12. Un fabricante de cajas de cartón produce cajas abiertas de láminas cuadradas de 12 cm de lado cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. (a) Si x centímetros es la longitud del lado del cuadrado que será cortado, exprese el número de centímetros cúbicos del volumen de la caja como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) En la graficadora, encuentre, con aproximación de centímetros, la longitud del lado del cuadrado que será cortado para que el volumen de la caja sea un máximo. ¿Cuál es el volumen máximo, aproximado a centímetros cúbicos?

13. Haga el ejercicio 11, si el fabricante hace las cajas abiertas a partir de las láminas de hoja de lata rectangulares con dimensiones de 12 por 15 pulg. En el inciso (c) encuentre, con una precisión de dos cifras decimales, la longitud del lado del cuadrado que debe ser cortado.

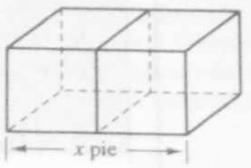
14. Haga el ejercicio 12, si el fabricante hace las cajas abiertas a partir de láminas de cartón rectangulares con dimensiones de 40 por 50 cm. En el inciso (c) encuentre, con una precisión de dos cifras decimales, la longitud del lado del cuadrado que debe ser cortado.

15. Con base en un monopolio, la ecuación de demanda para un artículo de primera necesidad es $p - (8 - \frac{1}{100}x)^2 = 0$, donde x unidades son producidas diariamente cuando p dólares es el precio por unidad. (a) Exprese el número de dólares del ingreso diario total como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) En la graficadora, encuentre el número de unidades que deben producirse al día para hacer máximo el ingreso diario total. ¿Cuál es este ingreso?

16. Con base en un monopolio, la ecuación de demanda para un artículo de primera necesidad es $x^2 + p^2 = 36$, donde $100x$ unidades son producidas diariamente cuando p dólares es el precio por unidad. (a) Exprese el número de dólares del ingreso diario total como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) En la graficadora, encuentre el número de unidades que deben producirse al día para hacer máximo el ingreso diario total. ¿Cuál es este ingreso?

17. La ecuación de demanda para un monopolista es $(100 - x)^2 = 100p$, donde x unidades son demandadas diariamente cuando p dólares es el precio por unidad y x está en el intervalo cerrado [0, 34]. La función del costo total está dada por $C(x) = 55x - \frac{4}{5}x^2$, donde $C(x)$ dólares es el costo total al producir x unidades y x está en el intervalo cerrado [0, 34]. (a) Exprese el número de dólares de la ganancia total como una función de x. (*Sugerencia:* la ganancia es igual al ingreso total menos el costo total). (b) En la graficadora, encuentre el número de unidades que deben producirse al día para hacer máxima la ganancia. ¿Cuál es esta ganancia?

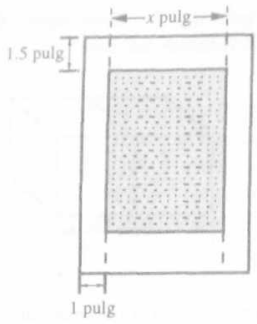
18. En un empaque de forma rectangular con una sección transversal cuadrada, la suma de su longitud y el perímetro de una sección transversal es igual a 100 pulg. (a) Si x pulgadas es la longitud del empaque exprese el volumen de la caja como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) En la graficadora encuentre, con precisión de pulgadas, las dimensiones del empaque que tiene el volumen máximo.



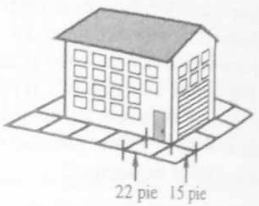
19. Una ventana Norman consiste de un rectángulo coronado por un semicírculo. Suponga que una ventana Norman, en particular, tiene un perímetro de 200 pulg. Además, considere que la cantidad de luz transmitida por la ventana es directamente proporcional al área de la ventana. (a) Si r pulgadas es el radio del semicírculo, exprese la cantidad de luz transmitida por la ventana como una función de r. (b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? (c) Determine la forma de la ventana que admita la máxima cantidad de luz.

20. Haga el ejercicio 19 si la ventana es tal que la región limitada por el semicírculo, transmite solamente la mitad de la luz por pulgada cuadrada del área limitada por el rectángulo.

21. Una página para impresión contiene 24 pulg^2 de región impresa, un margen de 1.5 pulg en la parte alta y en la parte baja de la hoja, y un margen de 1 pulg en los lados. (a) Si $A(x)$ pulgadas cuadradas es el área total de la página cuando x pulgadas es el ancho de la porción impresa, escriba una ecuación que defina $A(x)$. (b) ¿Cuál es el dominio de la función A? (c) En la graficadora, determine, con una precisión de centésimos de pulgada, las dimensiones de la página más pequeña que satisfaga estos requerimientos.



22. Un edificio que tiene un terreno rectangular de 13 200 pie^2, será construido donde se requiere un andador de 22 pie de ancho en el frente y en la parte trasera, y un camino de 15 pie de ancho en cada uno de los lados. (a) Si $A(x)$ pies cuadrados es el área total del terreno en el cual se va a edificar la construcción y los andadores cuando x pies es la longitud de frente y de la parte posterior del edificio, escriba una ecuación que defina a $A(x)$. (b) ¿Cuál es el dominio de la función A? (c) En la graficadora, determine, con una precisión de centésimos de pie, las dimensiones del terreno que tiene el área más pequeña en la cual el edificio puede ser construido.



4.5 FUNCIONES COMPUESTAS

OBJETIVOS

1. **Definir una función compuesta de dos funciones.**
2. **Calcular los valores de una función compuesta.**
3. **Determinar el dominio de la composición de dos funciones.**
4. **Expresar una función dada como la composición de dos funciones.**
5. **Resolver enunciados de problemas que tengan una función compuesta como modelo matemático.**

En la Sección 4.1 se definieron las cuatro operaciones entre dos funciones: suma, resta, producto y cociente. La obtención de la *función compuesta* de dos funciones dadas es otra operación.

DEFINICIÓN **Función compuesta**

Dadas las dos funciones f y g, la **función compuesta** denotada por $f \circ g$ está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

La definición indica que cuando se calcula $(f \circ g)(x)$, primero se aplica la función g a x y después la función f a $g(x)$. Para visualizar este cálculo, *veáse* la Figura 4.39. La función g asigna el valor $g(x)$ para el número x en el dominio de g. Entonces, la función f asigna el valor $f(g(x))$ para el número $g(x)$ en el dominio de f. Observe en la Figura 4.39 que el contradominio de g es un subconjunto del domino de f y el contradominio de $f \circ g$ es un subconjunto del contradominio de f.

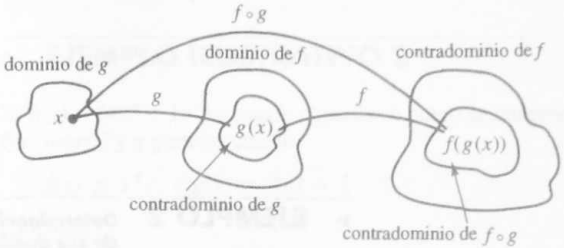


FIGURA 4.39

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Si f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 3$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x - 3) \\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$, y el dominio de f es $[0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de los números reales para los cuales $2x - 3 \geq 0$ o, de forma equivalente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

► EJEMPLO 1 *Determinación, por dos métodos, del valor de una función compuesta*

Dadas

$$f(x) = \frac{5}{x - 2} \qquad g(x) = 2x + 1$$

(a) Encuentre $g(3)$ y use el número para determinar $f(g(3))$. **(b)** Calcule $(f \circ g)(x)$ y úselo para determinar $(f \circ g)(3)$.

Solución

(a) $g(3) = 2(3) + 1$
$= 7$

Esto es
$f(g(3)) = f(7)$
$= \dfrac{5}{7 - 2}$
$= 1$

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(2x + 1)$
$= \dfrac{5}{(2x + 1) - 2}$
$= \dfrac{5}{2x - 1}$

Por tanto,
$(f \circ g)(3) = \dfrac{5}{2(3) - 1}$
$= 1$

▸ EJEMPLO 2 *Determinación de una función compuesta y de sus dominios*

Dado que f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 1$$

encuentre: **(a)** $f \circ f$; **(b)** $g \circ g$; **(c)** $f \circ g$; **(d)** $g \circ f$. También determine el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f es $[0, +\infty)$, y el de g es $(-\infty, +\infty)$.

(a) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$
$= f(\sqrt{x})$
$= \sqrt{\sqrt{x}}$
$= \sqrt[4]{x}$

El dominio es $[0, +\infty)$.

(b) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$
$= g(x^2 - 1)$
$= (x^2 - 1)^2 - 1$
$= x^4 - 2x^2$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$.

(c) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(x^2 - 1)$
$= \sqrt{x^2 - 1}$

El dominio es
$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(d) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(\sqrt{x})$
$= (\sqrt{x})^2 - 1$
$= x - 1$

El dominio es $(0, +\infty)$.

En el inciso (d) observe que aunque $x - 1$ está definido para todos los valores de x, el dominio de $g \circ f$, por la definición de función compuesta, es el conjunto de todos los números x en el dominio de f.

que $f(x)$ está en el dominio de g. Así, el dominio de $g \circ f$ debe ser un subconjunto del dominio de f. ◀

Observe de los resultados de los incisos (c) y (d) del ejemplo anterior que $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ no son necesariamente iguales.

Un teorema muy importante en Cálculo, llamado la *regla de la cadena*, implica funciones compuestas. Cuando se aplica la regla de la cadena es necesario considerar una función como la composición de otras dos funciones, esto se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Si $h(x) = (4x^2 + 1)^3$ se puede expresar h como la composición de dos funciones f y g para las cuales

$$f(x) = x^3 \qquad g(x) = 4x^2 + 1$$

dado que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$ ◀

La función h en el ejemplo ilustrativo 2 puede expresarse como la composición de otro par de funciones. Por ejemplo, si

$$F(x) = (4x + 1)^3 \qquad G(x) = x^2$$

entonces

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x) &= F(G(x)) \\ &= F(x^2) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

En Cálculo se deberá emplear la composición mostrada en el ejemplo ilustrativo 2.

▶ EJEMPLO 3 *Expresión de una función dada como la composición de otras dos funciones*

Dada

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

exprese h como la composición de dos funciones f y g de dos maneras: **(a)** La función f contiene el radical; **(b)** la función g contiene el radical.

Solución

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ $\quad g(x) = x^2$

Entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad g(x) = \sqrt{x^2+3}$

Entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2+3}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

▶ EJEMPLO 4 *Resolución del enunciado de un problema que tiene una función compuesta como modelo matemático*

En un bosque un depredador se alimenta de rapiña, y la población del depredador es una función f de x, el número de presas en el bosque, el cual es una función g de t, el número de semanas transcurridas de el final de la temporada de caza. Si

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 90 \quad \text{y} \quad g(t) = 7t + 86$$

haga lo siguiente: **(a)** Exprese la población del depredador como una función de t. **(b)** Encuentre la población del depredador 8 semanas después de cerrada la temporada de caza.

Solución

(a) La población del depredador t semanas después de cerrada la temporada de caza está dada por $(f \circ g)(t)$.

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(7t + 86) = \frac{1}{4}(7t + 86)^2 + 90$$

(b) Cuando $t = 8$, se obtiene

$$(f \circ g)(8) = \frac{1}{4}(7 \cdot 8 + 86)^2 + 90 = 5\,131$$

Conclusión: Ocho semanas después de cerrada la temporada de caza, la población del depredador es de 5 131.

EJERCICIOS 4.5

En los ejercicios 1 a 4, para las funciones f y g y el número c, calcule $(f \circ g)(c)$ por dos métodos: (a) encuentre $g(c)$ y emplee este número para determinar $f(g(c))$; (b) calcule $(f \circ g)(x)$ y use este valor para encontrar $(f \circ g)(c)$.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x;\ g(x) = 2x - 5;\ c = 4$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 36};\ g(x) = x^2 - 3x;\ c = 5$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1};\ g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1};\ c = \dfrac{1}{2}$
4. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x + 3}}{x};\ g(x) = \dfrac{2x + 5}{x^4};\ c = -2$

En los ejercicios 5 a 14, defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones compuestas: (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$.

5. $f(x) = x - 2;\ g(x) = x + 7$
6. $f(x) = 3 - 2x;\ g(x) = 6 - 3x$
7. $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$
8. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = x^2 + 1$
9. $f(x) = \sqrt{x - 2};\ g(x) = x^2 - 2$
10. $f(x) = x^2 - 1;\ g(x) = \dfrac{1}{x}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x};\ g(x) = \sqrt{x}$
12. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = -\dfrac{1}{x}$
13. $f(x) = |x|;\ g(x) = |x + 2|$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1};\ g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 15 a 24, defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones compuestas: (a) $f \circ f$; (b) $g \circ g$.

15. Las funciones del ejercicio 5.
16. Las funciones del ejercicio 6.
17. Las funciones del ejercicio 7.
18. Las funciones del ejercicio 8.
19. Las funciones del ejercicio 9.
20. Las funciones del ejercicio 10.
21. Las funciones del ejercicio 11.
22. Las funciones del ejercicio 12.
23. Las funciones del ejercicio 13.
24. Las funciones del ejercicio 14.

$\iint \frac{dy}{dx}$ *En los ejercicios 25 a 30, exprese de dos maneras diferentes h como la composición de dos funciones f y g.*

25. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
26. $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$
27. $h(x) = \left(\dfrac{1}{x - 2}\right)^3$
28. $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^3 + 3}}$
29. $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$
30. $h(x) = \sqrt{|x| + 4}$

En los ejercicios 31 a 34, resuelva el enunciado del problema encontrando una función compuesta como modelo matemático de la situación, no olvide escribir una conclusión.

31. El área de la superficie de una esfera es una función de su radio. Si r centímetros es el radio de una esfera y $A(r)$ centímetros cuadrados es el área de la superficie, entonces $A(r) = 4\pi r^2$. Suponga que un balón mantiene la forma de una esfera cuando se infla de tal manera que su radio está cambiando con una rapidez constante de 3 cm/s. Si $f(t)$ centímetros es el radio del balón después de t segundos, haga lo siguiente: **(a)** Calcule $(A \circ f)(t)$ e interprete el resultado. **(b)** Encuentre el área de la superficie del balón después de 4 s.

32. En un lago, un pez grande se alimenta de uno mediano, y la población del pez grande es una función de f de x, el número de peces medianos en el lago. En cambio, el pez mediano se alimenta de peces pequeños, y la población de los medianos es una función de w, el número de peces pequeños en el lago.
Si

$$f(x) = \sqrt{2x} + 1\,500 \quad \text{y} \quad g(w) = \sqrt{w} + 5\,000$$

haga lo siguiente: **(a)** Exprese la población de peces grandes como una función de w; **(b)** encuentre el número de peces grandes en el lago cuando existen en este lugar 9 millones de peces pequeños.

33. La demanda de los consumidores para un juguete particular en cierto mercado es una función f de p, su precio en dólares, el cual en cambio es una función g de t, el número de meses desde que el juguete llegó al mercado. Si

$$f(p) = \frac{5\,000}{p^2} \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{1}{20}t^2 + \frac{7}{20}t + 5$$

haga lo siguiente: **(a)** Exprese la demanda del consumidor como una función de t. **(b)** Encuentre la demanda del consumidor 5 meses después de que el juguete ha llegado al mercado.

34. El volumen de una esfera es una función de su radio. Si r pies es el radio de una esfera y $V(r)$ pies cúbicos es el volumen, entonces, $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Suponga que una bola de nieve de forma esférica con un radio de 2 pie, ha comenzado a fundirse de tal forma que su radio cambia con rapidez constante de 4.5 pulg/min. Si $f(t)$ pies es el radio de la bola de nieve después de t minutos, haga lo siguiente: **(a)** Calcule $(V \circ f)(t)$ e interprete el resultado. **(b)** Encuentre el volumen de la bola de nieve después de 3 min.

35. ¿Es conmutativa la composición de dos funciones, es decir, si f y g son dos funciones cualesquiera, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ son iguales? Justifique la respuesta proporcionando un ejemplo.

Si f y g son dos funciones tales que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$, entonces f y g son funciones inversas. En los ejercicios 35 a 40, demuestre que f y g son funciones inversas.

36. $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

37. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

38. $f(x) = x^2, x \geq 0$, y $g(x) = \sqrt{x}$

39. $f(x) = x^2, x \leq 0$, y $g(x) = -\sqrt{x}$

40. $f(x) = (x - 1)^3$ y $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

41. Determine si la función compuesta $f \circ g$ es impar o par si **(a)** f y g son pares, y **(b)** f y g son impares.

42. Determine si la función compuesta $f \circ g$ es impar o par si **(a)** f es par y g es impar, y **(b)** f es impar y g es par.

43. La función de salto unitario U y la función signo fueron definidas, respectivamente, en los ejercicios 51 y 53 de la Sección 4.2. Encuentre fórmulas para $sgn(U(x))$ y dibuje la gráfica.

44. Encuentre las fórmulas para $(f \circ g)(x)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Dibuje las gráficas de f, g y $f \circ g$.

45. Encuentre las fórmulas de $(g \circ f)(x)$ para las funciones del ejercicio 44. Dibuje la gráfica de $g \circ f$.

46. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

47. Si $f(x) = x^2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

48. Demuestre que si f y g son funciones lineales, entonces $f \circ g$ es una función lineal.

49. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $h(x) = x$. Explique por qué $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, pero ninguna de las dos $f \circ g$ o $g \circ f$ es la misma que h.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 4

▸ VISIÓN RETROSPECTIVA

4.1 Antes de establecer la definición formal de una función, se trató la función como la correspondencia entre conjuntos de números reales. Después, se calcularon algunos valores de funci

resaltándose la importancia de los cocientes diferencia, los cuales son fundamentales en Cálculo. También se mostró cómo se forman nuevas funciones operando sobre funciones dadas.

4.2 La definición formal de una función como un conjunto de pares ordenados de números reales condujo, de manera natural, a la definición de la gráfica de una función. Se dibujaron gráficas de funciones y también se trazaron algunas de ellas. Se introdujeron las funciones definidas a trozos y la función del máximo entero como preparación para su uso en Cálculo, y se definieron varios tipos de funciones algebraicas, así como funciones pares e impares.

4.3 Se dibujaron y trazaron las gráficas de funciones cuadráticas, las cuales son parábolas. Se encontraron, de manera algebraica, los valores exactos de los ceros de una función cuadrática comprobándolos al trazar la parábola correspondiente. Se mostró cómo encontrar el valor extremo de una función cuadrática y se resolvieron enunciados de problemas que tienen una función cuadrática como modelo matemático.

4.4 Mediante el empleo de una función como modelo matemático, se resolvieron enunciados de problemas que implican variación directa, variación inversa y variación conjunta. Se obtuvieron en la graficadora soluciones aproximadas de enunciados de problemas que tienen una función cúbica como modelo matemático.

4.5 Se definió la función compuesta, por medio del cálculo de valores de la función, y se mostró cómo expresar una función dada como la composición de dos funciones, que es un procedimiento necesario en Cálculo. También se resolvieron enunciados de problemas que tienen una función compuesta como modelo matemático.

▸ EJERCICIOS DE REPASO

1. Dada $f(x) = 4 - x^2$, encuentre:
   (a) $f(1)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(3)$
   (d) $f(x - 1)$ (e) $f(x^2)$

2. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$, encuentre:
   (a) $f(-2)$ (b) $f(2)$ (c) $f(4)$
   (d) $f\left(\dfrac{3}{x} + 1\right)$ (e) $f\left(\dfrac{3}{x + 1}\right)$

3. Dada $g(x) = \sqrt{3x + 1}$, encuentre:
   (a) $g(0)$ (b) $g(1)$ (c) $g(5)$
   (d) $g(8)$ (e) $g(16)$ (f) $g(3x + 2)$

4. Dada $h(x) = \dfrac{|x + 3|}{|x| + 3}$, encuentre:
   (a) $h(1)$ (b) $h(-1)$ (c) $h(3)$
   (d) $h(-3)$ (e) $h(x^2)$ (f) $h(\sqrt{x})$

5. Dada $f(x) = \dfrac{4}{x}$, encuentre:
   (a) $x^2 f(x) - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $f(x) - xf(x^2)$
   (c) $f(|x|) - |f(x)|$ (d) $f\left(\dfrac{4}{x}\right) - \dfrac{4}{f(x)}$

6. Dada $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, encuentre:
   (a) $g\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{g(x)}{x}$ (b) $\dfrac{1}{g(x) - 1} - \dfrac{x}{g(x)}$

En los ejercicios 7 a 12, calcule y simplifique el cociente diferencia $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, *para:*

7. La función del ejercicio 1.
8. La función del ejercicio 2.
9. La función del ejercicio 5.
10. $f(x) = \sqrt{1 - x}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 2}$
12. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 4}$

En los ejercicios 13 a 18, defina las funciones siguientes y determine el dominio de la función resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f.

13. $f(x) = x^2 - 4$; $g(x) = 4x - 3$
14. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

15. $f(x) = \sqrt{x + 2}$; $g(x) = x^2 - 4$

16. $f(x) = x^2 - 9$; $g(x) = \sqrt{x + 5}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = \sqrt{x}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

En los ejercicios 19 a 24, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante, (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$, considerando:

19. Las funciones del ejercicio 13.

20. Las funciones del ejercicio 14.

21. Las funciones del ejercicio 15.

22. Las funciones del ejercicio 16.

23. Las funciones del ejercicio 17.

24. Las funciones del ejercicio 18.

En los ejercicios 25 a 34, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y contradominio.

25. $f(x) = 4 - 2x$

26. $g(x) = 3x + 2$

27. $g(x) = x^2 - 4$

28. $f(x) = 9 - x^2$

29. $h(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

30. $H(x) = \sqrt{1 - x^2}$

31. $F(x) = \sqrt{16 - x^2}$

32. $G(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

33. $f(x) = |5 - x|$

34. $g(x) = |x + 4|$

En los ejercicios 35 a 44, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y contradominio.

35. $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

37. $G(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \neq -4 \\ 3 & \text{si } x = -4 \end{cases}$

38. $F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

39. $F(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + 2x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

40. $G(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 < x \end{cases}$

41. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

42. $H(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ (x + 2)^2 & \text{si } -1 \leq x \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \leq x \leq 4 \\ 4 - x & \text{si } 4 < x \end{cases}$

44. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ x - 8 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

En los ejercicios 45 a 48, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y contradominio. Compruebe la gráfica trazándola.

45. $f(x) = [x - 2]$

46. $g(x) = [x + 1] - x$

47. $h(x) = x - [x]$

48. $F(x) = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ donde $n = [x]$

En los ejercicios 49 y 50, U y sgn son la función de salto unitario y la función signo definidas en los ejercicios 51 y 53, respectivamente, de la Sección 4.2. Encuentre fórmulas para la función dada y dibuje su gráfica.

49. $f(x) = \operatorname{sgn} x - U(x)$

50. $g(x) = \operatorname{sgn} x\, U(x + 1)$

En los ejercicios 51 a 54, trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica, determine cuál de los siguientes supuestos caracteriza los ceros de la función: (a) dos ceros reales; (b) un cero de multiplicidad 2; o (c) dos ceros imaginarios.

51. $f(x) = x^2 - 6x$

52. $f(x) = 2x^2 + 8x + 11$

53. $g(x) = -x^2 + 8x - 16$

54. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

En los ejercicios 55 a 58, encuentre el valor máximo o el mínimo de la función.

55. $f(x) = 4 - 4x - 2x^2$

56. $g(x) = 3x^2 + 6x + 7$

57. $g(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 11)$

58. $f(x) = \frac{1}{6}(15 + 6x - x^2)$

En los ejercicios 59 y 60, para las funciones f y g y el número c, calcule por dos métodos $(f \circ g)(c)$: (a) encuentre $g(c)$ y use este número para determinar $f(g(c))$; (b) calcule $(f \circ g)(x)$ y emplee este valor para determinar $(f \circ g)(c)$.

59. $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$; $g(x) = x^2 + x$; $c = -3$

60. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$; $g(x) = \sqrt{x - 2}$; $c = 6$

En los ejercicios 61 y 62, exprese, de dos maneras diferentes, h como la composición de dos funciones f y g.

61. $h(x) = (3x^2 - 2)^{1/3}$

62. $h(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 4}$

En los ejercicios 63 y 64, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.

63. (a) $f(x) = 2x^3 - 3x$

(b) $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$

(c) $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$

(d) $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$

64. (a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$ (d) $F(x) = x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$

En los ejercicios 65 a 82, resuelva el enunciado del problema encontrando una función como modelo matemático de la situación, asegúrese de escribir una conclusión.

65. La distancia recorrida por un cuerpo en caída libre, partiendo del reposo es directamente proporcional al cuadrado del tiempo que dura su caída, y un cuerpo cae 64 pie en 2 s. **(a)** Exprese el número en pies de la distancia recorrida por un cuerpo, inicialmente en reposo que cae, como una función del número de segundos que dura su caída. **(b)** ¿Qué tan lejos llegará un cuerpo partiendo del reposo en su caída en $\frac{5}{2}$ segundos?

66. La Ley de Boyle establece que a temperatura constante el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión que soporta, y un gas ocupa 100 m^3 a la presión de 24 kg/cm^2. **(a)** Exprese el número de metros cúbicos ocupados por el gas como una función del número de kilogramos por centímetro cuadrado de presión que soporta. **(b)** ¿Cuál es el volumen de un gas cuando su presión es 16 kg/cm^2?

67. Si un lago puede soportar un máximo de 10 000 peces, el índice de crecimiento de la población de peces es conjuntamente proporcional al número de peces presentes y a la diferencia entre 10 000 y el número presente. **(a)** Si el índice de crecimiento es de 90 peces por semana cuando 1 000 peces están presentes, exprese el índice de crecimiento de la población como una función de los peces presentes. **(b)** Encuentre el índice de crecimiento de la población cuando 2 000 peces están presentes.

68. Encuentre dos números positivos cuya suma es 12, tal que su producto es un máximo.

69. Encuentre dos números positivos cuya suma es 12, tal que la suma de sus cuadrados es un mínimo.

70. Demuestre que entre todos los rectángulos que tienen un perímetro de 36 pulg, el cuadrado de lado 9 pulg tiene la mayor área.

71. Si el responsable de un viaje escolar puede acomodar hasta 250 estudiantes, el costo por cada estudiante será de \$15, si no hacen el viaje más de 150 estudiantes; sin embargo, el costo por estudiante se reducirá en 5 centavos por cada estudiante arriba de 150 hasta que el costo alcance \$10 por estudiante. **(a)** Si x estudiantes hacen el viaje, exprese el número de dólares de entrada bruta como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** ¿Cuántos estudiantes deben hacer el viaje para que la escuela reciba el ingreso más alto.

72. Un mayorista ofrece entregar a un comerciante 300 sillas a \$90 por unidad y reducir el precio por silla en toda la orden en 25 centavos por cada silla adicional arriba de 300. **(a)** Si se ordenan x sillas, exprese el número de dólares en el costo del comerciante como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Encuentre los dólares totales implicados en la transacción más alta posible entre el mayorista y el comerciante en estas circunstancias.

73. En un pueblo, cuya población es de 11 000, el índice de crecimiento de una epidemia es conjunta-

mente proporcional al número de gente infectada y al número de gente no infectada. **(a)** Si la epidemia está creciendo a un ritmo de $f(x)$ gentes por día cuando x gentes están infectadas, escriba una ecuación que defina $f(x)$. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función f del inciso (a)? **(c)** Determine el número de gente infectada cuando la epidemia está creciendo a un ritmo máximo.

74. Un carpintero puede vender todas la mesas que fabrica a un precio de \$64 por unidad, si x mesas se producen y se venden cada semana, entonces, el número de dólares en el costo total de la producción semanal es $x^2 + 15x + 225$. **(a)** Exprese el número de dólares de la ganancia semanal del carpintero como una función de x. **(b)** ¿Cuántas mesas deben ser construidas cada semana con objeto de que el carpintero tenga las ganancias máximas? **(c)** ¿Cuál es la ganancia semanal máxima?

75. En un lago, un pez depredador se alimenta de un pequeño pez, y la población del depredador en cualquier momento es una función f de x, el número de peces pequeños en el lago, el cual es una función g de t, el número de semanas que han transcurrido desde el final de la temporada de pesca. Si

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + 80 \quad \text{y} \quad g(t) = 8t + 90$$

haga lo siguiente: **(a)** Exprese la población del pez depredador como una función de t. **(b)** Encuentre la población del pez depredador 9 semanas después de cerrada la temporada de pesca.

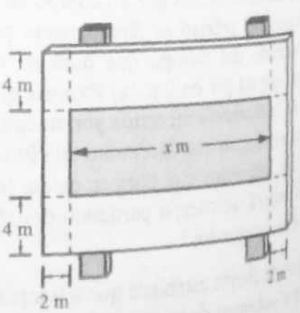
76. Con base en un monopolio, la ecuación de demanda para una mercancía es $x^2 + p = 324$, donde x unidades son producidas diariamente cuando p dólares es el precio por unidad. **(a)** Exprese el número de dólares de la entrada total diaria como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función en el inciso (a)? **(c)** En la graficadora, encuentre el número de unidades que deben ser producidas para maximizar la entrada diaria total. ¿Cuál es esta entrada?

77. Con base en el monopolio del ejercicio 76, supóngase un costo de \$80 para producir cada unidad. Así, la función de costo total es C donde $C(x) = 80x$. **(a)** Exprese el número de dólares de la ganancia diaria como una función de x. **(b)** En la graficadora, encuentre el número de unidades que deben producirse por día para maximizar la ganancia diaria. ¿Cuál es esta ganancia?

78. Una cacerola metálica abierta será construida cortando de las esquinas cuadrados del mismo tamaño de una lámina metálica rectangular de 14 por 18 pulg y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Si x centímetros es la longitud del cuadrado cortado, exprese el número de pulgadas cúbicas de la caja como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** En la graficadora, determine, con una exactitud de centésimos de pulgada, la longitud del lado del cuadrado que debe ser cortado para que el volumen de la cacerola sea un máximo. ¿Cuál es este volumen máximo?

79. Para formar una caja abierta, se cortan cuadrados de cada una de las esquinas de la lámina de hoja de lata que tiene un área de 400 m^2. **(a)** Si x centímetros es la longitud del lado del cuadrado que será cortado, exprese el número de centímetros cúbicos del volumen de la caja como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** En la graficadora encuentre, con una precisión de centésimos de centímetro, la longitud del lado del cuadrado que será cortado para que el volumen de la caja sea un máximo? ¿Cuál es este volumen?

80. Un letrero que contiene 50 m^2 de material impreso se requiere que tenga márgenes de 4 m arriba y abajo, así como 2 m en cada uno de los lados. Si $A(x)$ metros cuadrados es el área total del letrero cuando x metros es la medida horizontal de la región cubierta por el material impreso, escriba una ecuación que defina $A(x)$. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función A? **(c)** En la graficadora, determine, con precisión de metros, las dimensiones del letrero más pequeño que pueden presentar estas especificaciones.



81. Una caja abierta con base cuadrada tiene un volumen de 4 000 pulg^2. **(a)** Si $S(x)$ pulgadas cuadradas es el área total de la superficie de la caja cuando x es la longitud del cuadrado de la base, escriba una ecuación que defina $S(x)$. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función S? **(c)** Determine en la graficadora, con precisión de pulgadas, las dimensiones de la caja que puede construirse con la mínima cantidad de material.

82. Haga el ejercicio 81, si la caja está cerrada.

83. Demuestre que cualquier función, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, puede expresarse como la suma de una función par y una función impar escribiendo.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

y demostrando que la función que tiene valores $\frac{1}{2}[f(x) + f(x)]$ es una función par, y que la función que tiene valores $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ es una función impar.

84. La función g está definida por $g(x) = x^2$. Defina una función f tal que $(f \circ g)(x) = x$ si
(a) $x \geq 0$ **(b)** $x < 0$

85. Encuentre las fórmulas para $(f \circ g)(x)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

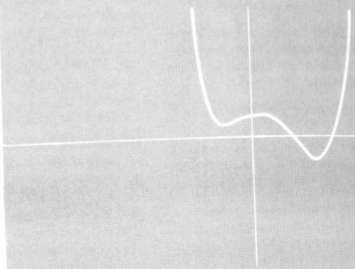
Dibuje las gráficas de f, g y $f \circ g$.

86. Encuentre las fórmulas para $(g \circ f)(x)$ para las funciones del ejercicio 85.

87. Dibuje la gráfica de $g \circ f$ para las funciones del ejercicio 85.

Capítulo 5

Funciones polinomiales y racionales



VISIÓN PRELIMINAR

El tratamiento de las funciones polinomiales y racionales es lo más completo posible sin el empleo del Cálculo. Para obtener gráficas de funciones polinomiales nos basaremos en transformaciones geométricas. En el estudio acerca de las gráficas de funciones racionales se resalta el papel que desempeñan las asíntotas en la obtención de estas gráficas. Definimos las asíntotas después de un análisis intuitivo de límites que implican al infinito, concepto estudiado más formalmente en Cálculo. Otro concepto importante de este capítulo consiste en aprender métodos para determinar ceros de funciones polinomiales, tanto algebraica como gráficamente. Las herramientas que necesitaremos incluyen el teorema del factor y la sustitución sintética.

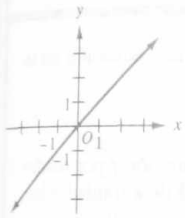
Sumario

5.1 Gráficas de funciones polinomiales
5.2 Teorema del factor y sustitución sintética
5.3 Ceros racionales de funciones polinomiales
5.4 Ceros complejos de funciones polinomiales
5.5 Funciones racionales

5.1 GRÁFICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES

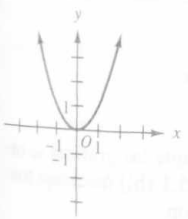
OBJETIVOS

1. **Aprender la regla de traslación vertical.**
2. **Aprender la regla de traslación horizontal.**
3. **Aprender la regla de expansión y contracción vertical.**
4. **Aprender la regla de reflexión respecto al eje x.**
5. **Dibujar gráficas de funciones polinomiales mediante transformaciones geométricas.**
6. **Describir el comportamiento al infinito de gráficas de funciones polinomiales.**
7. **Determinar los extremos relativos de una función polinomial.**
8. **Estimar los extremos relativos de una función polinomial.**
9. **Trazar gráficas de funciones polinomiales.**



$f(x) = x$

(a)



$f(x) = x^2$

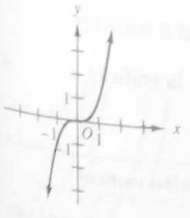
(b)

En las secciones 4.3 y 4.4 se describió la forma en que se emplean las funciones polinomiales como modelos matemáticos de enunciados de problemas. En esta sección, discutiremos las gráficas de funciones polinomiales.

Anteriormente se dijo que la gráfica de una función lineal es una recta, y que la gráfica de una función cuadrática es una parábola. Considere ahora la **función potencia** definida como

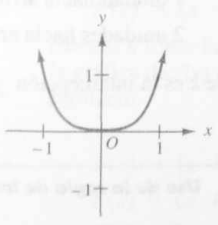
$$f(x) = x^n \quad n \text{ es un entero positivo}$$

La Figura 5.1 muestra gráficas de esta función para valores enteros positivos de n, de 1 a 6. Todas estas gráficas contienen al origen, el cual es la única intersección de las curvas con los ejes. Si $n > 1$, el eje x es tangente a la gráfica en el origen. Si n es un entero positivo par, la gráfica se encuentra en los cuadrantes primero y segundo, y es simétrica con respecto al eje y. Si n es un entero positivo impar, la gráfica está en los cuadrantes primero y tercero, y es simétrica con respecto al origen. En el caso de que $|x|$ se aumente sin límite, también lo hará $|f(x)|$.



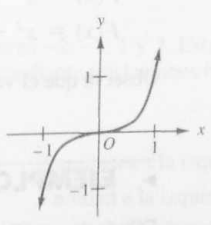
$f(x) = x^3$

(c)



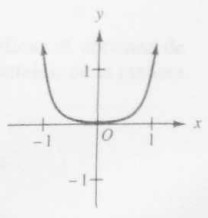
$f(x) = x^4$

(d)



$f(x) = x^5$

(e)



$f(x) = x^6$

(f)

FIGURA 5.1

Ahora se mostrará cómo la gráfica de una función definida mediante una ecuación de la forma

$$F(x) = x^n + k$$

puede obtenerse a partir de la gráfica de $f(x) = x^n$. El procedimiento está basado en la siguiente *regla de traslación vertical*, la cual se deduce de las ecuaciones de traslación de ejes de la Sección 3.5.

Regla de traslación vertical

La gráfica de una función definida mediante una ecuación de la forma

$$F(x) = f(x) + k$$

puede obtenerse a partir de la gráfica de la función f por medio de una **traslación** (o desplazamiento) **vertical** de k unidades hacia arriba si $k > 0$, y $|k|$ unidades hacia abajo si $k < 0$.

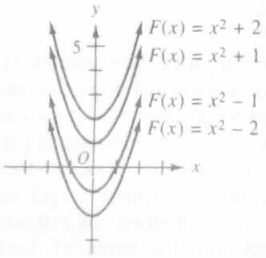


FIGURA 5.2

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La Figura 5.2 muestra las gráficas de las funciones

$$F(x) = x^2 + k$$

donde k toma los valores -2, -1, 1 y 2. Observe que las gráficas se obtienen de la gráfica de $f(x) = x^2$ [*véase* la Figura 5.1 (b)] mediante traslaciones verticales como se muestra a continuación:

$F(x) = x^2 - 2$	2 unidades hacia abajo
$F(x) = x^2 - 1$	1 unidad hacia abajo
$F(x) = x^2 + 1$	1 unidad hacia arriba
$F(x) = x^2 + 2$	2 unidades hacia arriba

Observe que el valor de k es la intercepción y de la gráfica.

▶ EJEMPLO 1 *Uso de la regla de traslación vertical*

Dibuje las gráficas de cada una de las siguientes funciones mediante una traslación vertical de la gráfica de $f(x) = x^3$:

(a) $F(x) = x^3 + 2$ **(b)** $G(x) = x^3 - 3$

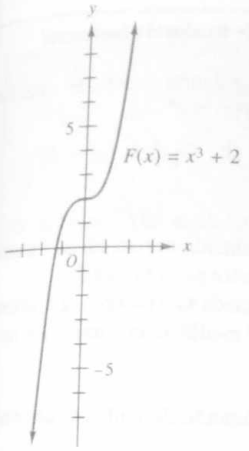


FIGURA 5.3

Solución

(a) La gráfica de $F(x) = x^3 + 2$ se muestra en la Figura 5.3. Se obtiene de la gráfica $f(x) = x^3$ [*véase* la Figura 5.1 (c)] por medio de una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.

(b) La Figura 5.4 muestra la gráfica de $G(x) = x^3 - 3$, la que se obtiene de la gráfica de $f(x) = x^3$ mediante una traslación vertical de 3 unidades hacia abajo. ◀

La *regla de traslación horizontal*, la cual también se obtiene de las ecuaciones de traslación de ejes de la Sección 3.5, nos permite obtener la gráfica de una función definida por una ecuación de la forma

$$F(x) = (x - h)^n$$

a partir de la gráfica de $f(x) = x^n$.

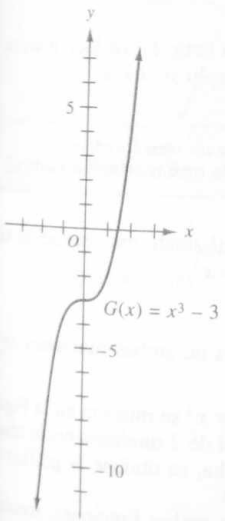


FIGURA 5.4

Regla de traslación horizontal

La gráfica de una función definida mediante una ecuación de la forma

$$F(x) = f(x - h)$$

puede obtenerse de la gráfica de la función f por medio de una **traslación** (o desplazamiento) **horizontal** de h unidades hacia la derecha si $h > 0$, y $|h|$ unidades hacia la izquierda si $h < 0$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La Figura 5.5 muestra las gráficas de las funciones definidas por

$$F(x) = (x - h)^3$$

cuando h toma los valores -2, -1, 1 y 2. Estas gráficas se obtienen de la gráfica de $f(x) = x^3$, mediante traslaciones horizontales, de la manera siguiente:

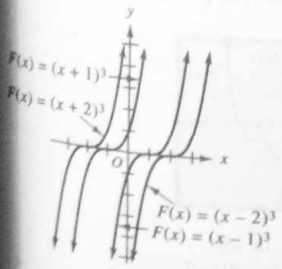


FIGURA 5.5

$F(x) = (x + 2)^3$ 2 unidades a la izquierda

$F(x) = (x + 1)^3$ 1 unidad a la izquierda

$F(x) = (x - 1)^3$ 1 unidad a la derecha

$F(x) = (x - 2)^3$ 2 unidades a la derecha

Observe que el valor de h es la intercepción x de la gráfica. ◀

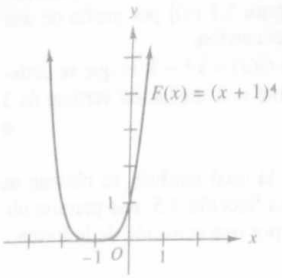


FIGURA 5.6

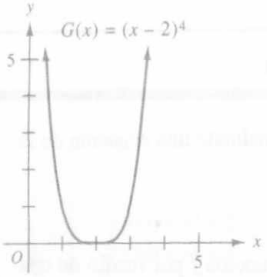


FIGURA 5.7

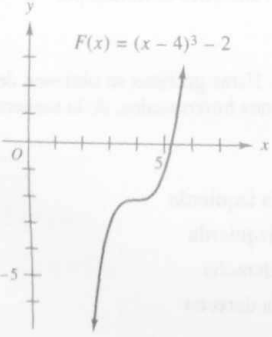


FIGURA 5.8

▸ EJEMPLO 2 *Uso de la regla de traslación horizontal*

Dibuje las gráficas de cada una de las siguientes funciones mediante una traslación horizontal de la gráfica de $f(x) = x^4$:

(a) $F(x) = (x + 1)^4$ (b) $G(x) = (x - 2)^4$

Solución

(a) La gráfica de $F(x) = (x + 1)^4$ se obtuvo de la de $f(x) = x^4$ [véase la Figura 5.1 (d)] por medio de una traslación horizontal de 1 unidad hacia la izquierda. La gráfica se muestra en la Figura 5.6.

(b) En la Figura 5.7 se presenta la gráfica de $G(x) = (x - 2)^4$, obtenida a partir de la gráfica de $f(x) = x^4$ mediante una traslación horizontal de 2 unidades a la derecha.

A fin de obtener la gráfica de una función definida por una ecuación de la forma

$$F(x) = (x - h)^n + k$$

a partir de la gráfica de $f(x) = x^n$, se utiliza tanto la traslación vertical como la horizontal, esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

▸ EJEMPLO 3 *Dibujo de la gráfica de una función polinomial mediante una traslación vertical y una horizontal*

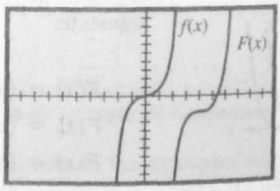
Dibuje la gráfica de la siguiente función utilizando una traslación vertical y otra horizontal de la gráfica de $f(x) = x^3$:

$$F(x) = (x - 4)^3 - 2$$

Compruebe la gráfica trazando las gráficas de ambas funciones en el mismo rectángulo de inspección.

Solución La gráfica de la función $f(x) = x^3$ se muestra en la Figura 5.1(c). Por medio de una traslación vertical de 2 unidades hacia abajo y otra horizontal de 4 unidades a la derecha, se obtiene la gráfica requerida, la cual se presenta en la Figura 5.8.

La Figura 5.9 contiene las gráficas de ambas funciones, trazadas en el rectángulo de inspección de [−10, 10] por [−10, 10].

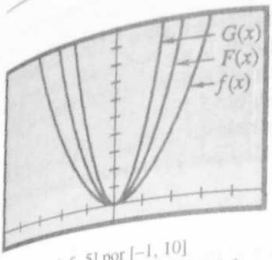


[−10, 10] por [−10, 10]
$f(x) = x^3$ y $F(x) = (x - 4)^3 - 2$

FIGURA 5.9

[−5, 5] por [−1, 10]
FIGURA 5.10

[−5, 5] por [−1, 10]
FIGURA 5.11



[−5, 5] por [−1, 10]
$f(x) = x^2$, $F(x) = 2x^2$, y $G(x) = 4x^2$
FIGURA 5.10

Ahora, se estudiará el efecto causado en la gráfica de $f(x) = x^n$ al multiplicar x^n por una constante positiva.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) La Figura 5.10 muestra las gráficas de

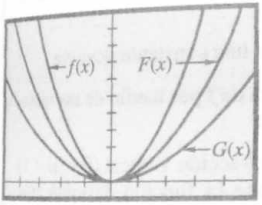
$$f(x) = x^2 \qquad F(x) = 2x^2 \qquad G(x) = 4x^2$$

trazadas en el mismo rectángulo de inspección. Note que la multiplicación de x^2 por los factores 2 y 4 causa un "estiramiento" vertical en la gráfica de $f(x) = x^2$ debido al factor.

(b) La Figura 5.11 presenta las gráficas de las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 \qquad F(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad G(x) = \frac{1}{4}x^2$$

Aquí, la multiplicación de x^2 por los factores $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ ocasiona en la gráfica de $f(x) = x^2$ una contracción vertical debida al factor. ◀



[−5, 5] por [−1, 10]
$f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, y $G(x) = \frac{1}{4}x^2$
FIGURA 5.11

El ejemplo ilustrativo 3 muestra un caso especial de la regla siguiente.

Regla de expansión y contracción vertical

La gráfica de una función definida mediante una ecuación de la forma

$$F(x) = af(x) \qquad a > 0$$

puede obtenerse a partir de la gráfica de f por medio de

(i) **expansión vertical** de la gráfica mediante un factor a si $a > 1$.

(ii) **contracción vertical** de la gráfica mediante un factor a si $0 < a < 1$.

▸ EJEMPLO 4 *Uso de la regla de expansión y contracción vertical*

Dibuje la gráfica de cada una de las funciones siguientes por medio de una expansión vertical o una contracción vertical de la gráfica de $f(x) = x^4$.

(a) $F(x) = 2x^4$ **(b)** $G(x) = \frac{1}{4}x^4$

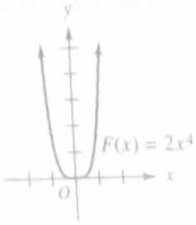


FIGURA 5.12

Solución

(a) La gráfica de $f(x) = x^4$ se muestra en la Figura 5.1(d). La gráfica de F se obtiene de la de f por medio de la multiplicación de cada ordenada por 2, lo que tiene el efecto de estirar verticalmente la gráfica debido al factor 2. *Véase* la Figura 5.12.

(b) Para obtener la gráfica de G, mostrada en la Figura 5.13, se multiplica cada ordenada de la gráfica de f por $\frac{1}{4}$, la cual se contrae verticalmente debido al factor $\frac{1}{4}$.

Ahora se resume lo discutido hasta el momento en esta sección.

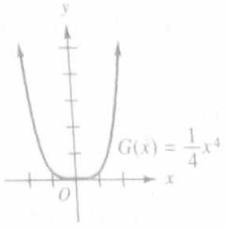


FIGURA 5.13

Transformaciones geométricas de una gráfica

La gráfica de una función definida mediante una ecuación de la forma

$$F(x) = af(x - h) + k \qquad a \text{ es una constante positiva}$$

puede obtenerse a partir de la gráfica de f por medio de las transformaciones geométricas siguientes:

1. Expansión vertical ($a > 1$) o contracción vertical ($0 < a < 1$) mediante un factor a. Se obtiene la función definida por $af(x)$.
2. Traslación horizontal de h unidades a la derecha si $h > 0$, y $|h|$ a la izquierda si $h < 0$. Se obtiene la función definida por $af(x - h)$.
3. Traslación vertical de k unidades hacia arriba si $k > 0$, y $|k|$ unidades hacia abajo si $k < 0$. Se obtiene $F(x) = af(x - h) + k$.

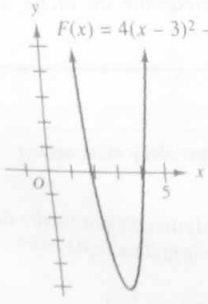


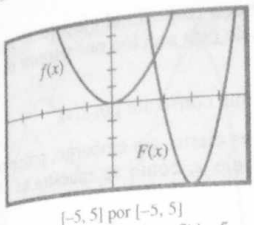
FIGURA 5.14

▸ EJEMPLO 5 *Dibujo de la gráfica de una función polinomial por medio de transformaciones geométricas.*

Dibuje la gráfica de $F(x) = 4(x - 3)^2 - 5$ por medio de transformaciones geométricas adecuadas de la gráfica de $f(x) = x^2$. Compruebe la gráfica trazando las gráficas de ambas funciones en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Se realizarán las transformaciones geométricas de la gráfica de f en el orden indicado para obtener la gráfica de F, la cual se muestra en la Figura 5.14.

1. Expansión vertical mediante el factor 4.
2. Traslación horizontal de 3 unidades hacia la derecha.
3. Traslación vertical de 5 unidades hacia abajo.



[–5, 5] por [–5, 5]
$f(x) = x^2$ y $F(x) = 4(x - 3)^2 - 5$
FIGURA 5.15

La Figura 5.15 presenta las gráficas de ambas funciones tal como aparecen en la graficadora o calculadora gráfica. ◀

Ahora considere la función potencia definida como

$$f(x) = -x^n \qquad n \text{ es un entero positivo}$$

La Figura 5.16 muestra las gráficas de esta función cuando n toma los valores enteros positivos de 1 a 6. Observe que son los reflejos respecto al eje x de las gráficas correspondientes de la Figura 5.1; esto es, la gráfica de $f(x) = -x^n$ puede obtenerse mediante la reflexión con respecto al eje x de la gráfica de $f(x) = x^n$. Por tanto, se tiene la regla siguiente.

Regla de reflexión respecto al eje x

La gráfica de una función definida mediante una ecuación de la forma

$$F(x) = -f(x)$$

puede obtenerse a partir de la gráfica de f por medio de la reflexión con respecto al eje x.

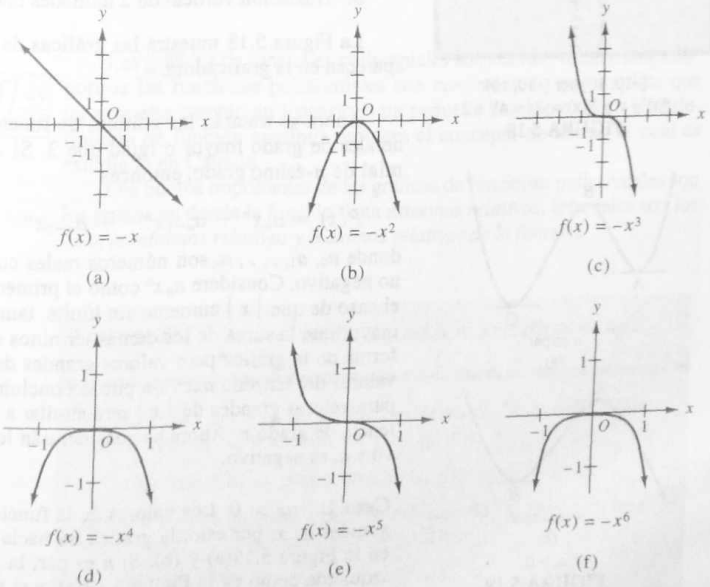


FIGURA 5.16

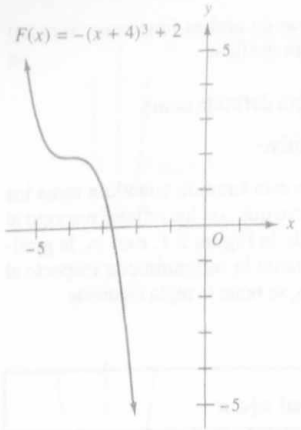


FIGURA 5.17

El empleo de la regla de reflexión con respecto al eje x junto con las otras transformaciones geométricas de esta sección nos permite obtener la gráfica de la función

$$F(x) = -a(x - h)^n + k \qquad a \text{ es una constante positiva}$$

a partir de la gráfica de $f(x) = x^n$. Esto es cierto, sin embargo, primero se realiza la reflexión con respecto al eje x, como se muestra en el ejemplo siguiente.

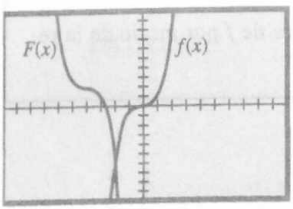
▸ EJEMPLO 6 *Dibujo de la gráfica de una función polinomial por medio de transformaciones geométricas*

Dibuje la gráfica de $F(x) = -(x + 4)^3 + 2$ mediante transformaciones geométricas apropiadas de la gráfica de $f(x) = x^3$. Compruebe la gráfica trazando las gráficas de ambas funciones en el mismo rectángulo de inspección.

Solución La gráfica de F, mostrada en la Figura 5.17, se obtiene aplicando las siguientes transformaciones geométricas de la gráfica de f en el orden indicado.

1. Reflexión con respecto al eje x.
2. Traslación horizontal de 4 unidades hacia la izquierda.
3. Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.

La Figura 5.18 muestra las gráficas de ambas funciones tal como aparecen en la graficadora.



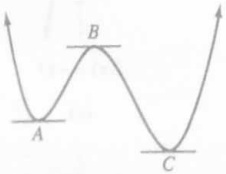
[−10, 10] por [−10, 10]
$f(x) = x^3$ y $F(x) = -(x + 4)^3 + 2$

FIGURA 5.18

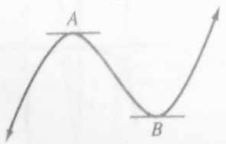
Ahora se tratarán las gráficas de funciones polinomiales más generales de grado mayor o igual que 3. Si P es una función polinomial de n-ésimo grado, entonces

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales con $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo. Considere $a_n x^n$ como el primer término del polinomio. En el caso de que $|x|$ aumente sin límite, también lo hará $|a_n x^n|$ y será mayor que la suma de los demás términos del polinomio. Por tanto, la forma de la gráfica para valores grandes de $|x|$ será afectada por los valores del término $a_n x^n$. Se puede concluir que la forma de la gráfica para valores grandes de $|x|$ será similar a la gráfica de la función potencia de grado n. Ahora se considerarán los casos en que a_n es positivo y a_n es negativo.



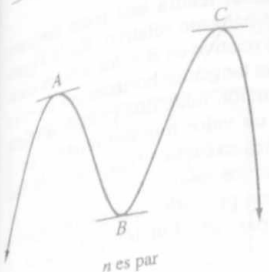
n es par
(a)



n es impar
(b)
$a_n > 0$

FIGURA 5.19

Caso 1: $a_n > 0$: Los valores de la función aumentarán para valores grandes de x; por esto, la gráfica irá hacia arriba y a la derecha como en la Figura 5.19(a) y (b). Si n es par, la gráfica descenderá desde la izquierda como en la Figura 5.19(a), y si n es impar, la gráfica ascenderá desde la izquierda como en la Figura 5.19(b).



n es par
(a)

n es impar
(b)

$a_n < 0$

FIGURA 5.20

Caso 2: $a_n < 0$: Los valores de la función disminuirán para valores grandes de x; por esto, la gráfica irá hacia abajo y a la derecha como en la Figura 5.20(a) y (b). Si n es par, la gráfica ascenderá desde la izquierda como en la Figura 5.20(a); y si n es impar, la gráfica descenderá desde la izquierda como en la Figura 5.20(b).

Las propiedades de una gráfica en las prolongaciones izquierda y derecha del eje x son denominadas como **comportamiento al infinito** de la gráfica. Así, las conclusiones de los casos 1 y 2 proporcionan el comportamiento al infinito de las gráficas de funciones polinomiales, lo que se resume en la Tabla 1.

Tabla 1 Comportamiento al infinito de gráficas de funciones polinomiales

a_n	n	*Comportamiento al infinito*	*Ejemplo*
Positivo	Par	Desciende desde la izquierda Va hacia arriba y a la derecha	Figura 5.19(a)
Positivo	Impar	Asciende desde la izquierda Va hacia arriba y a la derecha	Figura 5.19(b)
Negativo	Par	Asciende desde la izquierda Va hacia abajo y a la derecha	Figura 5.20(a)
Negativo	Impar	Desciende desde la izquierda Va hacia abajo y a la derecha	Figura 5.20(b)

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$

Las gráficas de funciones polinomiales son curvas "ininterrumpidas" porque las funciones polinomiales son *continuas*, lo que implica que un pequeño cambio en x ocasiona un pequeño cambio en $f(x)$. Una definición de función continua requiere el concepto de *límite*, el cual es estudiado en Cálculo.

Los puntos importantes de las gráficas de funciones polinomiales son los puntos en donde la función tiene *extremos relativos*, los cuales son los *valores mínimos relativos* y *máximos relativos de la función.*

DEFINICIÓN **Valores mínimos y máximos relativos de una función**

El valor $f(a)$ es un **valor mínimo relativo** de f si existe un intervalo abierto (c, d) que contiene a a y tal que

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } (c, d)$$

El valor $f(b)$ es un **valor máximo relativo** de f si existe un intervalo abierto (c, d) que contiene a b y tal que

$$f(b) \geq f(x) \quad \text{para todo } x \text{ en } (c, d)$$

La gráfica de una función polinomial tendrá una recta tangente horizontal en un punto donde existe un extremo relativo. En la Figura 5.19(a) la función tiene un valor máximo relativo en B y dos valores mínimos relativos en A y C. Observe las rectas tangentes horizontales en estos tres puntos. En la Figura 5.19(b), la función tiene dos extremos relativos, un valor máximo relativo en A y un valor mínimo relativo en B. La función de la Figura 5.20(a) tiene tres extremos relativos, y la función de la Figura 5.20(b) tiene dos extremos relativos.

Ahora enunciaremos un teorema, sin probarlo, que proporciona el número de extremos relativos posibles para una función polinomial.

TEOREMA 1

Una función polinomial de n-ésimo grado tiene a lo más $n - 1$ extremos relativos.

De este teorema se deduce que una función polinomial de cuarto grado tiene a lo más tres extremos relativos. Por tanto, la gráfica de la Figura 5.19(a) podría ser la de una función polinomial de cuarto grado. La gráfica de la Figura 5.19(b) podría ser la de una función polinomial de tercer grado, ya que tales funciones tienen a lo más dos extremos relativos.

En los siguientes ejemplos, se aplicará el Teorema 1 así como la información del comportamiento al infinito de la Tabla 1.

▸ EJEMPLO 7 *Descripción y trazado de la gráfica de una función polinomial y estimación de sus extremos relativos*

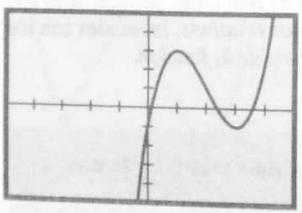
Describa el comportamiento al infinito de la gráfica de la función definida como

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

Determine los extremos relativos de P. Trace la gráfica de P en una graficadora y estime sus extremos relativos.

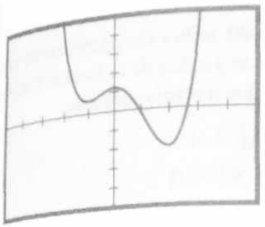
Solución Debido a que el coeficiente de x^3 es positivo y el grado del polinomio es impar, se concluye de la Tabla 1 que la gráfica asciende desde la izquierda y va hacia arriba y a la derecha. Por el Teorema 1, existen a lo más dos extremos relativos. Por tanto, la gráfica probablemente parecida a la de la Figura 5.19(b).

La Figura 5.21 muestra la gráfica de P trazada en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$. Empleando el aumento (zoom) de la graficadora vemos que P tiene un valor máximo relativo de 3 en $x =$



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$
FIGURA 5.21

un valor mínimo relativo de -1 en $x = 3$. En el curso de Cálculo se le habilitará para demostrar que éstos son los extremos relativos exactos. ◄



[−5, 5] por [−50, 50]
$P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$
FIGURA 5.22

► **EJEMPLO 8** ***Descripción y trazado de la gráfica de una función polinomial y estimación de sus extremos relativos***

Siga las instrucciones del ejemplo 7 para la función definida por

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$$

Solución El grado del polinomio es 4 y el coeficiente de x^4 es positivo. Por tanto, se concluye de la Tabla 1 que la gráfica desciende desde la izquierda y va hacia arriba y a la derecha. Además, por el Teorema 1, tiene a lo más tres extremos relativos. Por esto, la gráfica probablemente es similar a la de la Figura 5.19(a).

Se traza la gráfica de P en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$. Mediante el aumento (*zoom in*) de la graficadora se observa que P tiene un valor máximo relativo de 12 en $x = 0$, y valores mínimos relativos de 7 y -20 en $x = -1$ y $x = 2$, respectivamente. Estos extremos relativos son exactos, como lo podrá probar en su curso de Cálculo. ◄

EJERCICIOS 5.1

En los ejercicios 1 a 6, dibuje las gráficas de F y G, en el mismo sistema coordenado, mediante una traslación vertical u horizontal de la gráfica de f.

1. $f(x) = x^2$; $F(x) = x^2 + 3$; $G(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = x^3$; $F(x) = x^3 - 2$; $G(x) = x^3 + 3$
3. $f(x) = x^2$; $F(x) = (x + 3)^2$; $G(x) = (x - 4)^2$
4. $f(x) = x^3$; $F(x) = (x - 2)^3$; $G(x) = (x + 3)^3$
5. $f(x) = x^3$; $F(x) = x^3 - 6$; $G(x) = (x - 6)^3$
6. $f(x) = x^4$; $F(x) = x^4 + 1$; $G(x) = (x + 1)^4$

En los ejercicios 7 a 10, dibuje las gráficas de F y G, en el mismo sistema coordenado, mediante una expansión o contracción vertical de la gráfica de f.

7. $f(x) = x^4$; $F(x) = 2x^4$; $G(x) = \frac{1}{3}x^4$
8. $f(x) = x^2$; $F(x) = 3x^2$; $G(x) = \frac{1}{2}x^2$
9. $f(x) = -x^3$; $F(x) = -3x^3$; $G(x) = -\frac{1}{2}x^3$
10. $f(x) = -x^4$; $F(x) = -2x^4$; $G(x) = -\frac{1}{4}x^4$

En los ejercicios 11 a 16, dibuje la gráfica de F mediante transformaciones geométricas apropiadas de la gráfica de f. Compruebe la gráfica trazando las gráficas de ambas funciones en el mismo rectángulo de inspección.

11. $f(x) = x^2$; $F(x) = 3(x + 5)^2 - 6$
12. $f(x) = x^3$; $F(x) = -2(x - 4)^3 + 1$
13. $f(x) = x^3$; $F(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^3 - 2$
14. $f(x) = x^2$; $F(x) = \frac{1}{3}(x + 4)^2 + 5$
15. $f(x) = x^4$; $F(x) = -2(x + 3)^4 + 1$
16. $f(x) = x^4$; $F(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^4 - 3$

En los ejercicios 17 a 22, dibuje la gráfica de la función. Compruebe su gráfica en la graficadora.

17. **(a)** $f(x) = -4(x - 2)^2$ **(b)** $g(x) = 3(x + 1)^2$
18. **(a)** $f(x) = \frac{1}{8}(x - 1)^4$ **(b)** $g(x) = -\frac{1}{8}(x + 1)^4$
19. **(a)** $f(x) = (x - 2)^4 + 3$
    (b) $g(x) = -(x + 2)^4 - 3$
20. **(a)** $f(x) = (x - 3)^3 + 2$
    (b) $g(x) = -(x + 3)^3 - 2$
21. **(a)** $f(x) = 2(x + 4)^5 + 1$
    (b) $g(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^5 - 1$
22. **(a)** $f(x) = -2(x + 1)^5 + 4$
    (b) $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^5 - 4$

En los ejercicios 23 a 36, para la función dada haga lo siguiente: (a) describa el comportamiento al infinito de la gráfica; (b) determine los extremos relativos; (c) trace la gráfica; (d) estime los extremos relativos.

23. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
24. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$
25. $F(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
26. $G(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$
27. $g(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
28. $f(x) = 6x^3 + 29x^2 + x - 6$
29. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$
30. $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
31. $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
32. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$
33. $G(x) = 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2$
34. $h(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$
35. $f(x) = -x^4 + x^2$
36. $f(x) = x^5 - 4x^3$

En los ejercicios 37 a 40, utilice transformaciones geométricas para dibujar la gráfica de la función. Trace la gráfica de la función valor absoluto.

37. $F(x) = 2|x - 3| + 4$
38. $F(x) = -2|x + 4| - 3$
39. $F(x) = -3|x + 1| - 5$
40. $F(x) = 3|x - 2| + 4$
41. Las transformaciones geométricas de la gráfica de una función f empleadas para dibujar la gráfica de la función F definida por

$$F(x) = cf(x - h) + k$$

donde c, h y k son constantes, incluyen expansión, contracción, traslaciones vertical y horizontal y la regla de reflexión con respecto al eje x. ¿Es importante el orden en que se realizan estas transformaciones? Explique su respuesta.

5.2 TEOREMA DEL FACTOR Y SUSTITUCIÓN SINTÉTICA

OBJETIVOS

1. **Aprender y aplicar el teorema del residuo.**
2. **Aprender y aplicar el teorema del factor.**
3. **Aprender y aplicar la división sintética.**
4. **Emplear la división sintética para factorizar un polinomio.**
5. **Calcular valores de funciones polinomiales por medio de la sustitución sintética.**
6. **Aplicar el algoritmo de Horner.**

En la próxima sección obtendremos ceros de una función polinomial mediante la determinación de factores lineales del polinomio $P(x)$. Para lograr esto, es necesario aplicar las técnicas discutidas en esta sección.

Comenzaremos por enunciar el teorema al que se le conoce como *algoritmo de la división* para polinomios, donde el divisor es una expresión lineal de la forma $x - r$, donde r es un número real.

TEOREMA 1 *Algoritmo de la división para dividir $P(x)$ entre $x - r$*

Si $P(x)$ es un polinomio y r es un número real, entonces cuando $P(x)$ se divide entre $x - r$, se obtiene como cociente un polinomio único $Q(x)$ y como residuo un número real R tales que para todo valor de x,

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. Divida $P(x)$ entre $x - 2$.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 4 \\ x - 2\overline{)\,2x^3 - 5x^2 + 6x - 3} \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ -x^2 + 6x \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ 4x - 3 \\ \underline{4x - 8} \\ 5 \end{array}$$

De aquí, el cociente $Q(x)$ es $2x^2 - x + 4$, y el residuo R es 5. Por tanto, se escribe

$$2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = (x - 2)(2x^2 - x + 4) + 5$$

lo cual se ha presentado en la forma de la ecuación del Teorema 1. ◄

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

En el ejemplo ilustrativo 1, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. Así,

$$\begin{aligned} P(2) &= 2(2)^3 - 5(2)^2 + 6(2) - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Observe que el valor de $P(2)$ es el mismo número que el residuo obtenido en el ejemplo ilustrativo 1, cuando $P(x)$ se dividió entre $x - 2$. ◄

El ejemplo ilustrativo 2 presenta un caso especial del siguiente teorema, conocido como *teorema del residuo.*

TEOREMA 2 *Teorema del residuo*

Si $P(x)$ es un polinomio y r es un número real, entonces si $P(x)$ se divide entre $x - r$, el residuo es $P(r)$.

Demostración Del Teorema 1 se deduce que cuando $P(x)$ se divide entre $x - r$, obtenemos un polinomio $Q(x)$ como cociente y un número real R como residuo tales que para todo valor de x,

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

Debido a que esta ecuación es una identidad, ésta es satisfecha cuando $x = r$. Así

$$\begin{aligned} P(r) &= (r - r)Q(r) + R \\ &= 0 + R \\ &= R \end{aligned}$$

por lo que el teorema se ha demostrado. ∎

▸ EJEMPLO 1 *Aplicación del teorema del residuo*

Utilice el teorema del residuo a fin de determinar el residuo cuando $2x^3 + 3x^2 - 4x - 17$ se divide entre (a) $x - 3$ y (b) $x + 2$.

Solución

(a) Cuando $P(x)$ se divide entre $x - 3$, el residuo es $P(3)$. Como

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 17$$

$$\begin{aligned} P(3) &= 2(3)^3 + 3(3)^2 - 4(3) - 17 \\ &= 52 \end{aligned}$$

Por tanto, cuando $P(x)$ se divide entre $x - 3$, el residuo es 52.

(b) Cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$, el residuo es $P(-2)$.

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 17 \\ &= -13 \end{aligned}$$

Así, cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$, el residuo es -13. ◂

Una consecuencia del teorema del residuo es el *teorema del factor*. Este teorema nos permite determinar si una expresión particular de la forma $x - r$ es factor de un polinomio dado.

TEOREMA 3 *Teorema del factor*

Si $P(x)$ es un polinomio y r es un número real, entonces $P(x)$ contiene a $x - r$ como factor si y sólo si $P(r) = 0$.

Demostración Debido a que el enunciado del teorema contiene la expresión *si y sólo si*, hay dos partes a probar. Parte 1: Si $P(r) = 0$, entonces $x - r$ es un factor de $P(x)$; Parte 2: Si $x - r$ es un factor de $P(x)$, entonces $P(r) = 0$.

Demostración de la parte 1: Del Teorema 1 y del teorema del residuo se deduce que para el polinomio $P(x)$ y el número real r, existe un único polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - r)Q(x) + P(r)$$

Si $P(r) = 0$, entonces

$$P(x) = (x - r)Q(x)$$

Por tanto, $x - r$ es un factor de $P(x)$.

Demostración de la parte 2: Se desea probar que si $x - r$ es un factor de $P(x)$, entonces $P(r) = 0$. Si $x - r$ es un factor de $P(x)$, entonces cuando $P(x)$ se divide entre $x - r$, el residuo es cero. Así, del teorema del residuo, se deduce que $P(r) = 0$. ■

► EJEMPLO 2 *Aplicación del teorema del factor*

Utilice el teorema del factor para mostrar que $x - 4$ es un factor de $2x^3 - 6x^2 - 5x - 12$.

Solución Si $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 5x - 12$, entonces

$$\begin{aligned} P(4) &= 2(4)^3 - 6(4)^2 - 5(4) - 12 \\ &= 2(64) - 6(16) - 20 - 12 \\ &= 128 - 96 - 32 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, mediante el teorema del factor, $x - 4$ es un factor de $P(x)$. ◄

Cuando se emplea el teorema del factor para mostrar que una expresión lineal de la forma $x - r$ es factor de un polinomio $P(x)$ (como en el ejemplo 2), los otros factores se obtienen dividiendo $P(x)$ entre $x - r$. Para simplificar el cálculo de tales divisiones, usaremos un procedimiento denominado *división sintética*, el cual se explica a continuación.

En el ejemplo ilustrativo 1 se empleó la división larga para dividir $2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ entre $x - 2$. La operación fue la siguiente:

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - x + 4 \\
x - 2\overline{)2x^3 - 5x^2 + 6x - 3} \\
\underline{2x^3 - 4x^2} \\
-x^2 + 6x \\
\underline{-x^2 + 2x} \\
4x - 3 \\
\underline{4x - 8} \\
5
\end{array}
$$

La operación puede abreviarse omitiendo las potencias de x y escribiendo únicamente sus coeficientes. Al efectuar esto, la operación queda como sigue:

$$
\begin{array}{r}
2 \quad -1 \quad 4 \\
1 - 2\overline{)2 \quad -5 \quad 6 \quad -3} \\
\underline{2 \quad -4} \\
-1 \quad 6 \\
\underline{-1 \quad 2} \\
4 \quad -3 \\
\underline{4 \quad -8} \\
5
\end{array}
$$

En el divisor, $x - 2$, el coeficiente de x es 1. Así, el coeficiente del primer término de cada residuo es el mismo que el del siguiente término del cociente. Además, el primer término del siguiente producto parcial es igual al coeficiente del primer término de cada residuo. Por tanto, se pueden omitir los términos del cociente, así como los primeros términos de los productos parciales. Al omitir dichos términos, se obtiene

$$
\begin{array}{r}
1 - 2\big| \; 2 \quad -5 \quad 6 \quad -3 \\
\underline{\quad -4} \\
-1 \quad 6 \\
\underline{\quad 2} \\
4 \quad -3 \\
\underline{\quad -8} \\
5
\end{array}
$$

En la división sintética, el divisor es un polinomio de la forma $x - r$ y por tanto el primer coeficiente del divisor es siempre 1; por lo que se elimina el coeficiente 1. También se recorren los números hacia arriba de modo que queden dispuestos en tres líneas; al hacer esto queda

$$
\begin{array}{r}
-2\big| \; 2 \quad -5 \quad 6 \quad -3 \\
\underline{\quad -4 \quad 2 \quad -8} \\
-1 \quad 4 \quad 5
\end{array}
$$

Ahora se escribe 2, primer coeficiente del dividendo en la primera posición de la fila inferior, para obtener

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -5 & 6 & -3 \\ & & -4 & 2 & -8 \\ \hline & 2 & -1 & 4 & 5 \end{array}$$

Observe que los primeros tres números del último renglón son los coeficientes 2, −1 y 4 del cociente; el último número de este renglón es 5, el cual es el residuo. Los números de la segunda fila se obtienen multiplicando el número de la última fila de la columna precedente por −2; y los números del renglón inferior se determinan restando los de la segunda fila de los de la primera. Si el multiplicador −2 se reemplaza por 2, los números de la segunda fila se suman a los de la primera para obtener los de la última. Al efectuar este cambio resulta:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -5 & 6 & -3 \\ & & 4 & -2 & 8 \\ \hline & 2 & -1 & 4 & 5 \end{array}$$

Este arreglo de la operación es la **división sintética** del polinomio $2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ entre $x - 2$, con cociente $2x^2 - x + 4$ y residuo 5.

En general, los pasos siguientes proporcionan el procedimiento para la división sintética de un polinomio $P(x)$ entre $x - r$. Cuando lea los ejemplos ilustrativos 3 y 4, refiérase a estos pasos.

División sintética

1. Escriba $P(x)$ en la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ y si falta algún término anótelo con coeficiente cero.
2. Escriba los coeficientes de $P(x)$ ordenados en una fila horizontal.
3. Baje el primer coeficiente a_n de $P(x)$ a la última fila.
4. Multiplique a_n por r, y escriba el producto en la segunda línea debajo del coeficiente a_{n-1}; sume el producto a a_{n-1}, y escriba la suma en la fila inferior.
5. Multiplique esta suma por r y escriba el producto en la segunda línea debajo del coeficiente a_{n-2}; sume el producto a a_{n-2}, y escriba la suma en la última fila.
6. Repita el proceso de los pasos 4 y 5 hasta que sea posible.
7. El último número del renglón inferior es el residuo, y los números precedentes son los coeficientes de los términos sucesivos del cociente, el cual es un polinomio cuyo grado es menor que el de $P(x)$ en 1.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Se emplea la división sintética para dividir $3x^3 - 7x^2 + x + 5$ entre $x -$ Los coeficientes del dividendo son 3, −7, 1 y 5. Las flechas indican orden en el cual los números son determinados.

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 3 & -7 & 1 & 5 \\ & \downarrow & 3 & -4 & -3 \\ \hline & 3 & -4 & -3 & 2 \end{array}$$

Debido a que el último renglón está formado por los números 3, −4, 2, el cociente es $3x^2 - 4x - 3$, y el residuo es 2. Por tanto,

$$3x^3 - 7x^2 + x + 5 = (x - 1)(3x^2 - 4x - 3) + 2$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Se utiliza la división sintética para determinar el cociente y el resid cuando $x^4 - 7x^2 + 2x - 6$ se divide entre $x + 3$. Como se va a divid entre $x + 3$, o sea, $x - (-3)$, $r = -3$. Los coeficientes de $x^4 - 7x^2 + 2x -$ son 1, 0, −7, 2 y −6 (se introdujo el coeficiente cero por el término tante x^3). La operación se expresa como sigue:

$$\begin{array}{r|ccccc} -3 & 1 & 0 & -7 & 2 & -6 \\ & & -3 & 9 & -6 & 12 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & -4 & 6 \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $x^3 - 3x^2 + 2x - 4$, y el residuo es 6. Así

$$x^4 - 7x^2 + 2x - 6 = (x + 3)(x^3 - 3x^2 + 2x - 4) + 6$$

▸ EJEMPLO 3 *Aplicación de la división sintética*

Emplee la división sintética para determinar el cociente y el resid cuando $x^5 - 3x^4 + 4x + 5$ se divide entre $x - 2$.

Solución Los coeficientes de $x^5 - 3x^4 + 4x + 5$ son 1, −3, 0, 4 y 5, donde los ceros representan los coeficientes de los términos tantes x^3 y x^2. La operación, mediante la división sintética es

$$\begin{array}{r|ccccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ & & 2 & -2 & -4 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & -4 & -4 & -3 \end{array}$$

El cociente es $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 4$, y el residuo es −3.

▸ EJEMPLO 4 *Empleo de la división sintética para factorizar un polinomio*

Dado

$$P(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 1$$

Muestre que $3x - 1$ es un factor de $P(x)$ y determine los otros factores.

Solución Como $3x - 1 = 3(x - \frac{1}{3})$, $3x - 1$ será un factor de $P(x)$ si también lo es $x - \frac{1}{3}$. Se utiliza la división sintética para dividir $P(x)$ entre $x - \frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{r|cccc} \frac{1}{3} & 6 & 1 & -4 & 1 \\ & & 2 & 1 & -1 \\ \hline & 6 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

Como el residuo es $P(\frac{1}{3}) = 0$, se concluye por el teorema del factor que $x - \frac{1}{3}$ es un factor de $P(x)$. Además,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \tfrac{1}{3})(6x^2 + 3x - 3) \\ &= (x - \tfrac{1}{3})[3(2x^2 + x - 1)] \\ &= (3x - 1)(2x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

Por tanto, $3x - 1$ es un factor de $P(x)$. Debido a que

$$2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$$

$P(x)$ se escribe en forma factorizada como

$$P(x) = (3x - 1)(2x - 1)(x + 1)$$ ◂

El teorema del residuo establece que para un polinomio dado $P(x)$, el valor $P(r)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - r$. La división sintética proporciona una forma rápida para obtener $P(r)$, y cuando se emplea este método se dice que se calcula $P(r)$ por *sustitución sintética*. En general, es más fácil determinar $P(r)$ mediante sustitución sintética que por sustitución directa.

▸ EJEMPLO 5 *Determinación de valores de funciones polinomiales mediante sustitución sintética*

Si $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 20x - 10$, determine $P(0)$, $P(-1)$, $P(3)$ y $P(-4)$ por medio de sustitución directa o sintética, la que sea más fácil.

Solución Se obtendrá $P(0)$ y $P(-1)$ por sustitución directa, $P(3)$ y $P(-4)$ mediante sustitución sintética.

$$P(0) = -10 \qquad P(-1) = -2 + 4 + 10 + 20 - 10 = 22$$

$$\begin{array}{r|cccccc} 3 & 2 & 4 & -10 & 0 & -20 & -10 \\ & & 6 & 30 & 60 & 180 & 480 \\ \hline & 2 & 10 & 20 & 60 & 160 & 470 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccccc} -4 & 2 & 4 & -10 & 0 & -20 & -10 \\ & & -8 & 16 & -24 & 96 & -304 \\ \hline & 2 & -4 & 6 & -24 & 76 & -314 \end{array}$$

Así, $P(3) = 470$ y $P(-4) = -314$.

Los cálculos de valores de una función polinomial pueden efectuarse en la calculadora. En algunas calculadoras es posible determinar $P(r)$ haciendo $y = P(x)$ y asignando el valor r en x, se obtiene el valor correspondiente para y. Consulte el manual de la calculadora.

Un procedimiento conocido como *algoritmo de Horner*, llamado así en honor a **William Horner** (1786-1837), matemático inglés, proporciona un método fácil de seguir en la calculadora para determinar el residuo $P(r)$. Para mostrar este procedimiento, considere el ejemplo 4:

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^3 + x^2 - 4x + 1 \qquad (1) \\ &= x[6x^2 + x - 4] + 1 \\ &= x[x(6x + 1) - 4] + 1 \end{aligned}$$

De aquí,

$$P(r) = r[r(6r + 1) - 4] + 1 \qquad (2)$$

El miembro derecho de (2) se evalúa fácilmente en una calculadora empezando con la expresión de los paréntesis internos como sigue: multiplique 6 (primer coeficiente de (1)) por r; sume 1 (el coeficiente que sigue); multiplique la suma por r y sume -4 (siguiente coeficiente); multiplique esa suma por r y sume 1 (coeficiente que sigue).

Observe que si se calcula $P(r)$ mediante sustitución sintética resulta

$$\begin{array}{r|cccc} r & 6 & 1 & -4 & 1 \\ & & 6r & r(6r + 1) & r[r(6r + 1) - 4] \\ \hline & 6 & 6r + 1 & r(6r + 1) - 4 & r[r(6r + 1) - 4] + 1 \end{array}$$

Entonces, por el teorema del residuo, $P(r) = r[r(6r + 1) - 4] + 1$ como en (2). Por esto, el *algoritmo de Horner* y la *sustitución sintética* son dos nombres para el mismo procedimiento.

▸ EJEMPLO 6 *Aplicación del algoritmo de Horner*

Escriba el polinomio

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 5$$

en la forma del *algoritmo de Horner* y utilícelo para evaluar $P(2)$ y $P(-3)$ en una calculadora.

Solución

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 5 \\ &= x(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + 5 \\ &= x(x[3x^2 - 2x + 4] - 1) + 5 \\ &= x(x[x(3x - 2) + 4] - 1) + 5 \end{aligned}$$

Con esta forma se obtiene en la calculadora $P(2) = 51$ y $P(-3) = 341$. ◀

EJERCICIOS 5.2

En los ejercicios 1 a 4, utilice el teorema del residuo para determinar el residuo cuando el polinomio es dividido entre la expresión lineal.

1. (a) $(3x^2 - 4x + 5) \div (x - 3)$
   (b) $(3x^4 + 7x^3 + x^2 + x + 9) \div (x + 1)$
2. (a) $(4x^2 + 7x - 5) \div (x - 1)$
   (b) $(x^3 - 4x^2 + 5) \div (x + 3)$
3. (a) $(x^3 + 9) \div (x + 2)$
   (b) $(3x^5 - 7x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 1) \div (x - 3)$
4. (a) $(x^4 - 8) \div (x - 2)$
   (b) $(8x^5 + 7x^2 - 3) \div (x - \frac{1}{2})$

En los ejercicios 5 a 10, emplee el teorema del factor para responder la pregunta.

5. ¿Es $x - 3$ un factor de $2x^3 - 6x^2 - 5x + 15$?
6. ¿Es $x + 3$ un factor de $3x^3 - x^2 - 22x - 24$?
7. ¿Es $x + 2$ un factor de $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 11x + 6$?
8. ¿Es $x - 2$ un factor de $x^7 - 128$?
9. ¿Es $x + 3$ un factor de $x^5 + 243$?
10. ¿Es $x - a$ un factor de $x^8 + a^8$?

En los ejercicios 11 a 20, encuentre el cociente y el residuo mediante división sintética.

11. $(2x^3 - x^2 + 3x + 12) \div (x - 4)$
12. $(y^3 + 4y^2 + 3y - 6) \div (y - 2)$
13. $(2x^4 + 5x^3 - 2x - 1) \div (x + 4)$
14. $(x^3 + 4x^2 - 7) \div (x + 3)$
15. $(3z^5 + z^4 - 4z^2 + 7) \div (z - 2)$
16. $(4x^6 + 21x^5 - 26x^3 + 27x) \div (x + 5)$
17. $(6x^3 - x^2 + 2x + 2) \div (x + \frac{1}{3})$
18. $(8x^3 - 6x^2 + 5x - 3) \div (x - \frac{1}{4})$
19. $(x^7 - 1) \div (x - 1)$
20. $(x^7 + 1) \div (x + 1)$

En los ejercicios 21 a 26, utilice la sustitución sintética para determinar los valores de la función.

21. Si $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 4$, determine $P(2)$ y $P(-3)$.
22. Si $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 9$, determine $P(-2)$ y $P(1)$.
23. Si $P(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 9$, determine $P(-4)$ y $P(3)$.
24. Si $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 15x + 1$, determine $P(4)$ y $P(-2)$.
25. Si $P(x) = 6x^3 - x^2 - 7x + 2$, determine $P(-\frac{1}{3})$ y $P(\frac{3}{2})$.
26. Si $P(x) = x^3 + 2x + 4$, determine $P(-1.3)$ y $P(2.1)$.

En los ejercicios 27 a 30, muestre que la expresión lineal es un factor del polinomio y encuentre los otros factores.

27. $x + 3$; $P(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3$
28. $x - 5$; $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 16x - 5$
29. $2x - 1$; $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$
    [*Sugerencia*: $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$]
30. $3x + 2$; $P(x) = 12x^3 + 5x^2 - 11x - 6$
    [*Sugerencia*: $3x + 2 = 3(x + \frac{2}{3})$]

En los ejercicios 31 a 34, determine si la expresión lineal es un factor de $P(x)$.

31. $x - 4$; $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 14x + 8$
32. $x - 3$; $P(x) = x^4 - 6x^2 - 5x - 12$

33. $2x + 3$; $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$

34. $3x - 1$; $P(x) = 9x^3 + 3x^2 - 5x - 1$

En los ejercicios 35 a 38, escriba el polinomio en la forma del algoritmo de Horner y úsela para determinar los valores indicados de la función mediante una calculadora.

35. $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 3x - 12$; $P(7)$; $P(-5)$

36. $P(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 4x + 1$; $P(6)$; $P(-3)$

37. $P(x) = 4x^4 - x^3 + 2x - 1$; $P(3)$; $P(-4)$

38. $P(x) = 3x^5 - 2x^3 - x^2 - 10$; $P(5)$; $P(-2)$

39. Encuentre los valores de k tales que $x + 2$ sea un factor de $3x^3 + 5x^2 + kx - 10$.

40. Encuentre los valores de k tales que $x - 5$ sea un factor de $kx^3 - 17x^2 - 4kx + 5$.

41. Determine los valores de k tales que $x - 4$ sea un factor de $x^3 - k^2x^2 - 8kx - 16$.

42. Encuentre los valores de k tales que $x + 1$ sea un factor de $5x^3 + k^2x^2 + 2kx - 3$.

43. (a) ¿Es $x - 3$ un factor de $x^{50} - 3^{50}$?
(b) ¿Es $x - 3$ un factor de $x^{50} + 3^{50}$?
(c) ¿Es $x + 3$ un factor de $x^{49} - 3^{49}$?
(d) ¿Es $x + 3$ un factor de $x^{49} + 3^{49}$?

44. (a) ¿Es $x + 3$ un factor de $x^{50} - 3^{50}$?
(b) ¿Es $x + 3$ un factor de $x^{50} + 3^{50}$?
(c) ¿Es $x - 3$ un factor de $x^{49} - 3^{49}$?
(d) ¿Es $x - 3$ un factor de $x^{49} + 3^{49}$?

45. (a) Determine los valores de n para los cuales $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$, y explique su razonamiento.
(b) Encuentre los valores de n para los cuales $x + y$ es un factor de $x^n - y^n$, y explique su razonamiento.

46. (a) Determine los valores de n para los cuales $x + y$ es un factor de $x^n + y^n$, y explique su razonamiento.
(b) Explique por qué $x - y$ no es un factor de $x^n + y^n$ para cualquier valor entero de n.

5.3 CEROS RACIONALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

OBJETIVOS

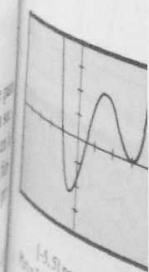
1. **Dados los ceros de una función racional, todos excepto dos, determinar los dos faltantes.**
2. **Aprender el teorema de ceros racionales.**
3. **Aplicar el teorema de ceros racionales para determinar los ceros de una función polinomial.**
4. **Aplicar el teorema de ceros racionales para determinar las raíces de una ecuación polinomial.**
5. **Probar que una ecuación polinomial particular no posee raíces racionales.**

El teorema del factor y la sustitución sintética pueden emplearse para determinar los ceros racionales de funciones polinomiales. En esta sección, aprenderá cómo hacerlo. Empleará dos teoremas, probados en la sección siguiente, en los cuales se tratan los ceros complejos de funciones polinomiales (incluyendo números reales e imaginarios). El primero de estos teoremas establece que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad n \geq 1, a_n \neq 0$$

y si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son ceros complejos de P, entonces

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$$



[-5, 5] por [-20, 20]
$P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x$
FIGURA 5.23

Si en esta ecuación un factor $x - r_i$ aparece k veces, entonces r_i se llama **cero de multiplicidad k.** Si un cero de multiplicidad k se considera como k ceros, entonces se deduce de (1) que una función polinomial P, para la cual $P(x)$ es de grado $n \geq 1$, tiene *por lo menos n ceros,* algunos de los cuales pueden estar repetidos. El segundo teorema establece que uno de estos polinomios tiene *exactamente n ceros.*

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La función P definida como

$$P(x) = (x - 4)^3(x + 1)^2(x - 3)$$

es de grado 6, por lo que P tiene seis ceros; éstos son 4, 4, 4, −1, −1 y 3. El número 4 es un cero de multiplicidad 3, y −1 es un cero de multiplicidad 2. ◄

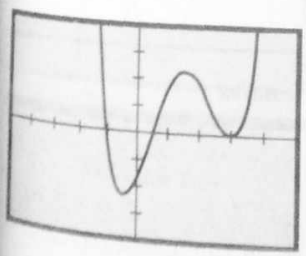
Para cada teorema relativo a los ceros de una función polinomial, se tiene un enunciado relacionado con las raíces de una ecuación polinomial. Por ejemplo, del teorema que establece que un polinomio de grado n tiene exactamente n ceros, se tiene el hecho de que una ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n raíces.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La ecuación polinomial correspondiente a la función polinomial del ejemplo ilustrativo 1 es

$$(x - 4)^3(x + 1)^2(x - 3) = 0$$

Ésta es una ecuación de sexto grado, y sus seis raíces son 4, 4, 4, −1, −1 y 3. ◄



[−5, 5] por [−20, 20]
$P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9$
FIGURA 5.23

► EJEMPLO 1 *Demostración de que un número es un cero de multiplicidad 2 de una función polinomial y determinación de los otros ceros*

Sea:

$$P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9$$

Trace la gráfica de P y observe que la gráfica sea tangente al eje x. Entonces pruebe que la abscisa del punto de tangencia es un cero de multiplicidad 2 de P y determine los otros dos ceros.

Solución La Figura 5.23 muestra la gráfica de P. El punto de tangencia aparece donde $x = 3$. Para probar que 3 es un cero de multiplicidad 2 de P, se comienza por la división sintética de $P(x)$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -11 & 11 & 15 & -9 \\ & & 6 & -15 & -12 & 9 \\ \hline & 2 & -5 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

De aquí,

$$2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9 = (x - 3)(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3) \quad (2)$$

Ahora se dividirá $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ & & 6 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Por tanto,

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(2x^2 + x - 1) \quad (3)$$

Al sustituir (3) en (2), se obtiene

$$2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9 = (x - 3)^2(2x^2 + x - 1)$$

El factor cuadrático puede factorizarse en dos factores lineales, así se tiene

$$2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9 = (x - 3)^2(2x - 1)(x + 1)$$

Como $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$, entonces

$$2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9 = 2(x - 3)^2(x - \tfrac{1}{2})(x + 1)$$

De esto, se deduce que los ceros de P son 3, 3, $\frac{1}{2}$ y -1. En la Figura 5.23 observe que -1 y $\frac{1}{2}$ son intercepciones x de la gráfica, lo cual concuerda con el hecho de que estos números son ceros de P. ◀

Si los coeficientes de la ecuación que determina $P(x)$ son enteros, entonces los ceros racionales de P pueden encontrarse mediante el teorema siguiente.

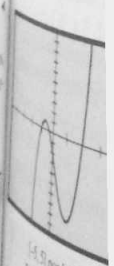
TEOREMA 1 *Teorema de ceros racionales*

Suponga que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros. Si $\frac{p}{q}$, en su mínima expresión, es un número racional y un cero de P, entonces p es un factor entero de a_0 y q es un factor entero de a_n.

La demostración del teorema de ceros racionales se hará al final de esta sección. Observe que este teorema no garantiza que una



[-5, 5] por [-10, 10]
$P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 7x - 2$
FIGURA 5.24

ción polinomial con coeficientes enteros tiene un cero racional. Sin embargo, el teorema proporciona el procedimiento siguiente para encontrar algunos ceros racionales.

Determinación de ceros racionales de una función polinomial P

1. Aplique el teorema de ceros racionales para localizar los posibles ceros racionales.
2. Trace la gráfica de P y mediante la observación de las intersecciones de la gráfica y el eje x, determine cuáles de los números del paso 1 son posibles candidatos para ser ceros racionales.
3. Si x_1 es un candidato, calcule $P(x_1)$ y si $P(x_1) = 0$, se tendrá un cero racional.
4. Aplique la división sintética para encontrar $Q(x)$, cuando $P(x)$ se divide entre $x - x_1$, así $P(x) = (x - x_1)Q(x)$.
5. Continúe el procedimiento en los pasos 3 y 4 con $Q(x)$.
6. Si se obtiene un factor cuadrático, iguale a cero este factor y resuelva la ecuación cuadrática.

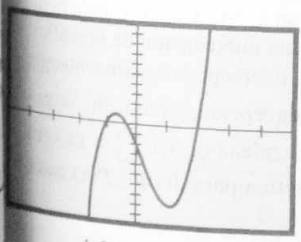
▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Aplique los pasos arriba mencionados cuando P se define por

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$$

Del teorema de ceros racionales, se sabe que cualquier cero racional $\frac{p}{q}$ de P debe ser tal que p es un factor entero de -2 y q es un factor entero de 3. Por tanto, los posibles valores de p son $1, -1, 2$ y -2; y los posibles valores de q son $1, -1, 3$ y -3. De esto, el conjunto de posibles ceros racionales de P es

$$\{1, -1, 2, -2, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\}$$



[−5, 5] por [−10, 10]
$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$
FIGURA 5.24

La gráfica de P se muestra en la Figura 5.24. Al comparar las intercepciones de la gráfica con los posibles ceros racionales, sospechamos que -1 y 2 pueden ser ceros. Si calculamos $P(-1)$ obtenemos 0, lo que verifica que -1 es en verdad un cero. Ahora apliquemos la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -2 & -7 & -2 \\ & & -3 & 5 & 2 \\ \hline & 3 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto,

$$P(x) = (x + 1)(3x^2 - 5x - 2)$$

Los otros dos ceros de P se determinan igualando a cero el factor cuadrático y resolviendo la ecuación.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(3x + 1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \qquad 3x + 1 = 0$$
$$x = 2 \qquad x = -\tfrac{1}{3}$$

Así, los tres ceros de P son -1, 2 y $-\frac{1}{3}$.

Observe que la factorización de $P(x)$ es

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(3x + 1)$$

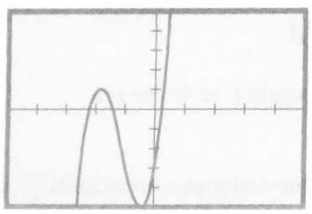
▸ EJEMPLO 2 *Aplicación del teorema de ceros racionales para determinar los ceros de una función polinomial*

Sea $P(x) = 4x^3 + 14x^2 + 10x - 3$. Determine los ceros racionales de P y si es posible, encuentre los ceros irracionales o imaginarios.

Solución Del teorema de ceros racionales, cualquier cero racional $\frac{p}{q}$ de P debe ser tal que p es un factor entero de -3 y q es un factor entero de 4. De esto, los valores posibles de p son $1, -1, 3$ y -3; y los valores posibles de q son $1, -1, 2, -2, 4$ y -4. Por tanto, el conjunto de ceros racionales posibles de P es

$$\{1, -1, 3, -3, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{4}\}$$

La gráfica de P, trazada en la graficadora, se muestra en la Figura 5.25. Los únicos ceros enteros posibles son $1, -1, 3$ y -3, y de la Figura 5.25, y ninguno de estos números es una intercepción de la gráfica. Además, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ no son, evidentemente, intercepciones. Sin embargo, la figura indica que $-\frac{3}{2}$ es una posible intercepción, y por tanto, un posible cero de P. Si calculamos $P(-\frac{3}{2})$ se obtiene 0. Así, $-\frac{3}{2}$ es un cero de P. Ahora se emplea la división sintética para dividir $P(x)$ entre $x + \frac{3}{2}$.



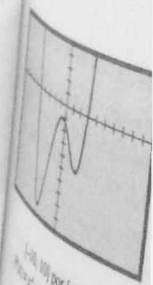
[−5, 5] por [−5, 5]
$P(x) = 4x^3 + 14x^2 + 10x - 3$
FIGURA 5.25

$$\begin{array}{r|cccc} -\frac{3}{2} & 4 & 14 & 10 & -3 \\ & & -6 & -12 & 3 \\ \hline & 4 & 8 & -2 & 0 \end{array}$$

De esto,

$$P(x) = (x + \tfrac{3}{2})(4x^2 + 8x - 2)$$
$$= 2(x + \tfrac{3}{2})(2x^2 + 4x - 1)$$

Los otros dos ceros se determinan igualando a cero el factor cuadrático y resolviendo la ecuación.



[−100, 100] por [−100, 50]
$P(x) = 4x^3 + 14x^2 - 12x^2 - 13x - 15$
FIGURA 5.26

$$2x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

Por tanto, los tres ceros de P son $-\frac{3}{2}$, $\frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$ y $\frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$. ◀

Se tiene un caso especial del teorema de ceros racionales cuando a_n, el coeficiente de x^n, es 1. Entonces

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son enteros. Para uno de estos polinomios, cualquier cero racional de P debe ser un entero, además, debe ser un factor entero de a_0. Lo cual es consecuencia del hecho de que si $\frac{p}{q}$ es un cero racional de P, entonces p debe ser un factor de a_0 y q un factor de 1, el coeficiente de x^n.

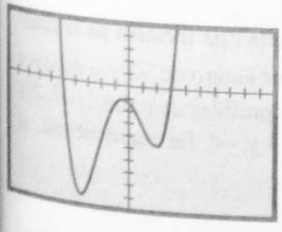
▶ EJEMPLO 3 *Aplicación del teorema de ceros racionales para determinar los ceros de una función polinomial*

Sea

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$$

Determine los ceros racionales de P, y si es posible, encuentre los ceros irracionales o imaginarios.

Solución Los ceros racionales posibles son factores enteros de -15. Estos números son $1, -1, 3, -3, 5, -5, 15$ y -15. Se traza la gráfica de P, la cual se muestra en la Figura 5.26. De la gráfica, los únicos ceros racionales posibles son -5 y 3. Si calculamos $P(-5)$ y $P(3)$ en cada caso se obtiene 0. Por tanto, -5 y 3 son ceros racionales de P. Ahora, emplee la división sintética para dividir $P(x)$ entre $x + 5$, después divida el cociente entre $x - 3$.



[−10, 10] por [−100, 50]
$P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
FIGURA 5.26

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 3 & -12 & -13 & -15 \\ & & -5 & 10 & 10 & 15 \\ \hline 3 & 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ & & 3 & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Por tanto,

$$P(x) = (x + 5)(x - 3)(x^2 + x + 1)$$

Si se iguala a cero el factor cuadrático y se resuelve la ecuación, se obtiene

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, los ceros de P son -5, 3 y $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

Se puede aplicar el teorema de ceros racionales en la determinación de las raíces racionales de una ecuación polinomial, si la ecuación es equivalente a una en la cual los coeficientes sean enteros. Si todas las raíces, excepto dos de una de estas ecuaciones polinomiales, son racionales, entonces pueden determinarse las dos faltantes como irracionales o imaginarias, mediante la fórmula cuadrática como se mostró en los ejemplos 2 y 3.

▸ EJEMPLO 4 *Aplicación del teorema de ceros racionales para determinar las raíces de una ecuación polinomial*

Determine las raíces racionales de la ecuación

$$x^3 + \frac{15}{4}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

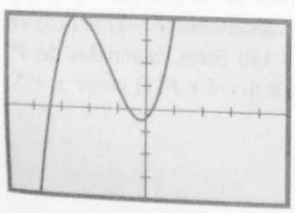
Si es posible, encuentre las raíces irracionales o imaginarias.

Solución Para aplicar el teorema de ceros racionales los coeficientes deben ser enteros. Por ello, primero se multiplica cada miembro de la ecuación dada por 4. Así, se obtiene la ecuación equivalente

$$4x^3 + 15x^2 + 4x - 2 = 0$$

Sea $P(x) = 4x^3 + 15x^2 + 4x - 2$. Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de la ecuación $P(x) = 0$, entonces p debe ser un factor entero de -2 y q debe ser un factor entero de 4. Por tanto, los valores posibles de p son $1, -1, 2, -2$; en tanto que los de q son $1, -1, 2, -2, 4$ y -4. En consecuencia, el conjunto de raíces racionales posibles es

$$\{1, -1, 2, -2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}\}$$



[−5, 5] por [−20, 20]
$P(x) = 4x^3 + 15x^2 + 4x - 2$
FIGURA 5.27

La Figura 5.27 muestra la gráfica de P tal como aparece en la graficadora. En esta figura se observa que no hay intercepciones x enteras de la gráfica. Esto elimina a $1, -1, 2$ y -2 como posibles raíces. La gráfi

ca indica que $\frac{1}{4}$ es una raíz racional posible. Si se calcula $P(\frac{1}{4})$ mediante sustitución sintética se obtiene

$$\begin{array}{r|cccc} \frac{1}{4} & 4 & 15 & 4 & -2 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ \hline & 4 & 16 & 8 & 0 \end{array}$$

Como $P(\frac{1}{4}) = 0$, entonces $\frac{1}{4}$ es una raíz. Además,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \tfrac{1}{4})(4x^2 + 16x + 8) \\ &= 4(x - \tfrac{1}{4})(x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

Las otras raíces se obtienen igualando a cero el factor cuadrático y resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 2 &= 0 \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} \\ &= -2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación son $\frac{1}{4}$, $-2 + \sqrt{2}$ y $-2 - \sqrt{2}$. ◀

▶ EJEMPLO 5 *Demostración de que una ecuación polinomial particular no tiene raíces racionales*

Pruebe que la ecuación

$$2x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

no tiene raíces racionales.

Solución Sea $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$. Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional de la ecuación $P(x) = 0$, entonces p debe ser un factor entero de 1 y q debe serlo de 2. Por tanto, los valores posibles de p son 1 y -1; en tanto que los de q son 1, -1, 2 y -2. En consecuencia, el conjunto de raíces racionales posibles de la ecuación es $\{1, -1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$. Se prueba cada una de estas raíces posibles mediante sustitución sintética, obteniéndose

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & 2 & 0 & -4 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} -1 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & -2 & 4 & 0 \\ \hline & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} \frac{1}{2} & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & 1 & -\frac{1}{2} & \\ \hline & 2 & -1 & \text{deténgase} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} -\frac{1}{2} & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & -1 & \frac{3}{2} & \\ \hline & 2 & -3 & \text{deténgase} & \end{array}$$

La palabra "deténgase" está indicada porque una vez que aparece una fracción en el segundo renglón, cada número siguiente de la última fila

también será una fracción. Debido a esto, el último número de la fila inferior no puede ser cero.

Como $P(1)$, $P(-1)$, $P(\frac{1}{2})$ y $P(-\frac{1}{2})$ son diferentes de cero, la ecuación no tiene raíces racionales.

Ahora se demostrará el teorema de ceros racionales, su importancia ha sido evidenciada mediante los cuatro ejemplos anteriores.

Demostración del teorema de ceros racionales Como $\frac{p}{q}$ es un cero de P, entonces es una solución de la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Por tanto,

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Si multiplica cada miembro de esta ecuación por q^n, obtendrá

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (4)$$

Al sumar $-a_0 q^n$ en cada lado y factorizar p de cada término del miembro izquierdo, se obtiene la ecuación equivalente

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Como a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, p y q son enteros, y la suma y producto de enteros son enteros, entonces la expresión dentro del paréntesis del lado izquierdo es un entero. Si se representa este entero por t, se tendrá la ecuación

$$pt = -a_0 q^n$$

El miembro izquierdo de esta ecuación es un entero que tiene a p como factor. En consecuencia, p debe ser un factor del lado derecho, $-a_0 q^n$. Debido a que $\frac{p}{q}$ está en su mínima expresión, p y q no tienen factores comunes. De ello, p debe ser un factor de a_0.

La Ecuación (4) también es equivalente a la ecuación

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$$

El miembro izquierdo de esta ecuación es un entero que tiene a q como factor; de esto, q debe ser un factor del miembro derecho, $-a_n p^n$. Como q no tiene factores comunes con p, se deduce que q es un factor de a_n.

EJERCICIOS 5.3

En los ejercicios 1 a 8, encuentre los ceros de la función polinomial. Indique la multiplicidad de cada cero.

1. $P(x) = (x - 4)^2(x^2 - 4)$
2. $P(x) = x^3(x^2 - 5)$
3. $P(x) = x^2(x + 1)^2(x^2 - 3)$
4. $P(x) = (x^2 - 25)^2$

5. $P(x) = (x + 7)^3(x^2 - 7)^2$

6. $P(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 4)(2x + 1)$

7. $P(x) = (3x + 4)^3(4x^2 - 9)^2(4x^2 + 12x + 9)$

8. $P(x) = (x^2 - 9)^2(5x^2 - 17x + 6)^2$

9. Muestre que -2 y 3 son ceros de la función polinomial definida por

$$P(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$$

y determine los otros dos ceros.

10. Demuestre que 5 y -1 son ceros de la función polinomial definida por

$$P(x) = x^4 + x^3 - 31x^2 - x + 30$$

y determine los otros dos ceros.

11. Muestre que -4 es un cero de multiplicidad 2 de la función polinomial definida por

$$P(x) = x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 8x - 16$$

y determine los otros dos ceros.

12. Demuestre que 3 es un cero de multiplicidad 2 de la función polinomial definida por

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 39x - 18$$

y determine los otros dos ceros.

13. Dado que -2 es una raíz de la ecuación

$$5x^3 + 3x^2 - 12x + 4 = 0$$

determine las otras dos raíces.

14. Dado que $\frac{4}{3}$ es una raíz de la ecuación

$$3x^3 - 16x^2 + 28x - 16 = 0$$

determine las otras dos raíces.

15. Dado que $\frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{3}$ son raíces de la ecuación

$$6x^4 + 25x^3 + 8x^2 - 7x - 2 = 0$$

determine las otras dos raíces.

16. Dado que $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ son raíces de la ecuación

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x + 6 = 0$$

determine las otras dos raíces.

En los ejercicios 17 a 28, determine todos los ceros racionales de la función polinomial. Si es posible, encuentre los ceros irracionales o imaginarios.

17. $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

18. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

19. $P(x) = x^3 - 7x - 6$

20. $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

21. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

22. $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 7x - 30$

23. $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 1$

24. $P(x) = 4x^3 - 31x + 15$

25. $P(x) = 6x^4 - 37x^3 + 63x^2 - 33x + 5$

26. $P(x) = 8x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x + 3$

27. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 20x - 4$

28. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 3$

En los ejercicios 29 a 40, determine todas las raíces racionales de la ecuación. Si es posible encuentre las raíces irracionales o imaginarias.

29. $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$

30. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

31. $2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0$

32. $x^3 - 8x - 8 = 0$

33. $x^5 + 2x^4 - 13x^3 - 14x^2 + 24x = 0$

34. $9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x - 2 = 0$

35. $12x^4 - 5x^3 - 38x^2 + 15x + 6 = 0$

36. $2x^3 - \frac{25}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3 = 0$

37. $x^3 + \frac{17}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2 = 0$

38. $3x^4 + x^3 + 12x^2 - 5x - 3 = 0$

39. $\frac{1}{14}x^4 + \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

40. $18x^6 + 3x^5 - 25x^4 - 41x^3 - 15x^2 = 0$

En los ejercicios 41 a 44, pruebe que las ecuaciones no tienen raíces racionales.

41. $x^3 - 9x - 6 = 0$

42. $2x^3 + 6x^2 - 3 = 0$

43. $3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

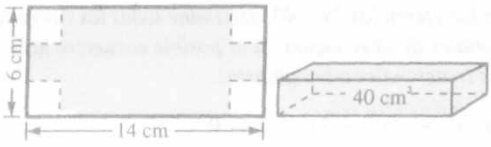
44. $x^4 - x^3 - 4x^2 - 16 = 0$

En los ejercicios 45 a 49, resuelva el problema mediante el empleo de una ecuación como modelo matemático de la situación, y escriba una conclusión.

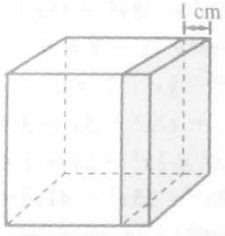
45. Se elaborará una caja rectangular a partir de una pieza de hojalata que mide 12 pulg de lado, cortando pequeños cuadrados de la misma medida en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. Si el volumen de la caja debe ser de 108 pulg^3, ¿cuál será la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán? Existen dos posibles respuestas, una

racional y otra irracional. Exprese la respuesta irracional con una aproximación de centésimos de pulgada.

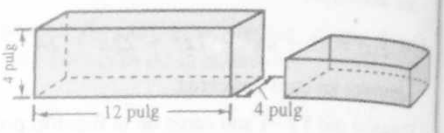
46. Se construirá una caja rectangular a partir de una pieza de cartón de 6 cm de ancho y 14 cm de largo, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. Si el volumen de la caja debe ser de 40 cm^3, ¿cuál será la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán? Existen dos posibles respuestas, una racional y la otra irracional. Exprese la respuesta irracional con una aproximación de centésimos de pulgada.



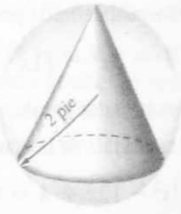
47. En un cubo se corta una rebanada de 1 cm de espesor. Si el volumen de la figura que queda es de 180 cm^3, ¿cuál es la longitud del lado del cubo original?



48. Las dimensiones de una caja rectangular son 12 pulg, 4 pulg y 4 pulg. Si las primeras dos dimensiones se disminuyen y la otra se aumenta en la misma cantidad, se forma una segunda caja cuyo volumen es cinco octavos de la primera. Determine el volumen de la segunda caja.



49. Un cono circular recto se inscribe en una esfera y 32 veces su volumen es igual a 9 veces el volumen de la esfera. Si el radio de la esfera es de 2 pie, determine la altura del cono. Existen dos respuestas posibles, una racional y la otra irracional. Exprese la respuesta irracional con una aproximación de centésimos de pie. La fórmula para el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, y la fórmula para el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



50. Explique por qué el número de veces que la gráfica de un polinomio cúbico cruza al eje x debe ser 1 o 3, y por qué no puede ser 2.

5.4 CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES POLINOMIALES

OBJETIVOS

1. **Encontrar un polinomio con coeficientes enteros que tenga números complejos como ceros.**
2. **Encontrar los otros ceros de una función polinomial que tenga un número complejo dado como un cero.**
3. **Aprender la regla de los signos de Descartes.**
4. **Determinar la naturaleza de los ceros de una función polinomial.**
5. **Probar que ciertos números son irracionales.**

En este capítulo, nuestro principal interés ha sido determinar los ceros reales de polinomios con coeficientes reales. Ahora extenderemos nuestra discusión para incluir números complejos. Trataremos con ceros complejos, así como con funciones polinomiales con coeficientes complejos. Estas funciones surgen en cursos avanzados y tienen aplicaciones en varios campos, especialmente en ingeniería y física.

En las secciones anteriores se estudió cómo determinar los ceros de funciones lineales y cuadráticas. También se vio cómo aproximar ceros reales de una función polinomial a partir de su gráfica. Además, en la Sección 5.3 se estudiaron métodos para obtener valores exactos de ceros racionales de una función polinomial. De esto, podemos hacernos la pregunta siguiente: ¿podemos determinar los valores exactos de todos los ceros complejos de cualquier función polinomial?

Para polinomios cúbicos y cuárticos (de cuarto grado), esta pregunta fue contestada en el siglo XVI. En el libro *Ars Magna* (*Gran Arte*) publicado en 1545, el matemático italiano **Girolamo Cardano** (1501-1576) presentó métodos para encontrar los valores exactos de los tres ceros complejos de los polinomios cúbicos y los cuatro ceros complejos de los polinomios cuárticos. Dichos métodos son complicados y no se discutirán en este texto. Para ceros de polinomios de quinto grado o mayor, no existe fórmula general en términos de un número finito de operaciones sobre los coeficientes. Este hecho fue probado, en 1799, de manera independiente por el matemático italiano **Paolo Ruffini** (1767-1822) y en 1824 por el matemático noruego **Niels Henrik Abel** (1802-1829). Sin embargo, existe un teorema llamado *teorema fundamental del álgebra*, el cual garantiza que toda función polinomial de grado mayor que cero tiene por lo menos un cero complejo.

TEOREMA *Teorema fundamental del álgebra*

Toda función polinomial de grado mayor que cero, con coeficientes complejos, tiene por lo menos un cero complejo.

Existen muchas pruebas de este teorema, pero todas emplean conceptos más allá del nivel de este libro. La primera prueba de este teorema fue proporcionada en 1799 por el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) en su tesis doctoral.

El teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor se emplean para probar el teorema siguiente. Recuerde que aplicamos este último teorema en la Sección 5.3.

TEOREMA 1

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos definido como

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $n \geq 1$, entonces

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \qquad a_n \neq 0 \quad (1)$$

donde cada r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es un cero complejo de P.

Demostración Del teorema fundamental del álgebra, la función P tiene por lo menos un cero complejo r_1. Esto es, existe un número complejo r_1 tal que $P(r_1) = 0$. En consecuencia, por medio del teorema del factor, $x - r_1$ es un factor de $P(x)$. Así,

$$P(x) = (x - r_1)Q_1(x) \quad (2)$$

donde $Q_1(x)$ es el cociente que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $x - r_1$. $Q_1(x)$ es de grado $n - 1$. Del teorema fundamental del álgebra, si $n - 1 \geq 1$, entonces existe un número complejo r_2 tal que $Q_1(r_2) = 0$. Entonces, por el teorema del factor,

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x) \quad (3)$$

donde $Q_2(x)$ es el cociente que se obtiene cuando $Q_1(x)$ se divide entre $x - r_2$. Si se sustituye (3) en (2) se obtiene

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$$

Como $Q_1(r_2) = 0$, de (2) se deduce que $P(r_2) = 0$, y de aquí que r_2 es un cero complejo de P. Si se repite este procedimiento hasta que la factorización haya sido efectuada n veces, entonces se tiene

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)Q_n(x)$$

donde cada r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es un cero complejo de P. Como existen n factores de la forma $x - r_i$, entonces el polinomio $Q_n(x)$ debe ser una constante, la cual es el coeficiente de x^n en la expansión de $P(x)$. Así $Q_n(x) = a_n$, y por tanto

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

donde cada r_i es un cero complejo de P. ∎

En la Sección 5.3, se dijo que si en la Ecuación (1) un factor $x - r_i$ ocurre exactamente k veces, entonces r_i es denominado cero de multiplicidad k. Si uno de estos ceros es contado como k ceros, entonces del Teorema 1 se deduce que una función polinomial P, para la cual $P(x)$

es de grado $n \geq 1$, tiene *por lo menos n ceros*, algunos de los cuales pueden ser repetidos. Sin embargo, puede probarse que una de estas funciones polinomiales tiene *exactamente n ceros*, y este hecho se establece en el teorema siguiente, el cual también se aplicó en la Sección 5.3.

TEOREMA 2

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos, entonces P tiene exactamente n ceros complejos.

Demostración Por el Teorema 1, P tiene por lo menos n ceros complejos. Si demostramos que P no puede tener más que n ceros, el teorema estará probado.

La Ecuación (1) es

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \qquad a_n \neq 0$$

donde cada r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es un cero complejo de P. Sea r otro número distinto de $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Como la Ecuación (1) es una identidad,

$$P(r) = a_n(r - r_1)(r - r_2) \cdot \ldots \cdot (r - r_n) \qquad a_n \neq 0$$

Debido a que $r \neq r_i$, ninguno de los factores $r - r_i$ es cero; por tanto, el miembro derecho de esta ecuación es diferente de cero. Así, $P(r) \neq 0$, y en consecuencia, r no es un cero de P. Por tanto, P tiene exactamente n ceros complejos. ■

La función polinomial con coeficientes reales, del ejemplo 3 de la Sección 5.3, tiene dos ceros $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ y $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ que son conjugados uno del otro. Además, de la fórmula cuadrática, se deduce que si una función cuadrática con coeficientes reales tiene un cero complejo, entonces el otro cero es su conjugado. Estas dos situaciones son casos especiales del teorema siguiente, el cual se presenta sin demostración. En el enunciado del teorema la notación $\bar{z}$ se emplea para denotar el conjugado del número complejo z; esto es,

$$\text{si } z = a + bi \qquad \text{entonces} \qquad \bar{z} = a - bi$$

TEOREMA 3

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y si z es cero complejo de P, entonces el conjugado $\bar{z}$ también es un cero de P.

▸ EJEMPLO 1 *Aplicación del Teorema 3*

Encuentre un polinomio $P(x)$ de cuarto grado con coeficientes reales cuyos ceros incluyen a P tiene a $1 - i$ y $-2i$ como ceros.

Solución Del Teorema 3, si $1 - i$ y $-2i$ son ceros de P, entonces los conjugados $1 + i$ y $2i$ también son ceros de P. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= [x - (1 - i)][x - (1 + i)][x - (-2i)][x - 2i] \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) \\ &= x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 \end{aligned}$$

En la Sección 5.2, se estableció el teorema del factor cuando el número r es un número real y el polinomio $P(x)$ tiene coeficientes reales. Cuando r es complejo y $P(x)$ tiene coeficientes complejos, el teorema del factor también es válido.

▸ EJEMPLO 2 *Determinar los otros ceros de una función polinomial conociendo uno de sus ceros complejos*

Puesto que i es un cero de la función polinomial definida por

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 1$$

determine los otros ceros.

Solución Como i es un cero de la función dada, su conjugado $-i$ también es un cero de P. Se utiliza la división sintética para dividir $P(x)$ entre $x - i$; y después se divide el cociente entre $x - (-i)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} i & 2 & -5 & 3 & -5 & 1 \\ & & 2i & -2 - 5i & 5 + i & -1 \\ \hline -i & 2 & -5 + 2i & 1 - 5i & i & 0 \\ & & -2i & 5i & -i & \\ \hline & 2 & -5 & 1 & 0 & \end{array}$$

Así, por el teorema del factor, se puede escribir $P(x)$ como

$$P(x) = (x - i)(x + i)(2x^2 - 5x + 1)$$

Al igualar a cero el factor cuadrático, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{4} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

Así, los ceros de P son i, $-i$, $\frac{1}{4}(5 + \sqrt{17})$ y $\frac{1}{4}(5 - \sqrt{17})$.

Ahora se presentarán dos teoremas que son consecuencias del Teorema 3.

TEOREMA 4

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y el grado de P es un número impar, entonces P tiene por lo menos un cero real.

Demostración Suponga que P no tiene ceros reales. Como el grado de P es un número impar, entonces él tiene un número impar de ceros imaginarios. Sin embargo, el número de ceros imaginarios de P debe ser par porque mediante el Teorema 3, para cada cero imaginarios su conjugado debe ser también un cero. Por tanto, tenemos una contradicción. De este modo, la suposición de que P no tiene ceros reales es falsa. En consecuencia, P tiene por lo menos un cero real. ■

TEOREMA 5

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, entonces $P(x)$ puede expresarse como un producto de polinomios lineales o cuadráticos con coeficientes reales.

Demostración Si $P(x)$ es de grado n, entonces por el Teorema 2, P tiene exactamente n ceros complejos. Denotemos estos ceros por c_1, $c_2, \ldots, c_n$. Así,

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n)$$

Para cada c_i que sea un número real, $x - c_i$ es factor lineal de $P(x)$. Supongamos que z_i es un cero imaginario de P. Entonces por el Teorema 3, $\bar{z}_i$ es también un cero de P y es uno de los ceros complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Por tanto, $x - z_i$ y $x - \bar{z}_i$ son factores de $P(x)$, y

$$(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 - (z_i + \bar{z}_i)x + z_i \cdot \bar{z}_i$$

Sea $z_i = a + bi$ y $\bar{z}_i = a - bi$, entonces

$$z_i + \bar{z}_i = (a + bi) + (a - bi) \qquad z_i \cdot \bar{z}_i = (a + bi)(a - bi)$$
$$= 2a \qquad = a^2 - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Así,

$$(x - z_i)(x - \overline{z}_i) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

Como $-2a$ y $a^2 + b^2$ son números reales, entonces $(x - z_i)(x - \overline{z}_i)$ es un polinomio cuadrático con coeficientes reales.

Por tanto, se concluye que $P(x)$ puede expresarse como un producto de polinomios lineales o cuadráticos con coeficientes reales. ∎

$\iint \frac{dy}{dx}$

El Teorema 5 se aplica en Cálculo cuando las fracciones parciales, discutidas en la Sección 12.3, se emplean como una técnica de Cálculo. Los dos ejemplos ilustrativos siguientes verifican el teorema para dos polinomios particulares.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La función P del ejemplo 3 de la Sección 5.3 está definida por

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$$

En la solución de ese ejemplo se mostró que

$$P(x) = (x + 5)(x - 3)(x^2 + x + 1)$$

el cual es un producto de polinomios lineales y cuadráticos. ◂

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Para la función P del ejemplo 2

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - i)(x + i)(2x^2 - 5x + 1) \\ &= (x^2 + 1)(2x^2 - 5x + 1) \end{aligned}$$

el cual es un producto de dos polinomios cuadráticos. ◂

Del Teorema 3, los ceros imaginarios de una función polinomial con coeficientes reales deben presentarse en pares. Esto significa que una función polinomial debe tener siempre un número par de ceros imaginarios. Este hecho nos ayuda a determinar la naturaleza de los ceros de una función polinomial.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

En el ejemplo 5 de la Sección 5.3 se mostró que la ecuación

$$2x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

no posee raíces racionales o, equivalentemente, que la función $P(x)$ definida por

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$$

no tiene ceros racionales. Debido a que P es de tercer grado, lo cual se sabe por el Teorema 2, que P tiene exactamente tres ceros complejos. Por tanto, estos ceros deben ser irracionales o imaginarios. Como el número de ceros imaginarios debe ser par, entonces P tiene tres ceros reales, los cuales son irracionales, o dos ceros imaginarios y un cero real irracional. ◀

En la discusión que sigue se necesitará el concepto de *variación de signo* de un polinomio. Si los términos de un polinomio con coeficientes reales se escribe como potencias decrecientes de la variable (los términos que tienen coeficiente cero se omiten), entonces una **variación de signo** ocurre si dos coeficientes sucesivos tienen signos opuestos.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Si

$$Q(x) = x^4 - 6x^2 - 2x - 1$$

entonces los coeficientes tienen, sucesivamente, los signos $+, -, -, -$. Así, $Q(x)$ tiene una variación de signo. Además,

$$Q(-x) = x^4 - 6x^2 + 2x - 1$$

y $Q(-x)$ tiene tres variaciones de signo.

El polinomio $x^3 + 2x + 5$ no tiene variaciones de signo. ◀

Regla de los signos de Descartes

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, el número de raíces positivas de la ecuación $P(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $P(x)$, o es menor que este número por un número natural par. Además, el número de raíces negativas de la ecuación es igual al número de variaciones de signo de $P(-x)$, o es menor que este número por un número natural par.

El nombre de esta regla es en honor al matemático francés **René Descartes,** creador de la *geometría analítica*. La demostración de la regla de los signos está más allá del alcance de este libro.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

La función P del ejemplo ilustrativo 3 tiene dos variaciones de signo. Por tanto, por la regla de los signos de Descartes, P tiene dos o ningún cero positivo. Además,

$$P(-x) = -2x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$

y $P(-x)$ tiene una variación de signo. En consecuencia, P tiene un cero negativo.

Ahora se pueden describir completamente los tres ceros de P. De la conclusión del ejemplo ilustrativo 3 y de lo que se ha mostrado, dos de los ceros son números irracionales positivos y uno es un número irracional negativo, de lo contrario, dos son números imaginarios y uno es un número irracional negativo.

El teorema siguiente proporciona más información acerca de los ceros reales de una función polinomial.

TEOREMA 6

Suponga que $P(x)$ es un polinomio y que a y b son números reales tales que $a < b$. Si $P(a)$ y $P(b)$ son de signos opuestos entonces existe un número real c entre a y b tal que $P(c) = 0$.

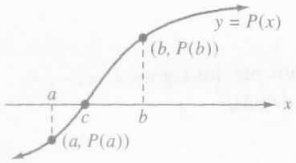


FIGURA 5.28

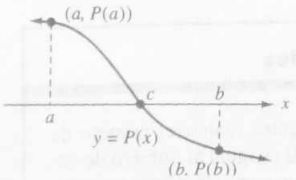


FIGURA 5.29

La demostración del Teorema 6 se omite. Sin embargo, como la gráfica de una función polinomial es una curva ininterrumpida, el argumento siguiente hará aceptable la validez del teorema: Si $P(a)$ y $P(b)$ son de signo opuesto, entonces los puntos $(a, P(a))$ y $(b, P(b))$ están en lados contrarios del eje x; así, la gráfica de $y = P(x)$ debe cortar al eje x en al menos un punto $(c, 0)$ donde c está entre a y b. Esta situación se muestra en las figuras 5.28 y 5.29. En la Figura 5.28 se presenta una porción de la gráfica de una función polinomial P del punto $(a, P(a))$ al punto $(b, P(b))$ donde $P(a) < 0$ y $P(b) > 0$. La gráfica cruza al eje x en el punto $(c, 0)$, donde $a < c < b$. La Figura 5.29 muestra el caso cuando $P(a) > 0$ y $P(b) < 0$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Para la función P del ejemplo ilustrativo 5 definida por

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$$

se calcula $P(1)$ y $P(2)$ mediante sustitución sintética.

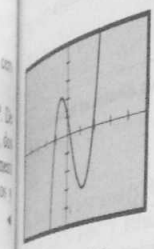


FIGURA 5.30

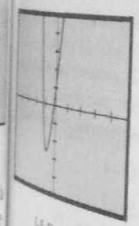


FIGURA 5.31

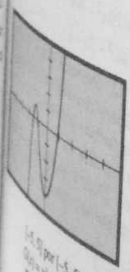


FIGURA 5.32

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & 2 & 0 & -4 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} 2 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & 4 & 4 & 0 \\ \hline & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

Por tanto, $P(1) = -3$ y $P(2) = 1$. Como $P(1)$ y $P(2)$ tienen signo contrario, del Teorema 6 se deduce que existe un número real c entre 1 y 2 tal que $P(c) = 0$. Así, P tiene un cero positivo entre 1 y 2. Con este hecho y la conclusión del ejemplo ilustrativo 5, estamos seguros de que P tiene dos ceros irracionales positivos y un cero irracional negativo.

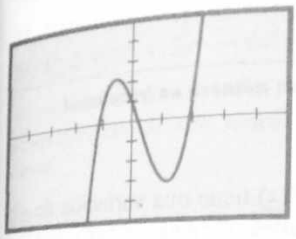
Se puede aplicar el Teorema 6 para determinar números enteros entre los cuales se encuentran los otros dos ceros. Como $P(0) = 1$, deducimos que $P(0)$ y $P(1)$ tienen signos opuestos, y por tanto, P tiene un cero positivo entre 0 y 1. Si calculamos $P(-1)$ y $P(-2)$ mediante sustitución sintética obtenemos

$$\begin{array}{r|cccc} -1 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & -2 & 4 & 0 \\ \hline & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cccc} -2 & 2 & -2 & -4 & 1 \\ & & -4 & 12 & -16 \\ \hline & 2 & -6 & 8 & -15 \end{array}$$

Así, $P(-1)$ y $P(-2)$ tienen signos contrarios, y en consecuencia P tiene un cero negativo entre -2 y -1.

La Figura 5.30 muestra la gráfica trazada en la graficadora. Las intercepciones x verifican nuestras conclusiones acerca de los ceros de P.

◄



[−5, 5] por [−5, 5]
$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$
FIGURA 5.30

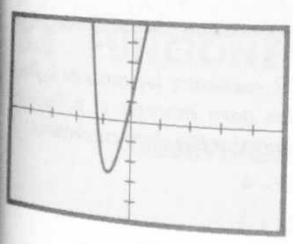
► **EJEMPLO 3** ***Determinación de la naturaleza de los ceros de una función polinomial***

Para cada una de las siguientes funciones, determine toda la información concerniente al número de ceros positivos, negativos e imaginarios. Trace la gráfica de las funciones y verifique la información.

(a) $F(x) = 3x^4 + x^2 + 7x + 1$ **(b)** $G(x) = x^5 + 5x^2 - 4$

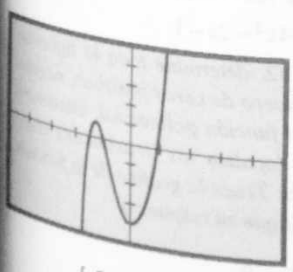
Solución

(a) Como $F(x)$ no tiene variaciones de signo, entonces no tiene ceros positivos. $F(-x) = 3x^4 + x^2 - 7x + 1$. Debido a que $F(-x)$ tiene dos variaciones de signo, F tiene dos o ningún cero negativo. Si se calcula $F(0)$ y $F(-1)$ se obtiene, respectivamente, 1 y −2, opuestos en signo. Por tanto, del Teorema 6, existe un número c entre 0 y −1 tal que $F(c) = 0$. Este número c es un cero negativo de F. Así, F tiene dos ceros negativos y dos imaginarios. La gráfica de F, mostrada en la Figura 5.31, verifica nuestra conclusión.



[−5, 5] por [−5, 5]
$F(x) = 3x^4 + x^2 + 7x + 1$
FIGURA 5.31

(b) $G(x)$ tiene una variación de signo. Por tanto, G tiene un cero positivo. $G(-x) = -x^5 + 5x^2 - 4$ y $G(-x)$ tiene dos variaciones de signo. Como $G(-1) = 0$, entonces -1 es un cero de G. Consecuentemente, G tiene un cero positivo, dos ceros negativos y dos ceros imaginarios. La Figura 5.32 muestra la gráfica de P trazada en la graficadora. Dicha gráfica verifica la conclusión. ◄



[−5, 5] por [−5, 5]
$G(x) = x^5 + 5x^2 - 4$
FIGURA 5.32

Los ceros irracionales de una función polinominal pueden ser aproximados mediante una técnica conocida como *método de Newton*, la cual implica conceptos de Cálculo. Por supuesto, los ceros irracionales también pueden ser aproximados por medio del aumento (zoom *in*), en la graficadora, sobre las intercepciones x de la gráfica de la función.

Concluimos esta sección con un ejemplo que muestra cómo probar que ciertos números son irracionales.

▶ EJEMPLO 4 *Prueba de que un número es irracional*

Pruebe que $\sqrt{3}$ es irracional.

Solución Sea $P(x) = x^2 - 3$. Como $P(x)$ tiene una variación de signo, por la regla de los signos de Descartes, P tiene un cero positivo. Del teorema de ceros racionales, los únicos ceros racionales posibles son 1 y 3. Obviamente ninguno es cero de P. En consecuencia, el cero positivo es un número irracional, y éste es $\sqrt{3}$.

EJERCICIOS 5.4

En los ejercicios 1 a 8, encuentre un polinomio del grado indicado con coeficientes reales para el cual los números son ceros de P.

1. Segundo grado; $4 + 3i$ es un cero de P.
2. Segundo grado; $3 - i$ es un cero de P.
3. Tercer grado; $2 - i\sqrt{5}$ y -4 son ceros de P.
4. Tercer grado; $5 + i\sqrt{3}$ y 2 son ceros de P.
5. Cuarto grado; $-3i$ es un cero de multiplicidad 2 de P.
6. Cuarto grado; $2 + i$ y $1 - i\sqrt{2}$ son ceros de P.
7. Quinto grado; 3, $3 + i\sqrt{2}$ y $-i\sqrt{2}$ son ceros de P.
8. Quinto grado; $3 - i$ (multiplicidad 2) y 1 son ceros de P.

En los ejercicios 9 a 12, determine el conjunto solución de la ecuación si el número es una raíz.

9. $3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 40 = 0$; $2i$ es una raíz.
10. $5x^4 - 2x^3 + 46x^2 - 18x + 9 = 0$; -3 es una raíz.
11. $2x^4 + 6x^3 + 33x^2 - 36x + 20 = 0$; $-2 - 4i$ es una raíz.
12. $3x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 6x + 4 = 0$; $-1 + i\sqrt{3}$ es una raíz.

En los ejercicios 13 a 20, encuentre los ceros de la función polinomial y úselos para expresar el polinomio como un producto de polinomios lineales o cuadráticos.

13. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$
14. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$
15. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 21x^2 + 17x - 13$
16. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3$
17. $P(x) = x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x - 32$
18. $P(x) = 3x^5 - 18x^4 + 38x^3 - 36x^2 + 24x - 16$
19. $P(x) = 9x^4 - 42x^3 + 79x^2 - 40x + 6$
20. $P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 2x - 1$

En los ejercicios 21 a 32, determine toda la información concerniente al número de ceros positivos, negativos o imaginarios de la función polinomial. Encuentre los ceros racionales y localice los irracionales entre dos enteros consecutivos. Trace la gráfica de la función en la graficadora y verifique su respuesta.

21. $F(x) = x^3 - 4x^2 - 2$
22. $G(x) = 5x^3 - 3x - 7$
23. $G(x) = x^4 + 7x^3 + x - 8$
24. $F(x) = 5x^4 - 3x^3 - 2$

25. $H(x) = x^3 - 6x + 3$
26. $H(x) = x^3 + 3x - 20$
27. $F(x) = x^4 + x^2 - 1$
28. $G(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 5$
29. $G(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x - 5$
30. $F(x) = 2x^4 - 14x^3 + 24x^2 + x - 4$
31. $H(x) = 3x^4 - 21x^3 + 36x^2 + 2x - 8$
32. $H(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 8x + 14$

En los ejercicios 33 a 38, pruebe que el número es irracional.

33. $\sqrt{5}$
34. $2\sqrt{7}$
35. $\sqrt[3]{10}$
36. $\sqrt[4]{8}$
37. $2 - \sqrt{5}$
38. $3 + 2\sqrt{3}$

En los ejercicios 39 y 40, determine el número de ceros positivos, negativos e imaginarios de la función, donde n es un entero positivo.

39. (a) $P(x) = x^{2n} - 1$ (b) $Q(x) = x^{2n-1} + 1$
40. (a) $P(x) = x^{2n} + 1$ (b) $Q(x) = x^{2n+1} - 1$

41. Si $P(x)$ tiene únicamente potencias pares de x con coeficientes positivos, explique por qué la función P no tiene ceros positivos ni negativos. *Sugerencia:* Emplee la regla de los signos de Descartes.
42. Si $P(x)$ sólo tiene potencias impares de x con coeficientes positivos, explique por qué la función P no tiene ceros reales excepto el número 0. *Sugerencia:* Emplee la regla de los signos de Descartes.
43. Muestre que $2 - i$ es un cero de la función definida como $F(x) = x^2 - 2x + 1 + 2i$, y que su conjugado no lo es. Explique por qué el Teorema 3 no se contradice.

5.5 FUNCIONES RACIONALES

OBJETIVOS

1. **Definir una asíntota vertical de un gráfica.**
2. **Definir una asíntota horizontal de una gráfica.**
3. **Determinar las asíntotas verticales u horizontales de una gráfica.**
4. **Determinar una asíntota oblicua de una gráfica.**
5. **Dibujar la gráfica de una función racional.**
6. **Resolver problemas que tienen una función racional como modelo matemático.**
7. **Resolver desigualdades racionales gráficamente.**

Iniciaremos el estudio de funciones racionales considerando sus gráficas y continuaremos esta discusión con un problema que tiene una función racional como modelo matemático. Se concluirá esta sección resolviendo desigualdades racionales gráficamente.

Si P y Q son funciones polinomiales y f es la función definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

entonces f es una función racional cuyo dominio es el conjunto de los números reales excepto los ceros de Q. Se supondrá que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes. El conocimiento de cómo se comporta $f(x)$

cuando x se acerca a un cero de Q es de gran ayuda cuando se desea trazar la gráfica de f. Considere, por ejemplo, la función definida por

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

Tabla 1

x	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{31}{10}$	$\frac{301}{100}$	$\frac{3\,001}{1\,000}$
$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$	6	11	16	21	51	501	5 001

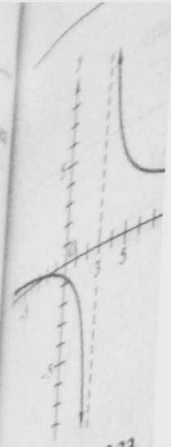


FIGURA 5.33

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto el 3. Se investigarán los valores de la función cuando x se acerca a 3 pero sin llegar a ser 3. Primero se asignan a x los valores 4, $\frac{7}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{31}{10}$, $\frac{301}{100}$, $\frac{3\,001}{1\,000}$, y así sucesivamente. Se han considerado los valores de x cada vez más cercanos a 3 pero mayores que 3; en otras palabras, la variable x se aproxima a 3 por la derecha. Después de calcular los valores correspondientes de $f(x)$ y se forma la Tabla 1. En esta tabla se aprecia intuitivamente que conforme x se aproxima cada vez más a 3 por la derecha, $f(x)$ crece sin límite. Esto es, se puede hacer $f(x)$ mayor que cualquier número positivo preestablecido, considerando a x lo suficientemente cercano a 3 de modo que x sea mayor que 3. Para indicar que $f(x)$ crece sin límite cuando x se aproxima a 3 por la derecha se utiliza la simbología

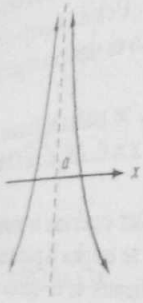


FIGURA 5.34

$$f(x) \to +\infty \qquad \text{conforme } x \to 3^+$$

El símbolo $+\infty$ (infinito positivo) no es un número real; se emplea para indicar el comportamiento de los valores de la función $f(x)$ conforme x se acerca cada vez más a 3. El símbolo + como superíndice después de 3 indica que x se aproxima a 3 por la derecha.

Ahora considere que la variable x se aproxima a 3 mediante valores menores que 3; esto es, se asignan a x los valores 2, $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{29}{10}$, $\frac{299}{100}$, $\frac{2\,999}{1\,000}$, y así sucesivamente. La Tabla 2 contiene los valores correspondientes de la función. Observe que conforme x se aproxima cada vez más a 3 por la izquierda, los valores de $f(x)$ decrecen sin límite (los valores de $f(x)$ son valores negativos cuyos valores absolutos crecen sin límite); por ello, es posible hacer $f(x)$ menor que cualquier número negativo preestablecido, considerando a x lo suficientemente cerca de 3 de modo que x sea menor que 3. Se utiliza la notación

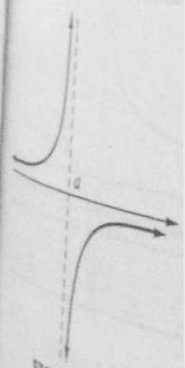


FIGURA 5.35

Tabla 2

x	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{29}{10}$	$\frac{299}{100}$	$\frac{2\,999}{1\,000}$
$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$	−4	−9	−14	−19	−49	−499	−4 999

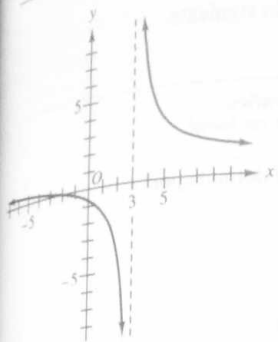


FIGURA 5.33

guiente para indicar que $f(x)$ decrece sin límite conforme x se aproxima a 3 por la izquierda:

$$f(x) \to -\infty \qquad \text{conforme } x \to 3^-$$

En la Figura 5.33 se tiene la gráfica de f, la cual muestra el comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = 3$. Conforme x se aproxima cada vez más a 3 por la derecha o por la izquierda, el valor absoluto de $f(x)$ es más grande cada vez. Observe que la gráfica no corta a la recta $x = 3$, indicada con guiones en la figura. La recta $x = 3$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de f.

DEFINICIÓN **Asíntota vertical**

Se dice que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

(i) $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to a^+$
(ii) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$
(iii) $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to a^-$
(iv) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

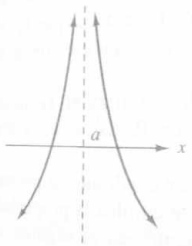


FIGURA 5.34

En la Figura 5.33, los enunciados (i) y (iv) de la definición anterior son verdaderos para la función f cuando $a = 3$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La Figura 5.34 muestra la gráfica de una función para la cual los enunciados (i) y (iii) de la definición anterior son verdaderos, y para la función cuya gráfica aparece en la Figura 5.35, los enunciados (ii) y (iii) son verdaderos. ◀

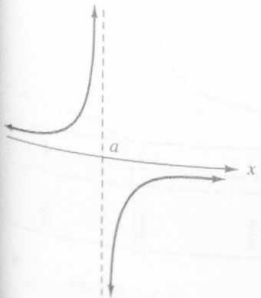


FIGURA 5.35

El teorema siguiente puede probarse a partir de la definición de asíntota vertical.

TEOREMA 1

La gráfica de una función racional de la forma $P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, posee la recta $x = a$ como una asíntota vertical si $Q(a) = 0$.

Se aplicará el Teorema 1 al ejemplo siguiente.

▸ EJEMPLO 1 *Dibujo de la gráfica de una función racional*

Dibuje la gráfica de la función racional definida por

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

Compruebe la gráfica en la graficadora.

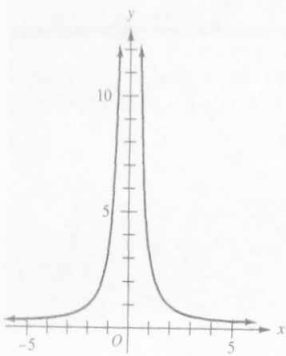


FIGURA 5.36

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 0. En consecuencia, la gráfica no tiene intercepciones y. Como $f(x)$ nunca es cero, la gráfica no posee intercepciones x. De la ecuación se observa que $f(x)$ nunca es negativa. Por tanto, la gráfica está contenida en los cuadrantes primero y segundo. Debido a que $f(-x) = f(x)$, f es una función par, por lo que la gráfica es simétrica respecto al eje y.

Para obtener cualquier asíntota vertical, se utiliza el Teorema 1. Al igualar a cero el denominador se obtiene $x = 0$. Así, el eje y es una asíntota vertical.

Algunos puntos de la gráfica en el primer cuadrante se presentan en la Tabla 3. Si se localizan estos puntos y se emplea la propiedad de simetría se obtienen los puntos correspondientes en el segundo cuadrante. El dibujo se completa uniendo los puntos en cada cuadrante con una curva continua observando la información anterior, la gráfica se muestra en la Figura 5.36. En la graficadora se obtiene la misma gráfica.

Tabla 3

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x) = \frac{3}{x^2}$	12	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{16}$

De la gráfica de la Figura 5.36 se observa que los valores de $f(x)$ se aproximan a cero conforme $|x|$ crece sin límite. Por esta razón, el eje x es una *asíntota horizontal* de la gráfica. A fin de definir una asíntota horizontal, se utiliza la notación $f(x) \to b^+$ lo cual significa que $f(x)$ se aproxima a b por medio de valores mayores que b, mientras que $f(x) \to b^-$ significa que $f(x)$ se aproxima a b mediante valores menores que b. La notación $x \to +\infty$ indica que x *crece sin límite*. $x \to -\infty$ significa que x *decrece sin límite*.

FIGURA 5.37

FIGURA 5.38

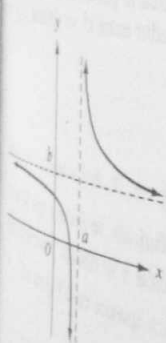


FIGURA 5.39

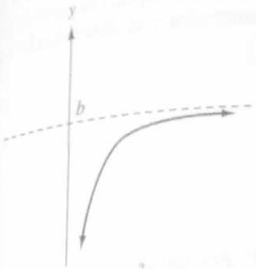


FIGURA 5.37

DEFINICIÓN **Asíntota horizontal de la gráfica de una función racional**

Se dice que la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de la función racional f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

(i) $f(x) \to b^+$ cuando $x \to +\infty$
(ii) $f(x) \to b^+$ cuando $x \to -\infty$
(iii) $f(x) \to b^-$ cuando $x \to +\infty$
(iv) $f(x) \to b^-$ cuando $x \to -\infty$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La Figura 5.37 muestra la gráfica de la función para la cual el enunciado (iii) de la definición anterior es verdadero, y para la gráfica de la Figura 5.38 el enunciado (ii) es verdadero. Los enunciados (i) y (iv) son verdaderos para la gráfica de la Figura 5.39. La gráfica de esta figura también tiene a la recta $x = a$ como una asíntota vertical, ya que $f(x) \to +\infty$ conforme $x \to a^+$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^-$. ◀

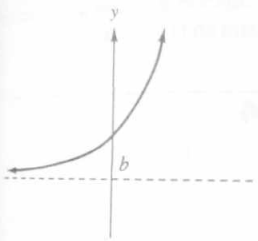


FIGURA 5.38

TEOREMA 2

La gráfica de una función racional de la forma

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

tiene

(i) al eje x como asíntota horizontal si $n < m$;

(ii) la recta $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ como una asíntota horizontal si $n = m$;

(iii) no tiene asíntotas horizontales si $n > m$.

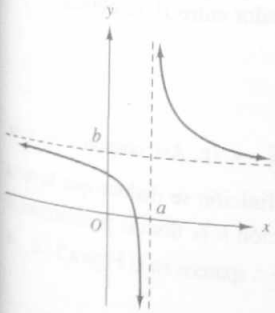


FIGURA 5.39

La demostración de este teorema se omite, pero los siguientes dos ejemplos ilustrativos harán plausibles las partes (i) y (ii). Posteriormente, en el ejemplo 5, se presenta una función para la cual se aplica la parte (iii).

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{4x}{x^2 - 25}$$

El grado del numerador es 1, y el del denominador es 2. Como $1 < 2$, entonces g es una función racional para la cual se aplica la parte (i) del Teorema 2. Para ver esto, se divide el numerador y el denominador entre x^2. Al hacerlo, se obtiene

$$g(x) = \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{25}{x^2}}$$

Conforme $x \to +\infty$, $\frac{4}{x} \to 0^+$ y $\frac{25}{x^2} \to 0^+$. Por tanto, cuando $x \to +\infty$, $g(x) \to 0^+$. Si $x \to -\infty$, entonces $\frac{4}{x} \to 0^-$ y $\frac{25}{x^2} \to 0^+$. Por tanto, conforme $x \to -\infty$, $g(x) \to 0^-$. Así, de la definición, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de g. La función g se discute posteriormente en el ejemplo 3, y su gráfica se muestra en la Figura 5.41.

FIGURA 5.40

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea h la función definida por

$$h(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 32}$$

El grado del numerador es igual al grado del denominador. Así, h es una función racional para la cual se aplica la parte (ii) del Teorema 2. Si se divide el numerador y el denominador entre x^2, se obtiene

$$h(x) = \frac{3}{2 - \frac{32}{x^2}}$$

Conforme $x \to +\infty$, o bien $x \to -\infty$, $\frac{32}{x^2} \to 0^+$. Así, cuando $x \to +\infty$, o bien $x \to -\infty$, $h(x) \to \frac{3}{2}^+$. De la definición se deduce que la recta $y = \frac{3}{2}$ es una asíntota horizontal. La función h se discute posteriormente en el ejemplo 4 de esta sección, y su gráfica aparece en la Figura 5.42.

▸ EJEMPLO 2 *Dibujo de la gráfica de una función racional*

Dibuje la gráfica de la función definida por medio de

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$$

Compruebe la gráfica en la graficadora.

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto -1. Como $f(0) = -3$, la intercepción y es -3. La intercepción

es $\frac{3}{2}$, la cual se obtiene igualando a 0 el numerador. Ya que f no es par ni impar, no existe simetría con respecto al eje y o al origen.

Si se iguala a 0 el denominador, se obtiene la recta $x = -1$ como una asíntota vertical. Debido a que los grados del numerador y el denominador son iguales, se infiere del Teorema 2(ii) que la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal. Algunos puntos de la gráfica, determinados por el cálculo de $f(x)$ para ciertos valores de x, se presentan en la Tabla 4. Mediante estos puntos, y con el empleo de las asíntotas como guías, se obtiene el dibujo de la gráfica de f mostrada en la Figura 5.40.

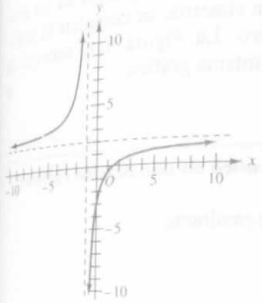


FIGURA 5.40

Tabla 4

x	0	2	4	6	8	10	−2	−4	−6	−8	−10	−12
$f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$	−3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{9}{7}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{17}{11}$	7	$\frac{11}{3}$	3	$\frac{19}{7}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{25}{11}$

La gráfica puede comprobarse mediante la graficadora. Observe que la asíntota horizontal no aparece en la pantalla cuando se traza la gráfica de la función. Sin embargo, puede trazarse la recta $y = 2$ en el mismo rectángulo de inspección para mostrar la asíntota horizontal en la figura. ◀

▶ EJEMPLO 3 *Dibujo de la gráfica de una función racional*

Dibuje la gráfica de la función definida por

$$g(x) = \frac{4x}{x^2 - 25}$$

Verifique la gráfica por medio de la graficadora.

Solución Si se factoriza el denominador, se obtiene

$$g(x) = \frac{4x}{(x-5)(x+5)}$$

El dominio de g es el conjunto de todos los números reales excepto 5 y −5. Como $g(0) = 0$, la gráfica tiene una intercepción en el origen. Debido a que $g(-x) = -g(x)$, g es una función impar, por lo que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Al igualar el denominador a 0, se obtienen las asíntotas verticales $x = 5$ y $x = -5$. Del Teorema 2(i), el eje x es una asíntota horizontal (lo que se demostró en el ejemplo ilustrativo 3). La Tabla 5 presenta algunos puntos de la gráfica. Se localizan estos puntos y se emplean las

Tabla 5

x	0	1	2	3	4	6	8	10
$g(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 25}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{21}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{16}{9}$	$\frac{24}{11}$	$\frac{32}{39}$	$\frac{40}{75}$

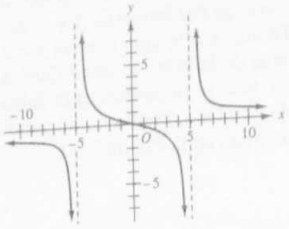


FIGURA 5.41

asíntotas como guías para dibujar la porción de la gráfica en los cua drantes primero y cuarto. Al emplear la simetría, se completa la grá ca en los cuadrantes segundo y tercero. La Figura 5.41 muestra la gráfica. En la graficadora se obtiene la misma gráfica.

▸ EJEMPLO 4 *Dibujo de la gráfica de una función racional*

Dibuje la gráfica de la función definida mediante

$$h(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 32}$$

Compruebe la gráfica en la graficadora.

Solución Al factorizar el denominador se obtiene

$$h(x) = \frac{3x^2}{2(x - 4)(x + 4)}$$

El dominio de h es conjunto de todos los números reales excepto 4 y -4. Como $h(0) = 0$, la gráfica tiene una intercepción en el origen. Debido a que $h(-x) = h(x)$, h es una función par y, en consecuencia, la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

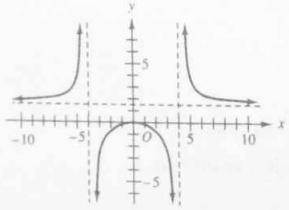


FIGURA 5.42

Las asíntotas verticales se obtienen igualando el denominador a cero, éstas son $x = 4$ y $x = -4$. Como se demostró en el ejemplo ilustrativo 4, la recta $y = \frac{3}{2}$ es una asíntota horizontal, lo que se de duce del Teorema 2(ii). La Tabla 6 muestra algunos puntos de la gráfica. Se localizan estos puntos y se utilizan las asíntotas como guías para dibujar la porción de la gráfica correspondiente a los cua drantes primero y cuarto. Al emplear las propiedades de simetría se com pleta la gráfica en los cuadrantes segundo y tercero. La Figura 5.42 muestra la gráfica requerida.

Tabla 6

x	1	2	3	5	6	8	10
$h(x) = \dfrac{3x^2}{2x^2 - 32}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{14}$	$\frac{75}{18}$	$\frac{27}{10}$	2	$\frac{75}{82}$

La gráfica de la función y la de la asíntota horizontal $y = \frac{3}{2}$, trazadas en la graficadora, concuerdan con la Figura 5.42. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 3}$$

Al dividir el numerador entre el denominador se obtiene

$$f(x) = x + 3 - \frac{7}{x - 3}$$

Puesto que cuando $x \to +\infty$ o bien, $x \to -\infty$, $\frac{7}{x-3} \to 0$, se deduce de la ecuación anterior que

$$\text{conforme } x \to +\infty \quad \text{o bien} \quad x \to -\infty, \quad f(x) \to x + 3$$

Debido a este hecho, se dice que la recta $y = x + 3$ es una *asíntota oblicua* de la gráfica de f. *Véase* la Figura 5.43, la cual se obtiene en el ejemplo 5 donde la gráfica de f se discute más a fondo. ◀

Si una recta es asíntota de una gráfica sin ser vertical ni horizontal, esta recta se denomina **asíntota oblicua.** La gráfica de cualquier función racional de la forma $P(x)/Q(x)$, donde el grado de $P(x)$ es mayor en uno que el grado de $Q(x)$, tendrá una asíntota oblicua. Para determinar esta asíntota se procede como en el ejemplo ilustrativo 5: divida el polinomio del numerador entre el polinomio del denominador, así se obtiene la suma de una función lineal y otra racional. Cuando $|x|$ crece sin límite, los valores de la función original se aproximan a los valores de la función lineal. La asíntota oblicua es la gráfica de esta función lineal.

► EJEMPLO 5 *Dibujo de la gráfica de una función lineal*

Dibuje la gráfica de la función definida mediante

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 3}$$

Verifique la gráfica en la graficadora.

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 3. Como $f(0) = \frac{16}{3}$, la intercepción y de la gráfica es $\frac{16}{3}$. Las intercepciones x se obtienen al igualar a cero el numerador. Al hacerlo se obtiene $x = \pm 4$. Debido a que f no es par ni impar, su gráfica no es simétrica respecto al eje y ni al origen.

Si se iguala a cero el denominador se obtiene la recta $x = 3$ como una asíntota vertical. Debido a que el grado del numerador es mayor

que el del denominador, se infiere del Teorema 2(iii) que no pos
asíntotas horizontales. Sin embargo, hay una asíntota oblicua, ya qu
el grado del numerador es mayor por 1 que el grado del denominado
Como se vio en el ejemplo ilustrativo 5, esta asíntota es la recta $y = x + 3$

La Tabla 7 muestra los resultados de los cálculos de $f(x)$ para va
rios valores de x. Con estos puntos y usando las asíntotas como guía
se obtiene la gráfica de f mostrada en la Figura 5.43.

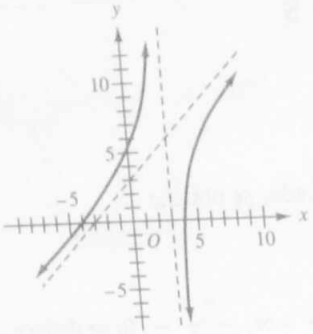


FIGURA 5.43

Tabla 7

x	−6	−4	−2	−1	0	1	2	4	5	6
$f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 3}$	$-\frac{20}{9}$	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{15}{2}$	12	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{20}{3}$

Si se verifica la gráfica en la graficadora, la asíntota oblicua n
aparece. Para mostrar esta asíntota, se traza la recta $y = x + 3$ en el mi
mo rectángulo de inspección.

Cuando aprenda técnicas de Cálculo, estará habilitado para anal
zar completamente las gráficas de funciones racionales. En el estad
actual, es recomendable que efectúe los pasos siguientes al dibujar t
les gráficas.

Para dibujar la gráfica de una función racional:

1. Encuentre las intercepciones.
2. Haga las pruebas de simetría respecto al eje y y al origen.
3. Encuentre las asíntotas verticales aplicando el Teorema 1.
4. Encuentre las asíntotas horizontales aplicando el Teorema 2.
5. Si el grado del numerador es mayor por 1 que el grado del denominador, encuentre la asíntota oblicua mediante el método del ejemplo ilustrativo 5.
6. Localice algunos puntos de la gráfica. Emplee tantos puntos como sea necesario para completar el dibujo de acuerdo con la información obtenida en los pasos 1 a 5.

► **EJEMPLO 6** ***Solución de un problema que tiene una función racional como modelo matemático***

Se desea construir un envase de hojalata con forma de cilindro circul
recto sin tapa, de modo que su volumen sea 16π pulg^3. (a) Si el ra

de la base del cilindro mide x pulgadas, exprese el área de la superficie total del cilindro en pulgadas cuadradas como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función resultante? **(c)** Utilice la graficadora para expresar el radio de la base, con una precisión de dos decimales, para el cual la cantidad de material empleado en la manufactura del envase sea mínima; esto es, de modo que el área de la superficie total sea mínima. ¿Cuál es el mínimo del área de la superficie total?

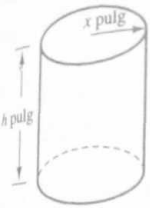


FIGURA 5.44

Solución

(a) La Figura 5.44 muestra el envase de radio x pulgadas y altura h pulgadas. El área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi xh$ pulg^2 y el área de la tapa inferior es πx^2 pulgadas cuadradas. Por tanto, si $S(x)$ pulgadas cuadradas representa el área de la superficie total, entonces

$$S(x) = 2\pi xh + \pi x^2 \qquad (1)$$

Para expresar $S(x)$ sólo en términos de x, se necesita una ecuación que relacione a x y h. Como el volumen de un cilindro circular recto está dado por $\pi x^2 h$, y el volumen del envase debe ser $16\,\pi$ pulg^3, entonces se tiene la ecuación

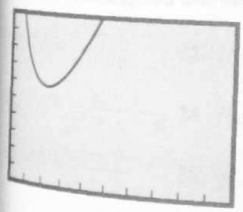
$$\pi x^2 h = 16\pi$$

$$h = \frac{16}{x^2}$$

Al sustituir este valor de h en (1) se obtiene

$$S(x) = 2\pi x\left(\frac{16}{x^2}\right) + \pi x^2$$

$$S(x) = \frac{32\pi}{x} + \pi x^2$$


[0, 10] por [0, 100]
$S(x) = \frac{32\pi}{x} + \pi x^2$
FIGURA 5.45

(b) Como x debe ser un número positivo, el dominio de S es $(0, +\infty)$.

(c) La gráfica de S en el rectángulo de inspección de $[0, 10]$ por $[0, 100]$ se muestra en la Figura 5.45. La coordenada x del *punto mínimo* de la gráfica proporciona el radio de la base del envase cuya superficie total es de área mínima. Si utiliza el aumento (*zoom in*) de la graficadora, se verá que el punto mínimo es (2.52, 59.84).

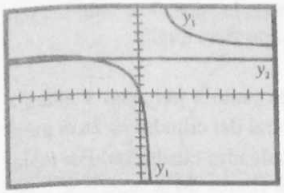
Conclusión: El radio de la base debe ser 2.52 pulg para obtener una área de la superficie total de 59.84 pulg^2. ◀

$\iint \frac{dy}{dx}$

En su curso de Cálculo aprenderá a determinar el valor exacto del radio de la base requerido en el ejemplo 6, el cual es $2\sqrt[3]{2}$ pulg ≈ 2.52 pulg.

En las secciones 2.5 y 2.6 aprendió a resolver desigualdades lineales y polinomiales, tanto algebraica como gráficamente. Es cierto que para desigualdades lineales el método algebraico es más fácil que el gráfico. Sin embargo, una desigualdad racional, es decir, que contiene

expresiones racionales de la variable, es más fácil resolverla en la gra-
ficadora que algebraicamente. En consecuencia, se pospuso el estudio
de las desigualdades racionales hasta este momento, por lo cual nos
concentraremos en la solución gráfica.



[−10, 10] por [−10, 10]
$y_1 = \frac{5x}{x-1}$ y $y_2 = 4$
FIGURA 5.46

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Para resolver la desigualdad

$$\frac{5x}{x-1} < 4$$

considere

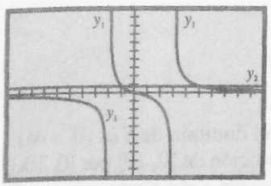
$$y_1 = \frac{5x}{x-1} \qquad y_2 = 4$$

La Figura 5.46 muestra las gráficas de y_1 y y_2 trazadas en el rectángulo de inspección de [−10, −10] por [−10, 10]. Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la gráfica de y_1. Como la gráfica de y_1 está debajo de la gráfica de y_2 cuando x está en el intervalo abierto $(-4, 1)$, este intervalo es el conjunto solución de la desigualdad.

▸ EJEMPLO 7 *Solución gráfica de una desigualdad racional*

Encuentre la solución de la desigualdad

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} \leq 1$$



[−10, 10] por [−10, 10]
$y_1 = \frac{3x-1}{x^2-x-6}$ y $y_2 = 1$
FIGURA 5.47

Solución Considere

$$y_1 = \frac{3x-1}{x^2-x-6} \qquad y_2 = 1$$

En la Figura 5.47 se muestran las gráficas de y_1 y y_2 trazadas en el rectángulo de inspección de [−10, 10] por [−10, 10]. La gráfica de y_1 tiene dos asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 3$. El conjunto solución de la desigualdad consta de todos los valores de x para los cuales la gráfica de y_1 corta a la gráfica de y_2 o está por debajo de ella. Por tanto, a partir de la figura se concluye que el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [-1, 3) \cup [5, +\infty)$.

EJERCICIOS 5.5

En los ejercicios 1 a 32, se define una función racional. (a) Determine el dominio de la función. (b) Encuentre las intercepciones de la gráfica de la función. (c) Haga pruebas de simetría para las gráficas respecto del eje

y el origen. (d) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica si existen. (e) Encuentre la asíntota oblicua si existe. (f) Dibuje la gráfica. (g) Compruebe la gráfica con la graficadora.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = \frac{1}{x - 3}$
3. $g(x) = \frac{4}{x - 2}$
4. $g(x) = \frac{2}{x + 4}$
5. $f(x) = \frac{1 + x}{3 - x}$
6. $f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$
7. $h(x) = \frac{2x - 4}{x + 4}$
8. $g(x) = \frac{3x + 6}{x - 2}$
9. $f(x) = \frac{4}{x^2}$
10. $h(x) = -\frac{2}{x^2}$
11. $g(x) = -\frac{2}{x^3}$
12. $f(x) = \frac{3}{x^3}$
13. $f(x) = \frac{-1}{(x + 2)^2}$
14. $f(x) = \frac{4}{(x - 3)^2}$
15. $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 4}$
16. $g(x) = \frac{7x}{x^2 - 9}$
17. $h(x) = \frac{9x}{16 - x^2}$
18. $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$
19. $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9}$
20. $h(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$
21. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
22. $f(x) = \frac{x^2 + 12}{x^2 - 16}$
23. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x - 6}$
24. $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 8x + 12}$
25. $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2}$
26. $g(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 4}$
27. $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$
28. $h(x) = \frac{2x^2 + 2}{x}$
29. $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$
30. $f(x) = \frac{6}{2x^2 + 3}$
31. $g(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}$
32. $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 4}$

En los ejercicios 33 a 40, encuentre gráficamente la solución de la desigualdad.

33. $\frac{1}{x - 5} > 1$
34. $\frac{3}{x + 4} \leq 1$
35. $\frac{2x}{x - 2} \leq 3$
36. $\frac{5x}{x - 4} > 6$
37. $\frac{2}{3 - x} > \frac{3}{2 + x}$
38. $\frac{6 - 2x}{4 + x} \leq 5$
39. $\frac{2x - 7}{x^2 - 6x + 8} \leq 1$
40. $\frac{5x}{x^2 + 2x - 8} \geq 3$

En los ejercicios 41 a 48, resuelva el problema mediante el empleo de una función racional como modelo matemático de la situación. Escriba una conclusión.

41. Resuelva el ejemplo 6 si el envase de hojalata es cerrado.

42. Para un envase cerrado con forma de cilindro circular recto de volumen 16π pulg^3, el costo del material para las tapas es de 2 centavos por pulg^2 y el costo del material para la superficie lateral es de 1 centavo por pulg^2. **(a)** Si el radio de la base del cilindro mide x pulgadas, exprese el costo total del material en centavos como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Utilice la graficadora para encontrar, con una precisión de centésimos, el radio de la base para el cual el costo del material es el mínimo? ¿Cuál es este costo mínimo del material?

43. Una caja cerrada de base cuadrada tienen un volumen de 2 000 pulg^3. El material para la tapa y el fondo de la caja cuesta 3 centavos por pulg^2 y el material para los lados tiene un costo de 1.5 centavos por pulg^2. **(a)** Si la longitud del lado de la base cuadrada es de x pulgadas, exprese el costo total del material en centavos como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función de la parte (a)? **(c)** Utilice la graficadora para encontrar, con una precisión de dos decimales, la longitud del lado de la base cuadrada para la que el costo del material es el mínimo? ¿Cuál es este costo mínimo del material?

44. Un rectángulo tiene un área de 81 pulg^2. **(a)** Si la longitud del rectángulo es x, exprese el perímetro en pulgadas como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función de la parte (a)? **(c)** Utilice la graficadora para encontrar, con una aproximación de décimos de pulgada, las dimensiones para las cuales el perímetro es el mínimo?

45. Haga el ejercicio 44 si el rectángulo tiene un área de 100 pulg^2.

46. En una comunidad particular, cierta epidemia se extiende de tal forma que x meses después del brote de la epidemia, $P(x)$ por ciento de la población esta infectada, donde

$$P(x) = \frac{30x^2}{(1 + x^2)^2}$$

Utilice la graficadora para estimar en cuántos meses la mayor parte de la gente será infectada y qué porcentaje de la población es ésta.

47. Se determinó que el costo por kilómetro para operar un camión es $8 + \frac{1}{300}x$ dólares sin considerar los salarios de los operadores, y donde x kilómetros por hora es la velocidad del camión. El salario combinado del operador y su ayudante es \$27 por hora. **(a)** Exprese el costo total en dólares para operar un camión como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la parte (a)? **(c)** Utilice la graficadora para estimar aproximadamente la velocidad en kilómetros por hora para la cual el costo por kilómetro es el mínimo.

48. El costo por hora en dólares del combustible para un barco carguero es $\frac{1}{50}x^3$, donde x nudos (millas náuticas por hora) es la velocidad del barco. Hay un costo adicional de \$400 por hora. **(a)** Exprese el costo en dólares por milla náutica como una función de x. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función de la parte (a)? **(c)** Emplee la graficadora para estimar, aproximadamente en nudos, la velocidad del barco para que el costo por milla náutica sea el mínimo.

49. Cuando dos resistores que tienen resistencia R_1 ohms y R_2 ohms se conectan en paralelo, la resistencia total R ohms está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si la resistencia total de dos resistores conectados en paralelo debe ser de por lo menos 2 ohms, y uno de los resistores tiene una resistencia de 3 ohms, ¿cuál debe ser la resistencia del otro resistor? Utilice una desigualdad como modelo matemático de la situación y escriba una conclusión.

50. Explique en palabras (sin símbolos) y sin el empleo de las palabras *infinito* o *aproximación*, qué significa el enunciado: "La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f".

51. Explique en palabras (sin símbolos) y sin el empleo de las palabras *infinito* o *aproximación*, qué significa el enunciado: "La recta $y = 4$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f".

52. Si a, b, c y d son números positivos y $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, describa cómo demostraría que $\frac{a+c}{b+d}$ está entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 5

▸ VISIÓN RETROSPECTIVA

5.1 Las transformaciones geométricas que se utilizaron para obtener las gráficas de funciones polinomiales incluyen las reglas de traslación vertical y horizontal, la regla de expansión y contracción vertical, y la regla de reflexión con respecto al eje x. Se mostró cómo el comportamiento al infinito de la gráfica de una función polinomial de n-ésimo grado puede obtenerse a partir del signo del coeficiente del término de n-ésimo grado y la paridad de n. Se aplicó, sin demostración, el teorema que establece que una función polinomial de n-ésimo grado tiene a lo más $n - 1$ extremos relativos, y se empleó una graficadora para estimar los extremos relativos.

5.2 El teorema del residuo nos dice que cuando $P(x)$ se divide entre $x - r$, el residuo es $P(r)$. Una consecuencia de este teorema es el teorema del factor, el cual establece que $P(x)$ tiene a $x - r$ como factor si y sólo si $P(r) = 0$. Se introdujo la división sintética para facilitarnos la aplicación de estos dos teoremas. Se usó la terminología sustitución sintética cuando $P(r)$ se calculó mediante la división sintética. Se mostró cómo el algoritmo de Horner es una forma conveniente para realizar la división sintética en una calculadora.

5.3 Las técnicas de cálculo de la Sección 5.2 se aplicaron junto con el teorema de ceros racionales para encontrar los ceros racionales de funciones polinomiales con coeficientes reales.

5.4 Se utilizó el teorema fundamental del álgebra para probar el importante teorema el cual establece que una función polinomial de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos, tiene exactamente n ceros complejos. También se estableció, sin demostración, que si un número complejo es un cero de una función polinomial, entonces su conjugado también es un cero. Este hecho nos permitió encontrar otros ceros de una función

polinomial cuando se conocían algunos. Se introdujo la regla de los signos de Descartes que nos facilitó la determinación de la naturaleza de los ceros de una función polinomial. También se estableció y probó un teorema empleado en Cálculo cuando se trabaja con fracciones parciales: Un polinomio con coeficientes reales puede expresarse como un producto de polinomios lineales o cuadráticos con coeficientes reales.

5.5 Se definieron las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de gráficas de funciones racionales, y se emplearon para dibujar las gráficas. Se resolvieron desigualdades racionales trazando las gráficas de funciones racionales.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 y 2, utilice el teorema del residuo para encontrar el residuo de la división.

1. $(3x^3 + 4x^2 - 3x - 5) \div (x + 2)$
2. $(2x^4 - 5x^2 - 2x + 1) \div (x - 1)$

En los ejercicios 3 y 4, emplee el teorema del factor para contestar la pregunta.

3. ¿Es $x - 3$ un factor de $x^3 + 2x^2 - 12x - 9$?
4. ¿Es $x + 4$ un factor de $2x^3 + 9x^2 + 6x + 8$?
5. Encuentre el valor de k de modo que $x - 3$ sea un factor de $2kx^3 - 5x^2 + 3kx$.
6. Determine el valor de k tal que $x + 2$ sea un factor de $2x^4 + 2kx^3 - x^2 - 3kx - 8$.

En los ejercicios 7 a 10, encuentre el cociente y el residuo mediante división sintética.

7. $(2x^4 + 7x^3 - 4x + 5) \div (x + 3)$
8. $(x^3 - 6x^2 + 8x - 5) \div (x - 4)$
9. $(x^6 - 64) \div (x - 2)$
10. $(x^5 + 243) \div (x + 3)$

En los ejercicios 11 y 12, determine los valores de la función mediante sustitución sintética.

11. $P(x) = 2x^4 - 8x^2 - 10x - 3$
    (a) $P(-2)$ (b) $P(3)$
12. $P(x) = 3x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 1$
    (a) $P(-4)$ (b) $P(-\frac{1}{3})$

En los ejercicios 13 a 16, encuentre los ceros de la función polinomial, e indique la multiplicidad de cada cero.

13. $P(x) = (x^2 + 2x - 3)(2x^2 + x - 15)$
14. $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + x - 2)$
15. $P(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4)^2(6x^2 + x - 15)$
16. $P(x) = (x - 5)^3(x^2 - 36)(x^2 + 2x - 1)^2$

En los ejercicios 17 y 18, muestre que los números dados son ceros de la función polinomial, y encuentre los otros dos ceros.

17. $P(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 + 8$; -1 y 2

18. $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 7x + 6$; 1 y -3

En los ejercicios 19 a 22, determine todos los ceros racionales de la función polinomial. Si es posible, encuentre los ceros irracionales o imaginarios.

19. $P(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 26x - 12$

20. $P(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 3$

21. $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 9x - 2$

22. $P(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 4x + 6$

En los ejercicios 23 a 26, determine todas las raíces racionales de la ecuación. Si es posible encuentre las raíces irracionales o imaginarias.

23. $x^3 + x^2 - 15x + 9 = 0$

24. $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 28x - 16 = 0$

25. $6x^4 - 25x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$

26. $3x^3 - x^2 + 16x + 12 = 0$

27. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 0$$

dado que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son raíces.

28. Determine el conjunto solución de la ecuación

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 3 = 0$$

dado que $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ son raíces.

En los ejercicios 29 a 40, dibuje la gráfica de la función. Verifique la gráfica en la graficadora.

29. (a) $f(x) = x^2 - 2$ (b) $g(x) = (x - 2)^2$

30. (a) $f(x) = -2x^2 + 3$ (b) $g(x) = -2(x + 3)^2$

31. (a) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^3$ (b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$

32. (a) $f(x) = (x + 1)^3 - 5$ (b) $g(x) = (x + 5)^3 - 1$

33. (a) $f(x) = -(x - 1)^4 + 3$
(b) $g(x) = -(x + 1)^4 - 3$

34. (a) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^4 - 3$
(b) $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^4 + 2$

35. $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$

36. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$

37. $g(x) = x^4 - 14x^2 - 24x$

38. $h(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

39. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 7x + 3$

40. $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$

En los ejercicios 41 a 52, se define una función racional. (a) Determine el dominio de la función. (b) Encuentre las intercepciones de la gráfica de la función. (c) Haga las pruebas de simetría de la gráfica con respecto al eje y y al origen. (d) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica si existen. (e) Determine la asíntota oblicua si existe. (f) Dibuje la gráfica. (g) Compruebe la gráfica en la graficadora.

41. $f(x) = \dfrac{2}{x - 5}$

42. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

43. $g(x) = \dfrac{8}{x^2}$

44. $g(x) = -\dfrac{4}{x^3}$

45. $f(x) = \dfrac{16}{(x + 2)^3}$

46. $f(x) = \dfrac{6}{(x + 1)^2}$

47. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

48. $g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

49. $g(x) = \dfrac{4x^2}{9 - x^2}$

50. $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 16}$

51. $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

52. $h(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x}$

En los ejercicios 53 a 56, encuentre un polinomio $P(x)$ del grado indicado con coeficientes reales para el cual los números dados son ceros de P.

53. Cuarto grado; $1 - i$ y $1 + i\sqrt{3}$.

54. Cuarto grado; $2 - i\sqrt{2}$ (multiplicidad 2) y -1.

55. Sexto grado; $3i$ (multiplicidad 2) y $2 - i\sqrt{2}$.

56. Sexto grado; $2 + 3i$, $2 + i$ y $1 + 3i$.

En los ejercicios 57 a 60, (a) encuentre los ceros de la función polinomial y (b) utilice el resultado de la parte (a) para expresar el polinomio como un producto de polinomios lineales o cuadráticos.

57. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$

58. $P(x) = 3x^4 + x^3 - 3x - 1$

59. $P(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 8$; $2i$ es un cero

60. $P(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$; $-i$ es un cero

61. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

dado que $-1 + i$ es una raíz.

62. Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$2x^4 - x^3 + 33x^2 - 16x + 16 = 0$$

dado que $4i$ es una raíz.

En los ejercicios 63 a 66, pruebe que la ecuación tiene raíces racionales. Después utilice la regla de los signos de Descartes para determinar la información concerniente al número de raíces positivas, negativas o imaginarias. Emplee la graficadora para verificar su respuesta.

63. $x^3 - 7x^2 + x + 3 = 0$

64. $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$

65. $x^4 - 6x - 9 = 0$

66. $x^4 + 2x^3 + 6x - 3 = 0$

En los ejercicios 67 a 70, determine toda la información concerniente al número de ceros positivos, negativos imaginarios de la función. Encuentre los ceros racionales y localice los ceros irracionales entre dos enteros cosecutivos. Trace la gráfica de la función y verifique su respuesta.

67. $F(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 24$

68. $G(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

69. $G(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 33x - 14$

70. $F(x) = 3x^4 + 10x^3 - 11x^2 - 4x + 2$

En los ejercicios 71 a 74, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

71. $4x^3 - 11x^2 + 26x - 15 = 0$

72. $3x^3 - x^2 + 16x + 12 = 0$

73. $6x^4 - 25x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$

74. $2x^4 - 9x^3 + 17x^2 - 3x - 7 = 0$

En los ejercicios 75 a 78, encuentre el conjunto solución de la desigualdad gráficamente.

75. $\dfrac{2x + 1}{x - 5} > 1$

76. $\dfrac{3x - 4}{2x - 3} \leq 2$

77. $\dfrac{8x + 6}{x^2 + x - 12} \leq 1$

78. $\dfrac{10 - 4x}{x^2 - 7x + 10} > 3$

En los ejercicios 79 a 81, resuelva el problema utilizando una ecuación como modelo matemático de la situación. Escriba una conclusión.

79. Las dimensiones de una caja rectangular son 3 pulg, 4 pulg y 5 pulg. El volumen de la caja se duplica si cada dimensión se aumenta en el mismo número de pulgadas. Determine este número.

80. El volumen de una caja es de 504 cm^3, y las dimensiones de la caja en centímetros son tres enteros consecutivos. ¿Cuáles son las dimensiones?

81. El área de un triángulo rectángulo es 6 cm^2. Encuentre las longitudes de los lados del triángulo si la longitud de uno de ellos es 2 cm más corto que la longitud de la hipotenusa.

En los ejercicios 82 a 85, resuelva el problema empleando una función racional como modelo matemático de la situación. Escriba una conclusión.

82. (a) Si la longitud de un rectángulo que tiene un área de 90 pie^2 es x pies, exprese el perímetro en pies como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función de la parte (a)? (c) Utilice la graficadora para encontrar, con una aproximación de décimas de pie, las dimensiones del rectángulo para las cuales el perímetro es el mínimo.

83. Se desea hacer una caja abierta con un volumen de 288 $pulg^3$ con la mínima cantidad de material. La caja tiene una base rectangular y su longitud es el triple de su ancho. (a) Si el ancho de la base rectangular es x pulgadas, exprese en pulgadas cuadradas el área de la superficie total de la caja como una función de x. (b) ¿Cuál es el dominio de la función de la parte (a)? (c) Utilice la graficadora para encontrar, con una aproximación de décimas de pulgada, las dimensiones de la caja de modo que el área de la superficie total sea mínima. ¿Cuál es el mínimo del área de la superficie total?

84. Resuelva el ejercicio 83 suponiendo que la caja es cerrada.

85. Un envase cerrado de hojalata y con forma de cilindro circular recto tiene un volumen de 27 $pulg^3$. Las tapas circulares son cortadas de piezas cuadradas de hojalata. (a) Si el radio del cilindro es de x pulgadas, exprese en pulgadas cuadradas el área de la superficie total como una función de x. Incluya la hojalata que se desecha cuando se cortan las tapas. (b) ¿Cuál es el dominio de la función de la parte (a)? (c) Utilice la graficadora para encontrar, con una aproximación de décimas de pulgada, el radio y la altura del envase de modo que el área de la superficie total sea un mínimo. ¿Cuál es el mínimo del área de la superficie total?

86. Pruebe que si z_1 y z_2 son números complejos entonces

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

esto es, el conjugado de dos números complejos es el producto de sus conjugados.

Capítulo 6

Funciones inversas, exponenciales y logarítmicas

▸ VISIÓN PRELIMINAR

Hasta ahora sólo hemos considerado funciones algebraicas. Las funciones que no son algebraicas se denominan *trascendentes*, ejemplos de éstas son las funciones exponenciales y logarítmicas, las cuales se definirán en este capítulo. Debido a que las funciones exponencial y logarítmica son inversas una de la otra, en la primera sección se estudiarán las funciones inversas y sus propiedades.

Las aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas se presentan en todas las ciencias naturales, sociales y económicas. Dichas aplicaciones pertenecen a diversos campos, tales como física, química, ingeniería, biología, construcción, economía, psicología y sociología. Las aplicaciones de los ejemplos y ejercicios de este capítulo incluyen sustancias radiactivas, presión atmosférica, ley de enfriamiento de Newton, crecimiento de una población de bacterias, productividad en un puesto de trabajo, curva de aprendizaje, expansión de un rumor o de una enfermedad, intensidad de un temblor de tierra medido en la escala de Richter.

Sumario

6.1 Funciones inversas
6.2 Exponentes y número e
6.3 Funciones exponenciales
6.4 Funciones logarítmicas
6.5 Propiedades de las funciones y ecuaciones logarítmicas
6.6 Ecuaciones exponenciales

Capítulo 6

6.1 FUNCIONES INVERSAS

OBJETIVOS

1. **Definir cuándo una función es uno a uno.**
2. **Aprender la prueba de la recta horizontal.**
3. **Aplicar la prueba de la recta horizontal para determinar si una función es uno a uno.**
4. **Definir función creciente y función decreciente.**
5. **Aprender que una función monótona es uno a uno.**
6. **Definir la inversa de una función.**
7. **Aprender las ecuaciones $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$ donde f y f^{-1} son funciones inversas.**
8. **Determinar si una función dada tiene inversa, si la tiene, encontrarla.**
9. **Aprender que las gráficas de una función y su inversa son reflexiones una de la otra respecto a la recta $y = x$.**

La expresión *operaciones inversas* nos es conocida. La suma y la sustracción son operaciones inversas, así como la multiplicación y la división, o la elevación a potencias y la extracción de raíces. En cada par de operaciones inversas, una "deshace" lo de la otra. Por ejemplo, si sumamos 4 a x, la suma es $x + 4$; si restamos 4 de esta suma, la diferencia es x. En el siguiente ejemplo ilustrativo se utiliza un par de funciones asociadas con operaciones inversas.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Calcule los valores de la función compuesta para las funciones específicas f y g.

(a) Sean $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 4$. Entonces

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x - 4) \\ &= (x - 4) + 4 \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(f(x)) &= g(x + 4) \\ &= (x + 4) - 4 \\ &= x \end{aligned}$$

(b) Sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = \dfrac{x}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(f(x)) &= g(2x) \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

(c) Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(\sqrt[3]{x}) & g(f(x)) &= g(x^3) \\ &= (\sqrt[3]{x})^3 & &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x & &= x \end{aligned}$$

Cada par de funciones f y g del ejemplo ilustrativo 1 satisfacen las dos ecuaciones siguientes:

$$f(g(x)) = x \qquad \text{para } x \text{ en el dominio de } g$$

y

$$g(f(x)) = x \qquad \text{para } x \text{ en el dominio de } f$$

Observe que para las funciones f y g de estas dos ecuaciones, las funciones compuestas $f(g(x))$ y $g(f(x))$ son iguales, relación que no siempre es verdadera para dos funciones f y g arbitrarias. En el ejemplo ilustrativo 7 se verá que cada par de funciones del ejemplo ilustrativo 1 es un conjunto de *funciones inversas*, y que es la razón por la cual las dos ecuaciones anteriores se satisfacen.

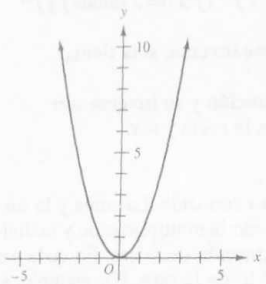


FIGURA 6.1

Se considerarán más funciones particulares, las cuales nos guiarán a la definición formal de la *inversa de una función*. La gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^2$$

está trazada en la Figura 6.1. El dominio de f es el conjunto de números reales, y su contradominio es el intervalo $[0, +\infty)$. A cada valor de x del dominio le corresponde uno y sólo uno del contradominio. Por ejemplo, como $f(2) = 4$, al número 2 del dominio le corresponde el número 4 del contradominio. Sin embargo, como $f(-2) = 4$, el número correspondiente al número -2 del dominio es el número 4 del contradominio. Así, 4 es el valor de la función de dos números distintos del dominio. Además, cada número diferente de 0, del contradominio de esta función, es el valor de la función de dos números distintos del dominio. En particular, $\frac{25}{4}$ es el valor de la función de $\frac{5}{2}$ y $-\frac{5}{2}$, y 9 es el valor de la función de 3 y -3.

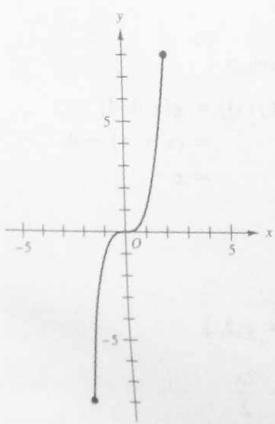


FIGURA 6.2

Una situación diferente ocurre con la función g definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \le x \le 2$$

El dominio de g es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, y su contradominio es $[-8, 8]$. La gráfica de g, trazada en la Figura 6.2, es tal, que un número de su contradominio es el valor de la función de uno y sólo un número del dominio. A este tipo de funciones se les denomina *uno a uno*.

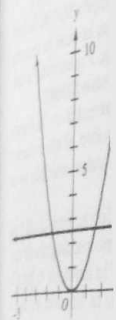


FIGURA 6.

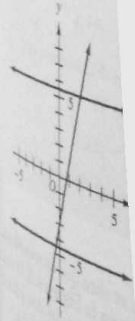


FIGURA 6.4

DEFINICIÓN **Función uno a uno**

Se dice que una función f es **uno a uno** si y sólo si siempre que a y b sean dos números diferentes cualesquiera del dominio de f, entonces $f(a) \neq f(b)$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La función definida por $f(x) = x^2$ no satisface la definición anterior debido a que, por ejemplo, 3 y –3 son dos números distintos del dominio, sin embargo $f(3) = f(-3)$. Por tanto, esta función no es uno a uno. ◀

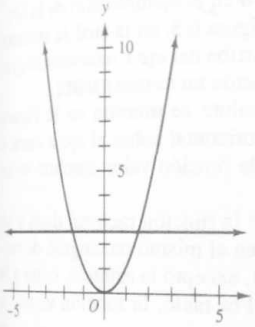


FIGURA 6.3

En la Sección 4.2, se dijo que una recta vertical corta a la gráfica de una función cuando más en un punto. Para una función uno a uno, también es verdadero el hecho de que una recta horizontal intersecta a la gráfica cuando más en un punto. Observe que ésta es la situación para la función uno a uno definida por $g(x) = x^3$, donde $-2 \leq x \leq 2$, cuya gráfica se muestra en la Figura 6.2. Además, note que para la función definida por $f(x) = x^2$, la cual no es uno a uno, cualquier recta horizontal, por arriba del eje x, corta a la gráfica en dos puntos (*véase* la Figura 6.3). Así, se tiene la siguiente prueba geométrica para determinar si una función es uno a uno.

Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal intersecta la gráfica de la función en no más de un punto.

▶ EJEMPLO 1 *Determinación, mediante la prueba de la recta horizontal, de si una función es uno a uno*

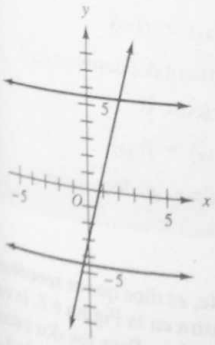


FIGURA 6.4

Para cada una de las siguientes funciones, utilice la prueba de la recta horizontal para determinar si es uno a uno.

(a) $f(x) = 4x - 3$

(b) $f(x) = (x + 1)^4$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x - 2}$

Solución

(a) Esta función es lineal y su gráfica es la recta de la Figura 6.4. Como cualquier recta horizontal corta a la gráfica en exactamente un punto, entonces la función es uno a uno.

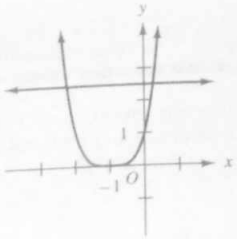


FIGURA 6.5

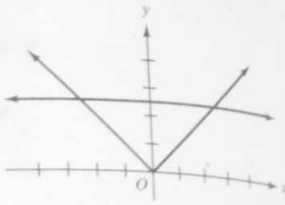
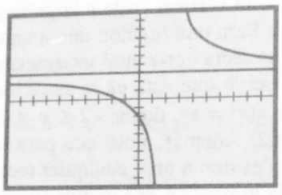


FIGURA 6.6

(b) La gráfica de esta función se obtuvo en el ejemplo 2(a) de la Sección 5.1. Ésta se reproduce en la Figura 6.5, en la cual se muestra que cualquier recta horizontal por arriba del eje x intersecta la gráfica en dos puntos. Por tanto, la función no es uno a uno.

(c) La gráfica de la función valor absoluto se muestra en la Figura 6.6. Observe que cualquier recta horizontal sobre el eje x corta a la gráfica en dos puntos. Por esto, la función valor absoluto no es uno a uno.

(d) La Figura 6.7 muestra la gráfica de la función racional dada y su asíntota horizontal, $y = 3$, se trazó en el mismo rectángulo de inspección. Cualquier recta horizontal, excepto la asíntota, corta a la gráfica exactamente en un punto. Por tanto, la función es uno a uno.



[−10, 10] por [−10, 10]

$f(x) = \dfrac{3x+4}{x-2}$ y $y = 3$

FIGURA 6.7

Otros métodos para determinar si una función es uno a uno se apoyan en las definiciones siguientes.

DEFINICIONES **Función creciente y función decreciente**

Sea f una función. Entonces

(i) se dice que f es una **función creciente** si

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica que} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

donde x_1 y x_2 son números cualesquiera del dominio de f.

(ii) se dice que f es una **función decreciente** si

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica que} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

donde x_1 y x_2 son números cualesquiera del dominio de f.

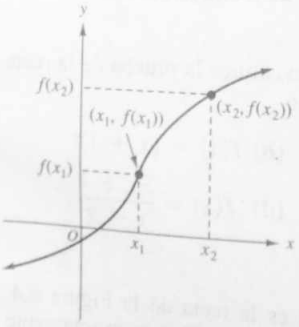


FIGURA 6.8

Si una función es creciente o decreciente, se dice que es **monótona**. El concepto de función creciente se ilustra en la Figura 6.8, la cual muestra la gráfica de una función f de este tipo. Para los dos puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ de la gráfica, se ve que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$

La Figura 6.9 presenta la gráfica de una función decreciente g. Los dos puntos $(x_1, g(x_1))$ y $(x_2, g(x_2))$ indican que $x_1 < x_2$ y $g(x_1) > g(x_2)$.

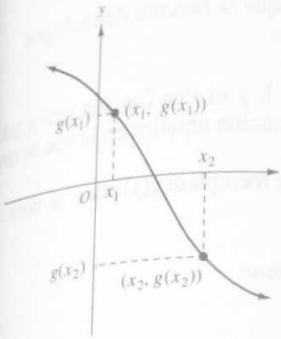


FIGURA 6.9

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Considere otra vez la función g definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

cuya gráfica está dibujada en la Figura 6.2. Como

$$x_1 < x_2 \qquad \text{implica que} \qquad x_1^3 < x_2^3$$

se deduce de la definición que g es una función creciente. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Considere la función f definida mediante

$$f(x) = 5 - 2x$$

De las propiedades de las desigualdades se infiere que

$$x_1 < x_2 \qquad \text{implica que} \qquad -2x_1 > -2x_2$$

Si se suma 5 a cada lado de la segunda desigualdad, se tiene

$$x_1 < x_2 \qquad \text{implica que} \qquad 5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$$

Pero $5 - 2x_1 = f(x_1)$ y $5 - 2x_2 = f(x_2)$. Por tanto.

$$x_1 < x_2 \qquad \text{implica que} \qquad f(x_1) > f(x_2)$$

En consecuencia, por la definición, f es una función decreciente. *Véase* la gráfica de la Figura 6. 10. ◀

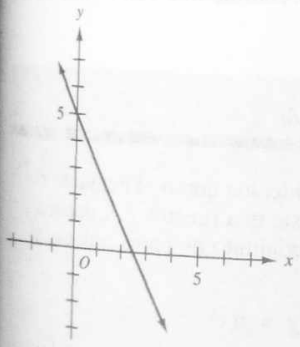


FIGURA 6.10

El teorema siguiente proporciona una prueba que puede emplearse para mostrar que una función es uno a uno.

TEOREMA 1

Una función monótona es uno a uno.

Demostración Suponga que f es una función creciente. Si x_1 y x_2 son dos números del dominio de f y $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1 < x_2$, o bien, $x_2 < x_1$. Si $x_1 < x_2$, se deduce de la definición de una función creciente que $f(x_1) < f(x_2)$; por esto, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si $x_2 < x_1$, entonces $f(x_2) < f(x_1)$, y otra vez $f(x_1) \neq f(x_2)$. Así, f es una función uno a uno. La prueba es similar si f es una función decreciente. ■

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

En el ejemplo ilustrativo 3 se demostró que la función definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

es creciente. Por tanto, por el Teorema 1, g es una función uno a uno. Este resultado concuerda con la demostración anterior en la que se empleó la prueba de la recta horizontal.

Si en la ecuación que define a $g(x)$ se reemplaza $g(x)$ por y, se tiene

$$y = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

Al resolver esta ecuación para x se obtiene

$$x = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8$$

lo cual define una función G donde

$$G(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8$$

La función G del ejemplo ilustrativo 5 se denomina la inversa de la función g. En la siguiente definición formal de la inversa de una función, se emplea la notación f^{-1} para denotar la inversa de f. Esta notación se lee "f inversa", y no debe confundirse con el uso de -1 como un exponente.

DEFINICIÓN **Inversa de una función**

Si f es una función uno a uno, considerada como el conjunto de pares ordenados (x, y), entonces existe una función f^{-1}, denominada **inversa de f,** donde f^{-1} es el conjunto de pares ordenados (y, x) definido mediante

$$x = f^{-1}(y) \qquad \text{si y sólo si} \qquad y = f(x)$$

El dominio de f^{-1} es el contradominio de f, y el contradominio de f^{-1} es el dominio de f.

En la definición anterior, el requerimiento de que f sea una función uno a uno asegura que $f^{-1}(y)$ es único para cada valor de y.

Si se elimina y de la ecuación de la definición, escribiendo la ecuación

$$f^{-1}(y) = x$$

y se sustituye y por $f(x)$, se obtiene

$$f^{-1}(f(x)) = (x)$$

donde x pertenece al dominio de f.

Si se elimina x del mismo par de ecuaciones, escribiendo la ecuación

$$f(x) = y$$

y sustituyendo x por $f^{-1}(y)$, se tiene

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

donde y está en el dominio de f^{-1}. Como el símbolo utilizado para la variable independiente es arbitrario, se puede cambiar y por x para obtener

$$f(f^{-1}(x)) = x \tag{2}$$

donde x está en el dominio de f^{-1}.

De las ecuaciones (1) y (2), se observa que si la inversa de la función f es la función f^{-1}, entonces la inversa de f^{-1} es f. Estos resultados quedan establecidos formalmente en el teorema siguiente.

TEOREMA 2

Si f es una función uno a uno y tiene a f^{-1} como su inversa, entonces f^{-1} es uno a uno y tiene a f como su inversa. Además,

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{para } x \text{ en el dominio de } f$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{para } x \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

Se emplea la terminología *funciones inversas* para referirse a una función y su inversa.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

En el ejemplo ilustrativo 5 la función G definida por

$$G(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8$$

es la inversa de la función g definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

Por tanto, puede escribirse g^{-1} en lugar de G, y obteniéndose

$$g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leq y \leq 8$$

o, de forma equivalente, si se sustituye y por x,

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \leq x \leq 8$$

Observe que el dominio de g es $[-2, 2]$, el cual es el contradominio de g^{-1}; y también que el rango de g es $[-8, 8]$, el cual es el dominio de g^{-1}. ◀

Si una función f tiene inversa, entonces $f^{-1}(x)$ puede determinarse mediante el método empleado en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Cada una de las funciones f del ejemplo ilustrativo 1 es uno a uno. Por tanto, $f^{-1}(x)$ existe. Para cada función se calcula $f^{-1}(x)$ a partir de la definición de $f(x)$ mediante la sustitución de y por $f(x)$ y resolviendo la ecuación para x. Con este procedimiento se obtiene la ecuación $x = f^{-1}(y)$. Esta ecuación es la definición de $f^{-1}(y)$, a partir de la cual se obtiene $f^{-1}(x)$.

(a)
$$\begin{aligned} f(x) &= x + 4 \\ y &= x + 4 \\ x &= y - 4 \\ f^{-1}(y) &= y - 4 \\ f^{-1}(x) &= x - 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ y &= 2x \\ x &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ y &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{y} \\ f^{-1}(y) &= \sqrt[3]{y} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Observe que la función f^{-1} en cada inciso es la función g del correspondiente inciso del ejemplo ilustrativo 1. ◀

▶ EJEMPLO 2 *Determinación de la inversa de una función y verificación de las ecuaciones del Teorema 2*

Encuentre $f^{-1}(x)$ para la función f del ejemplo 1(a) y verifique las ecuaciones del Teorema 2 para f y f^{-1}. Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo rectángulo de inspección.

Solución En el ejemplo 1(a) se mostró mediante la prueba de la recta horizontal que la función definida por

$$f(x) = 4x - 3$$

es uno a uno. Por tanto, f^{-1} existe. Para determinar $f^{-1}(x)$, se escribe la ecuación

$$y = 4x - 3$$

y se resuelve para x, obteniéndose

$$x = \frac{y + 3}{4}$$

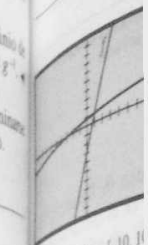


FIGURA 6.11

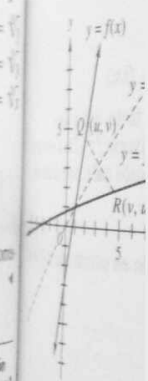


FIGURA 6.12

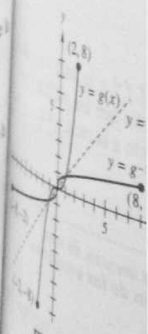
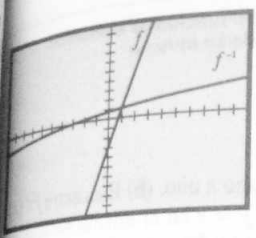


FIGURA 6.13



[-10, 10] por [-10, 10]
$f(x) = 4x - 3$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 3)$

FIGURA 6.11

Por tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 3}{4} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{4}$$

Ahora se verificarán las ecuaciones del Teorema 2.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(4x - 3) = \frac{(4x - 3) + 3}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x + 3}{4}\right) = 4\left(\frac{x + 3}{4}\right) - 3 = (x + 3) - 3 = x$$

La Figura 6.11 muestra las gráficas de f y f^{-1} trazadas en el mismo rectángulo de inspección. ◀

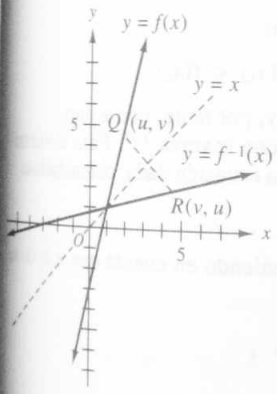


FIGURA 6.12

En la Figura 6.12 se presentan las gráficas de las funciones f y f^{-1} del ejemplo 2 con el punto $Q(u, v)$ en la gráfica de f y el punto $R(v, u)$ en la de f^{-1}. El segmento de recta QR en la figura es perpendicular a la recta $y = x$ y es bisectado por ésta. El punto Q es la *reflexión del punto R* con respeto a la recta $y = x$, e inversamente, el punto R es la *reflexión del punto Q* con respecto a la misma recta.

Si x y y son intercambiados en la ecuación $y = f(x)$ se obtiene la ecuación $x = f(y)$, y la gráfica de la ecuación $x = f(y)$ es una *reflexión de la gráfica* de la ecuación $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$. Como la ecuación $x = f(y)$ es equivalente a la ecuación $y = f^{-1}(x)$, la gráfica de la ecuación $y = f^{-1}(x)$ es una reflexión de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$. Por tanto, si una función tiene inversa, las gráficas de las funciones son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

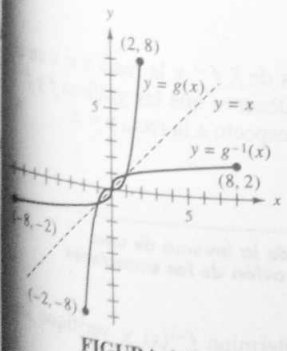


FIGURA 6.13

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Las funciones g y g^{-1} del ejemplo ilustrativo 6 están definidas por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

y

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \leq x \leq 8$$

Las gráficas de g y g^{-1} se muestran en la Figura 6.13. Observe que una gráfica es reflexión de la otra con respecto a la recta $y = x$. ◀

▸ EJEMPLO 3 *Prueba de que una función es monótona y determinación de su inversa*

Sea f la función definida por

$$f(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$

(a) Muestre que f es creciente y por tanto uno a uno. (b) Encuentre f^{-1}. (c) Trace las gráficas de f, f^{-1} y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección y observe que las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra, respecto de la recta $y = x$.

Solución

(a) Para mostrar que f es una función creciente, verifique que se cumpla la definición de función creciente.

Sean x_1 y x_2 dos números del dominio de f tales que $x_1 < x_2$. Como el dominio de f es el conjunto de números no negativos, se deduce que x_1 es no negativo y x_2 es positivo. Por tanto,

$$x_1 < x_2 \qquad \text{implica que} \qquad x_{12} < x_{22}$$

Pero $x_1^2 = f(x_1)$ y $x_2^2 = f(x_2)$, entonces

$$x_1 < x_2 \qquad \text{implica que} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

De aquí, f es una función creciente y, por tanto, uno a uno.

(b) Como f es uno a uno, entonces tiene inversa f^{-1}. Para determinar $f^{-1}(x)$, se sustituye $f(x)$ por y en la ecuación dada, obteniéndose

$$y = x^2 \qquad x \geq 0$$

Al resolver la ecuación para x, y teniendo en cuenta que $x \geq 0$, se tiene

$$x = \sqrt{y}$$

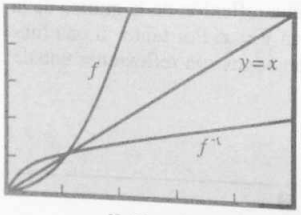
Así,

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Si se emplea x para la variable independiente, y se sustituye y por x, se obtendrá

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

(c) La Figura 6.14 muestra las gráficas de f, f^{-1} y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección. Observe que las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.



[0, 5] por [0, 5]
$f(x) = x^2$, $x > 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y $y = x$
FIGURA 6.14

▸ EJEMPLO 4 *Determinación de la inversa de una función y verificación de las ecuaciones del Teorema 2*

Para la ecuación del ejemplo 1(d), determine $f^{-1}(x)$ y verifique las ecuaciones del Teorema 2 para f y f^{-1}.

Solución Del ejemplo 1(d), se sabe que la función f definida por

$$f(x) = \frac{3x + 4}{x - 2}$$

es uno a uno, por tanto, tiene inversa. Para determinar $f^{-1}(x)$, se resuelve la ecuación

$$y = \frac{3x + 4}{x - 2}$$

para x:

$$\begin{aligned} y(x - 2) &= 3x + 4 \\ xy - 2y &= 3x + 4 \\ xy - 3x &= 2y + 4 \\ x(y - 3) &= 2y + 4 \\ x &= \frac{2y + 4}{y - 3} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{2y + 4}{y - 3} \qquad f^{-1}(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$$

Ahora se verificarán las ecuaciones del Teorema 2.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x + 4}{x - 2}\right) \qquad f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2x + 4}{x - 3}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{3x + 4}{x - 2}\right) + 4}{\frac{3x + 4}{x - 2} - 3} \qquad = \frac{3\left(\frac{2x + 4}{x - 3}\right) + 4}{\frac{2x + 4}{x - 3} - 2}$$

$$= \frac{2(3x + 4) + 4(x - 2)}{3x + 4 - 3(x - 2)} \qquad = \frac{3(2x + 4) + 4(x - 3)}{2x + 4 - 2(x - 3)}$$

$$= \frac{6x + 8 + 4x - 8}{3x + 4 - 3x + 6} \qquad = \frac{6x + 12 + 4x - 12}{2x + 4 - 2x + 6}$$

$$= \frac{10x}{10} \qquad = \frac{10x}{10}$$

$$= x \qquad = x$$

◀

EJERCICIOS 6.1

En los ejercicios 1 a 14, dibuje la gráfica de la función, y utilice la prueba de la recta horizontal para determinar si es uno a uno. Compruebe la gráfica en la calculadora gráfica o graficadora.

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $g(x) = 8 - 4x$
3. $f(x) = x^2 - 6$
4. $f(x) = 4 - x^2$
5. $g(x) = 4 - x^3$
6. $h(x) = x^3 + 1$
7. $f(x) = (x - 3)^4$
8. $g(x) = x^4 - 3$
9. $h(x) = \sqrt{x + 3}$
10. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
11. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 4}$
12. $g(x) = \dfrac{3}{(x - 1)^2}$
13. $g(x) = |x - 2|$
14. $f(x) = 5$

En los ejercicios 15 a 20, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de f y emplee la prueba de la recta horizontal para mostrar que la gráfica de f es uno a uno; (b) encuentre $f^{-1}(x)$; (c) verifique las ecuaciones del Teorema 2 para f y f^{-1}; (d) trace las gráficas de f, f^{-1} y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección y observe que las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

15. $f(x) = 3 - 4x$
16. $f(x) = 3x - 2$
17. $f(x) = x^3 + 2$
18. $f(x) = (x + 2)^3$
19. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$
20. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 2}$

En los ejercicios 21 a 28, (a) determine el contradominio de la función uno a uno f; (b) encuentre $f^{-1}(x)$ y determine el dominio f^{-1}; (c) trace las gráficas de f, f^{-1} y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección y observe que las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

21. $f(x) = x^2 - 5, x \geq 0$
22. $f(x) = 2 - x^2, x \leq 0$
23. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}, x \geq 3$
24. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}, x \geq 3$
25. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}, x \leq -3$
26. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}, x \leq -3$
27. $f(x) = \frac{1}{8}x^3, -1 \leq x \leq 1$
28. $f(x) = (2x + 1)^3, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

En los ejercicios 29 a 36, (a) demuestre que f es monótona y por tanto uno a uno; (b) encuentre $f^{-1}(x)$; (c) dibuje las gráficas de f y f^{-1} en el mismo sistema coordenado; (d) compruebe las gráficas de la parte (c) trazándolas en el mismo rectángulo de inspección.

29. $f(x) = 2x + 5$
30. $f(x) = 6 - \frac{1}{2}x$
31. $f(x) = (x + 1)^3$
32. $f(x) = (1 - x)^3$
33. $f(x) = (x - 2)^2, x \geq 2$
34. $f(x) = (x + 3)^2, x \leq -3$
35. $f(x) = 4 - x^2, x \leq 0$
36. $f(x) = x^2 - 9, x \geq 0$

En los ejercicios 37 y 38, muestre que la función f es su propia inversa.

37. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}, 0 \leq x \leq 4$
38. $f(x) = \dfrac{x + 6}{x - 1}$
39. Encuentre el valor de k tal que la función uno a uno f definida por

$$f(x) = \frac{x + 5}{x + k}$$

sea su propia inversa.

En los ejercicios 40 y 41, muestre que la función es su propia inversa para cualquier constante k.

40. $f(x) = \dfrac{x + k}{x - 1}$
41. $f(x) = \dfrac{kx + 1}{x - k}$
42. Muestre que la función definida por

$$f(x) = \frac{x + h}{kx - 1}$$

es su propia inversa para cualquier valor de las constantes h y k.

En los ejercicios 43 y 44, (a) muestre que la función no es uno a uno y, por tanto, no tiene inversa; (b) restrinja el dominio y obtenga dos funciones uno a uno f_1 y f_2 cada una con el mismo contradominio de f; encuentre $f_1^{-1}(x)$ y $f_2^{-1}(x)$ y determine sus dominios; (c) trace las gráficas de f_1 y f_1^{-1} en el mismo rectángulo

inspección; (e) trace las gráficas de f_2 y f_2^{-1} en el mismo rectángulo de inspección.

43. $f(x) = x^2 + 4$

44. $f(x) = x^2 - 9$

45. Dada $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \le x \le 9 \\ 27\sqrt{x} & \text{si } 9 < x \end{cases}$

Compruebe que f tiene una función inversa y encuentre $f^{-1}(x)$.

6.2 EXPONENTES Y NÚMERO e

OBJETIVOS

1. **Estudiar y aplicar las leyes de los exponentes de los números reales.**
2. **Aprender la notación científica.**
3. **Aprender cómo redondear un numeral a k dígitos significativos.**
4. **Resolver problemas que implican interés simple.**
5. **Aprender la fórmula para calcular el monto de una inversión a un interés compuesto.**
6. **Resolver problemas que implican interés compuesto.**
7. **Definir el número e.**
8. **Resolver problemas que implican interés compuesto continuamente.**

En esta sección se necesitará estar familiarizado con las leyes de los exponentes. Dichas leyes pueden revisarse en la Sección 1.2, donde se definió el exponente racional. En particular, 2^x ha sido definido para cualquier valor racional de x. Por ejemplo,

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \qquad 2^0 = 1 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

La definición de 2^x no es simple cuando x es irracional. Por ejemplo, ¿qué significa $2^{\sqrt{3}}$? Puede darse un argumento intuitivo que muestre cómo $2^{\sqrt{3}}$ puede ser interpretado. Para hacer esto, se utilizará el siguiente teorema, el cual se enuncia sin demostración.

TEOREMA 1

Si r y s son números racionales, entonces

(i) si $b > 1$, $r < s$ implica que $b^r < b^s$,
(ii) si $0 < b < 1$, $r < s$ implica que $b^r > b^s$.

Se mostrará cómo se aplica este teorema en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

En la parte (i) del Teorema 1, $b > 1$. Si $b = 4$, y como $2 < 3$, entonces $4^2 < 4^3$. En la parte (ii), $0 < b < 1$. Si $b = \frac{1}{3}$, y como $2 < 3$, entonces $(\frac{1}{3})^2 > (\frac{1}{3})^3$.

Una aproximación decimal para $\sqrt{3}$ puede obtenerse con precisión para cualquier número deseado de cifras decimales. Para cuatro cifras decimales, $\sqrt{3} \approx 1.7321$. Debido a que $1 < 1.7 < 2$, por el Teorema 1(i)

$$2^1 < 2^{1.7} < 2^2 \Leftrightarrow 2 < 2^{1.7} < 4$$

Como $1.7 < 1.73 < 1.8$, entonces

$$2^{1.7} < 2^{1.73} < 2^{1.8} \Leftrightarrow 3.2 < 2^{1.73} < 3.5$$

Debido a que $1.73 < 1.732 < 1.74$, se tiene

$$2^{1.73} < 2^{1.732} < 2^{1.74} \Leftrightarrow 3.32 < 2^{1.732} < 3.34$$

Puesto que $1.732 < 1.7321 < 1.733$, entonces

$$2^{1.732} < 2^{1.7321} < 2^{1.733} \Leftrightarrow 3.322 < 2^{1.7321} < 3.324$$

y así sucesivamente. En cada desigualdad hay una potencia de 2 para la cual el exponente es una aproximación decimal del valor de $\sqrt{3}$. En cada desigualdad sucesiva el exponente tiene un decimal más que el exponente de la desigualdad previa. Siguiendo este procedimiento indefinidamente, la diferencia entre los miembros izquierdo y derecho de la desigualdad puede hacerse tan pequeña como se desee. De ahí que nuestra intuición nos conduce a suponer que existe un valor de $2^{\sqrt{3}}$ que satisface cada desigualdad sucesiva conforme el procedimiento se continúa de modo indefinido. Una discusión semejante puede hacerse para cualquier potencia irracional de cualquier número positivo. Además, el Teorema 1 es válido si r y s son cualesquiera números reales.

Leonhard Euler fue el primer matemático en concebir cualquier número real como un exponente. La definición de un exponente real requiere del conocimiento del Cálculo y se presenta en muchos textos relativos a esta materia. Las leyes de los exponentes racionales también son válidas si los exponentes son cualesquiera números reales. Dichas leyes se resumen en el teorema siguiente, cuyas demostraciones requieren técnicas del Cálculo.

TEOREMA 2

Si a y b son cualesquiera números positivos, y x y y son cualesquiera números reales, entonces

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$

(ii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

▸ EJEMPLO 1 *Aplicación de las leyes de los exponentes para números reales*

Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

(a) $2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{12}}$ **(b)** $(7^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}$

Solución

(a) $2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{12}} = 2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}}$
$= 2^{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}$
$= 2^{3\sqrt{3}}$

(b) $(7^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}} = 7^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}$
$= 7^{\sqrt{100}}$
$= 7^{10}$ ◂

Cualquier número positivo puede escribirse en la forma

$$x = a \cdot 10^c \qquad \text{donde } 1 \le a < 10 \text{ y } c \text{ es un entero}$$

Un número expresado de este modo se dice que está escrito en **notación científica.** Dicha notación, una manera de expresar números muy grandes o muy pequeños empleando potencias de 10, es de gran importancia en física, química, astronomía y ciencias de la computación.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Cada uno de los números siguientes está escrito en notación científica:

$582 = (5.82)10^2$ $\qquad 0.627 = (6.27)10^{-1}$

$97\,136 = (9.7136)10^4$ $\qquad 0.00002381 = (2.381)10^{-5}$

$92\,900\,000\,000 = (9.29)10^{10}$ $\qquad 2.04 = (2.04)10^0$ ◂

Para escribir un número en notación científica, el primer factor se obtiene colocando el punto decimal después del primer dígito, de la izquierda, distinto de cero. El segundo factor es una potencia de 10, en la que el exponente se obtiene contando el número de dígitos que deben saltarse para pasar de la nueva posición del punto decimal a su posición original; si se desplaza el punto decimal a la derecha, el exponente es positivo; y si el desplazamiento es a la izquierda, el exponente es negativo. Verifique esta regla aplicándola a los números del ejemplo ilustrativo 2.

Si un número está representado en notación científica, puede escribirse de la forma normal recorriendo el punto decimal del primer factor, el número de lugares indicados por el exponente de la potencia de 10; el punto decimal se mueve a la derecha si el exponente es positivo; y a la izquierda si el exponente es negativo. Esta regla se aplica en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

$$(3.659)10^{4} = 36\,590$$
$$(8.007)10^{2} = 800.7$$
$$(9.46)10^{12} = 9\,460\,000\,000\,000$$
$$(3.92)10^{-3} = 0.00392$$
$$(4.018)10^{-2} = 0.04018$$
$$(1.6)10^{-19} = 0.00000\ 00000\ 00000\ 00016$$

Las calculadoras presentan en su pantalla números muy grandes y muy pequeños mediante la notación científica. El manual de la calculadora le indicará cómo introducir y leer en la pantalla un número escrito en notación científica.

La notación científica es una forma conveniente para representar los dígitos significativos de un numeral como 83 200. Por ejemplo, una medida de 83 200 pie puede escribirse como $(8.32)10^{4}$ pie para indicar que tiene tres dígitos significativos, esto quiere decir que la medición tiene una precisión de 100 pie. Si escribimos $(8.320)10^{4}$ pie, entonces se tienen cuatro dígitos significativos, y la medición tiene una precisión de 10 pie. De igual manera, si escribimos $(8.3200)10^{4}$ pie, se tienen cinco dígitos significativos, por lo que la medición tiene una precisión de un pie.

Se dice que un número, que tiene más de k dígitos significativos, se ha **redondeado a k dígitos significativos** si se reemplaza por el número, que tienen k dígitos significativos, al cual se aproxima más. Por ejemplo, el número 0.52368 se redondea a cuatro dígitos significativos como 0.5237, mientras que el número 78.142 se redondea a cuatro dígitos significativos como 78.14. Para redondear un número a cuatro dígitos significativos si éste posee cinco dígitos cuyo quinto dígito es 5, se hará mediante la siguiente convención: si el quinto dígito es

N. del R. Se emplea el símbolo

y el cuarto es par, se redondea al cuarto dígito; si el quinto dígito es 5 y el cuarto impar, se aumenta 1 al cuarto dígito. De acuerdo con la convención, 261.85 se redondea como 261.8, y 0.0039235 se redondea como 0.003924. Puede emplearse una convención semejante para redondear a cualquier número de dígitos significativos.

► EJEMPLO 2 *Operaciones con notación científica*

Utilice notación científica para realizar las siguientes operaciones:

(a) (0.00002350)(56 300), donde 56 300 tiene cuatro dígitos significativos.

(b) $\dfrac{(92\,900\,000\,000)\,(0.00000262)}{(0.000310)\,(581)}$, donde 92 900 000 000 tiene tres dígitos significativos.

Solución Primero se escribe cada número en notación científica.

(a) $[(2.350)10^{-5}][(5.630)10^{4}] = [(2.350)(5.630)][10^{-5} \cdot 10^{4}]$

$= (13.23)10^{-1}$

$= 1.323$

(b) $\dfrac{[(9.29)10^{10}][(2.62)10^{-6}]}{[(3.10)10^{-4}][(5.81)10^{2}]} = \dfrac{(9.29)(2.62)}{(3.10)(5.81)} \cdot \dfrac{10^{10} \cdot 10^{-6}}{10^{-4} \cdot 10^{2}}$

$= (1.35)10^{10-6+4-2}$

$= (1.35)10^{6}$ ◄

Los exponentes se pueden aplicar en el cálculo del interés que redituá una inversión. Esta aplicación nos conducirá a la definición de e, número que figura en varios campos del conocimiento.

Si se presta dinero a una tasa de interés de 0.12 (es decir, 12%) anual, entonces el débito del prestatario al final de un año es de \$1.12* por cada \$1 emprestado. En general, si la tasa de interés es r (esto es, $100r\%$) anual, entonces por cada \$1 emprestado el pago que debe hacerse al finalizar un año es de $\$(1 + r)$. Si se emprestan $\$P$ entonces la cantidad que se debe al cabo de un año es $\$P(1 + r)$.

Se considerarán varios tipos de interés. El **interés simple** es el interés que se percibe sólo por la cantidad original emprestada. En este caso no se paga ninguna cantidad por el interés acumulado. Por ejemplo, suponga que la tasa de interés simple sobre \$100 es de 10% anual. Por tanto, el prestamista recibiría \$10 al final de cada año.

* N. del R. Se emplea el símbolo \$ para denotar la unidad monetaria y puede interpretarse como pesos, dólares, soles, escudos, etcétera.

Ahora, suponga que se invierten $\$P$ a una tasa de interés simple de $100r\%$, entonces el interés al cabo de un año es de $\$Pr$. Si no se efectúan retiros durante n años, entonces el interés total es $\$Pnr$, y si $\$A$ es el monto total del depósito al finalizar n años, se tiene

$$\begin{aligned} A &= P + Pnr \\ &= P(1 + nr) \end{aligned}$$

En ocasiones, el interés simple se utiliza en inversiones o préstamos a corto plazo, posiblemente, en periodos de 30, 60 o 90 días. En tales casos, para simplificar los cálculos, se considera que un año tiene 360 días, y cada mes 30 días; así, 30 días equivalen a la doceava parte de un año.

▶ EJEMPLO 3 *Solución de un problema que implica interés simple*

Se hace un préstamo de \$500 por un periodo de 90 días a una tasa de interés simple de 16% anual. Determine la cantidad que debe pagarse al cabo de los 90 días.

Solución Se tiene $P = 500$, $r = 0.16$ y $n = \frac{90}{360}$, esto es, $n = \frac{1}{4}$. Por tanto, si $\$A$ es la cantidad a pagar,

$$\begin{aligned} A &= P(1 + nr) \\ &= 500[1 + \tfrac{1}{4}(0.16)] \\ &= 520 \end{aligned}$$

Conclusión: La cantidad a pagar es \$520.

Las tasas de interés habitualmente se fijan como tasas anuales, pero a menudo el interés se calcula varias veces en un año. Cuando esto ocurre, el interés para cada periodo se suma al capital y, a su vez, esta suma genera interés, a este último se le denomina **interés compuesto.** Si la palabra *interés* se emplea sin algún adjetivo, se supone que se trata del interés compuesto. Si el interés se calcula m veces al año, entonces la tasa anual debe dividirse entre m para determinar el interés para cada periodo. Por ejemplo, si se depositan \$100 en una cuenta de ahorros que paga 8% compuesto cada tres meses, entonces el monto de la cuenta al final del primer trimestre será

$$100\left(1 + \frac{0.08}{4}\right) = 100(1.02)$$

Para el segundo periodo trimestral se considera el capital como $100(1.02)$. Por tanto, el monto de la cuenta al cabo del segundo periodo será

$$[100(1.02)](1.02) = 100(1.02)^2$$

Al finalizar el tercer periodo trimestral el monto de la cuenta será de

$$[100(1.02)^2](1.02) = 100(1.02)^3$$

y así sucesivamente. Al final del n-ésimo periodo trimestral el monto de la cuenta será

$$100(1.02)^n$$

De forma generalizada, se tiene el teorema siguiente.

TEOREMA 3

Si $\$P$ se invierten a una tasa de interés anual de $100r\%$ compuesto m veces al año, y si A_n es el monto de la inversión al final de n periodos de interés, entonces

$$A_n = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

La demostración de este teorema requiere de inducción matemática, la cual se estudia en la Sección 12.5.

Si t es el número de años a que se invierten $\$P$ a una tasa de interés de $100r\%$ compuesto m veces por año, entonces el número de periodos de interés n es mt. Si $\$A$ es el monto total a los t años, entonces la fórmula del Teorema 3 puede escribirse como

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \tag{1}$$

▶ EJEMPLO 4 *Solución de un problema que implica interés compuesto*

Suponga que se depositan $400 en una cuenta de ahorros que paga un interés de 8% anual compuesto semestralmente. Si no se efectúan retiros ni depósitos, determine el monto al cabo de tres años.

Solución El interés se calcula dos veces al año; así $m = 2$. Como el tiempo es tres años, $t = 3$. Además, $P = 400$ y $r = 0.08$. Por tanto, si $\$A$ es monto del depósito al final de los 3 años, se tiene de (1)

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = 400\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{2(3)} = 400(1.04)^6 = 506.13$$

Conclusión: El monto del depósito al cabo de los 3 años es $506.13. ◀

La fórmula (1) proporciona el monto después de t años si P invierten a una tasa de interés de $100r\%$ compuesto m veces por año. Imagine que el interés se compone continuamente, es decir, suponga que en la fórmula (1) el número de periodos de interés por año crece sin límite. Por esto, se estudia el comportamiento de A conforme $m \to +\infty$. Como $mt = \frac{m}{r}(rt)$, la fórmula (1) puede escribirse como

$$A = P\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{rt}$$

En esta ecuación sea $x = \frac{m}{r}$, entonces

$$A = P\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{rt}$$

Como "$m \to +\infty$" es equivalente a "$x \to +\infty$", se examina

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \qquad \text{conforme } x \to +\infty$$

Se puede emplear la calculadora para determinar valores de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ cuando x toma valores cada vez más grandes. *Véase* la Tabla I para algunos de estos valores.

Tabla I

x	10	100	1 000	10 000	100 000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183

Esta tabla nos induce a sospechar que $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ probablemente se aproxime a un número finito cuando x crece sin límite. En efecto, esto ocurre y el número finito se denota por la letra e. Esta letra fue elegida por **Leonhard Euler.** El número e es un número irracional. Su valor puede expresarse con cualquier grado de precisión empleando series infinitas, las cuales se estudian en Cálculo. El valor de e con nueve cifras decimales es 2.718281828. Esto es,

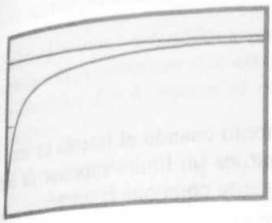
$$e \approx 2.718281828$$

Se pueden obtener potencias de e en la calculadora mediante la tecla $\boxed{e^x}$.

Para ilustrar gráficamente la conclusión anterior, trace la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

y la recta $y = e$ en el mismo rectángulo de inspección. La Figura 6.15 muestra las gráficas en el rectángulo de inspección de [0, 20] por [1, 3]. La recta es una asíntota horizontal de la gráfica de f, lo que significa que $f(x)$ se aproxima a e conforme x se incrementa sin límite.



[0, 20] por [1, 3]

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ y $y = e$

FIGURA 6.15

Al retomar la discusión del interés compuesto continuamente, se tiene del argumento anterior y de (2) la fórmula

$$A = Pe^{rt} \tag{3}$$

donde $A es el monto después de t años si $P se invierten a una tasa de $100r\%$ compuesto continuamente. Este valor de A es un límite superior para el monto determinado por (1) cuando el interés se compone frecuentemente, y puede emplearse como una aproximación en tal caso. Este hecho se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo, donde se compara el monto al cabo de un año cuando el interés se compone continuamente, con los correspondientes montos cuando el interés se compone mensual, quincenal y diariamente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Suponga que se emprestaron $5 000 a una tasa de interés de 12% compuesto mensualmente, y que el préstamo debe ser liquidado en un pago al final del año. Si $A es el monto a pagar, entonces de la fórmula (1) con $P = 5\,000$, $r = 0.12$, $m = 12$ y $t = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= 5\,000(1.01)^{12} \\ &= 5\,634.13 \end{aligned}$$

Si la tasa de interés de 12% es compuesta quincenalmente en vez de mensual, entonces de (1) con $m = 24$, se obtiene

$$\begin{aligned} A &= 5\,000\left(1 + \frac{0.12}{24}\right)^{24} \\ &= 5\,000(1.005)^{24} \\ &= 5\,635.80 \end{aligned}$$

En el caso de que la tasa de interés de 12% se componga diariamente, entonces de (1) con $m = 365$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= 5\,000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365} \\ &= 5\,000(1.0003)^{365} \\ &= 5\,637.37 \end{aligned}$$

Ahora suponga que el interés se compone continuamente a 12%. Como $P = 5\,000$, $r = 0.12$ y $t = 1$, entonces de la fórmula (3) se obtiene

$$A = 5\,000e^{0.12}$$
$$= 5\,637.484$$

Si se considera a \$5 637.50 como el monto cuando el interés es compuesto continuamente a 12%, este monto es un límite superior de los montos sin importar la frecuencia con que se compone el interés.

Si en (3), $P = 1$, $r = 1$ y $t = 1$, se tiene

$$A = e$$

el cual justifica la interpretación económica del número e como el monto de una inversión de \$1 durante un año a una tasa de interés de 100% compuesto continuamente.

▶ EJEMPLO 5 *Solución de un problema que implica interés compuesto continuamente*

Un banco anuncia que el interés en cuentas de ahorros se calcula a 6% anual compuesto diariamente. Si se depositan \$100 en una cuenta de ahorros en este banco, encuentre **(a)** una aproximación del monto al cabo de un año considerando la tasa de interés a 6% compuesto continuamente y **(b)** el monto exacto al finalizar un año considerando una tasa de interés anual de 6% compuesto 365 veces al año.

Solución

(a) De (3), con $P = 100$, $r = 0.06$, $t = 1$ y si \$$A$ es el monto, se tiene

$$A = 100e^{0.06}$$
$$= 106.18$$

Así, \$106.18 es un monto aproximado para el depósito al final de un año.

(b) De (1), con $P = 100$, $r = 0.06$, $m = 365$, $t = 1$, y si \$$A_{365}$ es el monto, se obtiene

$$A_{365} = 100\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365}$$
$$= 100(1.0001644)^{365}$$
$$= 106.18$$

Conclusión: El monto exacto del depósito al cabo de un año es \$106.18.

EJERCICIOS 6.2

En los ejercicios 1 a 4, utilice una calculadora para determinar la potencia con tres dígitos significativos. En los ejercicios 3 y 4, exprese el resultado en notación científica.

1. (a) $(35.7)^{2.5}$ (b) $(3.78)^{-5}$ (c) $(0.261)^{8}$ (d) $(0.403)^{-3}$
2. (a) $(6.23)^{3.5}$ (b) $(15.7)^{-4}$ (c) $(0.362)^{6}$ (d) $(0.916)^{-2}$
3. (a) $(4.26)^{25}$ (b) $(0.0312)^{5}$ (c) $(0.00172)^{-12}$ (d) $(324)^{-10}$
4. (a) $(78.5)^{15}$ (b) $(0.00247)^{8}$ (c) $(0.0311)^{-7}$ (d) $(589)^{-12}$

En los ejercicios 5 a 12, simplifique la expresión aplicando las leyes de exponentes. En los ejercicios 7 y 8, x es un número real.

5. (a) $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{50}}$ (b) $(e^{\sqrt{2}})^{\sqrt{50}}$
6. (a) $2^{\sqrt{12}} \cdot 2^{\sqrt{27}}$ (b) $(e^{\sqrt{12}})^{\sqrt{27}}$
7. (a) $(5^{\sqrt{15}})^{\sqrt{6}}$ (b) $5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 5^{\sqrt[3]{x^2}}$
8. (a) $(10^{\sqrt{10}})^{\sqrt{5}}$ (b) $(10^{\sqrt{3x}})^{\sqrt{15x}}$
9. (a) $\dfrac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{18}}}$ (b) $\dfrac{250^{\sqrt{5}}}{10^{\sqrt{20}}}$
10. (a) $\dfrac{3^{\sqrt{45}}}{9^{\sqrt{20}}}$ (b) $\dfrac{14^{\sqrt{98}}}{28^{\sqrt{72}}}$
11. $\dfrac{e^2 \cdot e^{\sqrt{54}}}{e^{\sqrt{24}}}$
12. $\left(\dfrac{e^{\sqrt{14}}}{e^3 \cdot e^{\sqrt{7}}}\right)^2$

En los ejercicios 13 a 16, escriba el número en notación científica.

13. (a) 52.60 (b) 0.0061 (c) 172 000 (3 dígitos significativos) (d) 172 000 (4 dígitos significativos)
14. (a) 43 851 (b) 0.276 (c) 3 400 (2 dígitos significativos) (d) 3 400 (3 dígitos significativos)
15. (a) 0.03960 (b) 0.0000080022 (c) 1.723 (d) 426.0
16. (a) 0.00006405 (b) 0.0001030 (c) 98.0 (d) 7 820.0

En los ejercicios 17 y 18, emplee la notación científica y una calculadora para realizar las operaciones. Considere tres dígitos significativos para cada número.

17. (a) $(0.0470)(320\,000)^2$
    (b) $\dfrac{(180\,000)^3\sqrt{0.0000450}}{623\,000}$
18. (a) $\dfrac{(0.0000831)^2}{(140)^3}$
    (b) $\dfrac{(256\,000\,000)^2\sqrt[3]{0.000712}}{(0.000348)^3\sqrt{5\,100}}$

En los ejercicios 19 a 21, emplee notación científica y una calculadora.

19. Determine la distancia de la Tierra al Sol en metros, si el Sol está a $(9.29)10^7$ mi de la Tierra y una milla equivale a 1.61 km.
20. Determine la distancia de la Tierra a la estrella que está a 7.00 años luz si la velocidad de la luz es $(1.86)10^5$ mi/s y 1 año equivale a 365 días.
21. Determine la masa de la Tierra en toneladas, si el número de gramos de la masa de la Tierra es $(5.97)10^{27}$ y 1 g es igual a $(2.205)10^{-3}$ lb.

∫∫ dy/dx *Los ejercicios 22 a 24 se basan en lo siguiente: En Cálculo se demuestra que*

$$(1+z)^{1/z} \to e \quad \text{conforme} \quad z \to 0$$

Observe que $(1+z)^{1/z}$ *puede obtenerse de* $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *escribiendo* $x = \dfrac{1}{z}$.

22. Utilice una calculadora para obtener los valores de $(1+z)^{1/z}$ cuando $z = 0.001$ y $z = -0.001$. Después obtenga una aproximación con tres decimales del número e y utilizando estos valores halle el valor promedio de $(1.001)^{1\,000}$ y $(0.999)^{-1\,000}$.
23. Emplee una calculadora para obtener los valores de $(1+z)^{1/z}$ cuando $z = 0.0001$ y $z = -0.0001$. Después obtenga una aproximación con cuatro decimales del número e y usando estos valores halle el valor promedio de $(1.0001)^{10\,000}$ y $(0.9999)^{-10\,000}$.
24. Trace la gráfica de la función definida por

$$f(x) = (1+x)^{1/x}$$

en el rectángulo de inspección de $[-0.5, 0.5]$ por $[1, 3]$. Como $f(0)$ no está definido, entonces la gráfica se rompe en $x = 0$. Utilice el aumento (*zoom in*) de la graficadora para mostrar que si se redefine la función en 0 como $f(0) = e$, entonces no existe rompimiento de la gráfica en $x = 0$ (es decir, la función f es continua en $x = 0$).

25. Se realiza un préstamo de \$2 000 a una tasa de interés simple de 12% anual. Determine el monto a pagar si el periodo del préstamo es de (**a**) 90 días; (**b**) 6 meses; (**c**) 1 año.

26. Resuelva el ejercicio 25 si el préstamo es de \$1 500 y la tasa es de 10% anual.

27. Un hombre emprestó \$10 000 a una tasa de interés anual de 9% con la condición de que el interés fuese pagado mensualmente. Sin embargo, el prestatario no hizo los pagos del interés al mes, y así, el capital con el interés a 9% compuesto mensualmente se venció al final del año. ¿Cuál fue el monto adeudado?

28. Un hombre, al cumplir 25 años, heredó \$5 000. Si invirtió esta cantidad a 8% compuesto anualmente, ¿cuánto deberá recibir cuando se retire a los 65 años?

29. Determine el monto al final de 4 años de una inversión de \$1 000 si la tasa de interés anual es de 8% y (**a**) se gana interés simple; (**b**) el interés se compone anualmente; (**c**) el interés se compone semestralmente; (**d**) el interés se compone trimestralmente; (**e**) el interés se compone continuamente.

30. Encuentre el monto de una inversión de \$500 al cabo de dos años si la tasa de interés anual es 6% y (**a**) se gana interés simple; (**b**) el interés se compone anualmente; (**c**) el interés se compone semestralmente; (**d**) el interés se compone mensualmente; (**e**) el interés se compone continuamente.

31. Una inversión de \$5 000 reditúa interés a una tasa de 16% anual y el interés se paga al término del año. Determine el interés ganado durante el primer año si (**a**) el interés se compone trimestralmente y (**b**) el interés se compone continuamente.

32. Se paga un préstamo de \$2 000 en un solo pago al final de un año con una tasa de interés anual de 12%. Determine el monto total pagado si (**a**) el interés se compone trimestralmente y (**b**) el interés se compone continuamente.

33. Se realiza un depósito de \$1 000 en un banco de ahorro que fija el interés de las cuentas en una tasa de 9% anual compuesta diariamente. Determine una aproximación del monto al cabo de un año considerando la tasa de interés como 9% compuesto continuamente y (**b**) el monto exacto al final de un año teniendo en cuenta una tasa de interés anual de 9% compuesto 365 veces por año.

34. Resuelva el ejercicio 33 si el banco fija el interés en una tasa anual de 7% compuesta diariamente. (**a**) considere la tasa como 7% compuesta continuamente y (**b**) considere una tasa de interés anual de 7% compuesta 365 veces por año.

35. ¿Cuánto debe depositarse en una cuenta de ahorros si se desea tener \$5 000 en la cuenta al cabo de 5 años y si la tasa de interés anual es de 8% compuesto trimestralmente.

36. Al término de 4 años, una cuenta de ahorros tiene un saldo de \$3 000. Se efectuó un depósito al inicio del periodo de 4 años sin hacer ningún retiro. ¿De cuánto fue el depósito original si la tasa de interés anual es de 6% compuesto mensualmente?

37. Resuelva el ejercicio 35 si la tasa de interés anual es de 8% compuesto continuamente.

38. Resuelva el ejercicio 36 si la tasa de interés es de 6% anual compuesto continuamente.

39. $\iint \frac{dy}{dx}$ En Cálculo se demuestra que

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

se aproxima a e^2 conforme x crece sin límite. Muestre este enunciado trazando la gráfica de una función f elegida adecuadamente y su asíntota horizontal en el mismo rectángulo de inspección. Defina la función f y escriba una ecuación de la asíntota. Describa por qué la gráfica ilustra el enunciado.

40. $\iint \frac{dy}{dx}$ Siga las instrucciones del ejercicio 39 para el enunciado: en Cálculo se demuestra que

$$\left(1 + \frac{0.5}{x}\right)^x$$

se aproxima a $\sqrt{e}$ conforme x crece sin límite.

41. Describa los tres tipos de interés: simple, compuesto trimestralmente y compuesto continuamente. Para la descripción, indique qué tasa de interés simple y qué tasa de interés compuesto trimestralmente sería necesaria para que una inversión reditúe el mismo interés anual que 10% compuesto continuamente.

6.3 FUNCIONES EXPONENCIALES

OBJETIVOS

1. **Definir la función exponencial de base b.**
2. **Dibujar la gráfica de la función exponencial de base b.**
3. **Definir la función exponencial natural.**
4. **Dibujar la gráfica de la función exponencial natural.**
5. **Resolver problemas que implican crecimiento exponencial.**
6. **Resolver problemas que implican decrecimiento exponencial.**
7. **Resolver problemas que implican crecimiento limitado.**
8. **Resolver problemas que implican crecimiento logístico.**

En Cálculo se estudiarán problemas que implican crecimiento y decrecimiento exponencial, los cuales son importantes para la construcción de modelos matemáticos que contienen funciones exponenciales de base e. Se empezará la discusión de funciones exponenciales considerando tales funciones con cualquier número positivo como base.

Si $b > 0$, entonces a cada número real x le corresponde un solo número real b^x. Así, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN **Función exponencial de base b**

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la **función exponencial de base b** es la función f definida por

$$f(x) = b^x$$

El dominio de f es el conjunto de números reales, y su contradominio es el conjunto de números positivos.

Observe que si $b = 1$, entonces b^x se convierte en 1^x, y como para cualquier x, $1^x = 1$, se tiene una función constante. Por esta razón, se impone la condición de que $b \neq 1$ en la definición anterior.

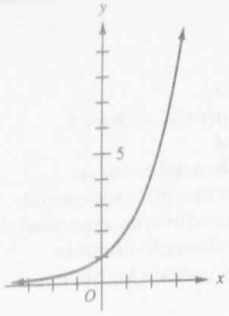
En los dos ejemplos ilustrativos siguientes se consideran las gráficas de la función exponencial con bases 2 y $\frac{1}{2}$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La función exponencial con base 2 está definida por

$$F(x) = 2^x$$

La Tabla 1 presenta algunos valores racionales de x con los correspondientes valores de la función.



$F(x) = 2^x$

FIGURA 6.16

Tabla 1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

La gráfica de la Figura 6.16 se dibuja mediante la localización de los puntos cuyas coordenadas están dadas por la Tabla 1, y uniéndolos con una curva. La función es creciente según la Figura 6.16, lo cual se deduce del Teorema 1(i) de la Sección 6.2 con r y s números reales, y de la definición de función creciente dada en la Sección 6.1.

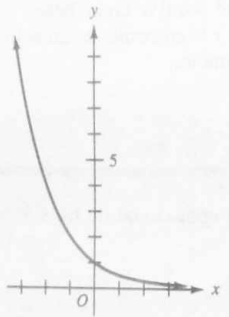
Note que

$$2^x \to 0^+ \qquad \text{conforme } x \to -\infty$$

esto es, 2^x se aproxima a 0 mediante valores mayores que cero, conforme x decrece sin límite. Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de F. Además,

$$2^x \to +\infty \qquad \text{conforme } x \to +\infty$$

esto es, 2^x crece sin límite cuando x crece también sin límite.



$G(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

FIGURA 6.17

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La función exponencial con base $\frac{1}{2}$ es la función G tal que

$$G(x) = (\tfrac{1}{2})^x$$

Tabla 2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

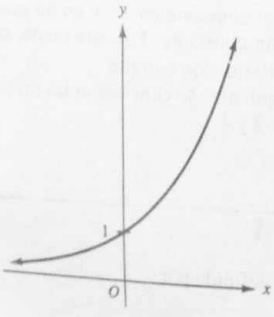
La Tabla 2 muestra valores de la función para algunos valores racionales de x. Mediante la localización de los puntos con estas coordenadas y uniéndolos con una curva, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 6.17. La función es decreciente, lo cual se deduce del Teorema 1(ii) de la Sección 6.2, con r y s números reales, y la definición de función creciente dada en la Sección 6.1. Como

$$(\tfrac{1}{2})^x \to 0^+ \qquad \text{conforme } x \to +\infty$$

el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de G. Además,

$$(\tfrac{1}{2})^x \to +\infty \qquad \text{conforme } x \to -\infty$$

esto es, $(\frac{1}{2})^x$ crece sin límite conforme x decrece sin límite.



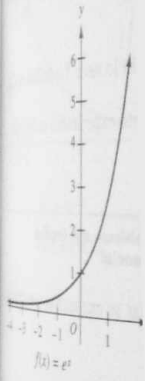
$f(x) = b^x, b > 1$

FIGURA 6.18

La Figura 6.18 muestra la gráfica de la función exponencial de base b cuando $b > 1$. La función es creciente. En la Figura 6.19, se

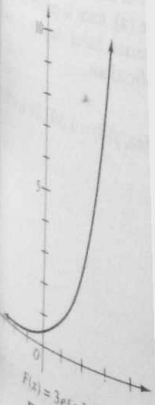
$f(x) = b^x, 0 < b < 1$

FIGURA 6.19



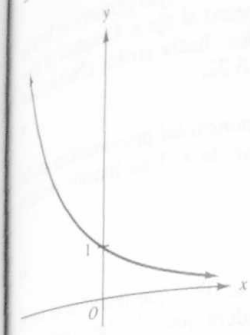
$f(x) = e^x$

FIGURA 6.20



$F(x) = 3e^{x-2}$

FIGURA 6.21



$f(x) = b^x, 0 < b < 1$

FIGURA 6.19

ne la gráfica de la función exponencial de base b cuando $0 < b < 1$. La función es decreciente.

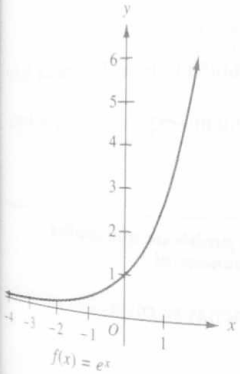
De la definición de función exponencial de base b, la base puede ser cualquier número positivo diferente de 1. Cuando la base es e, se tiene la *función exponencial natural.*

DEFINICIÓN Función exponencial natural

La **función exponencial natural** es la función f definida por

$$f(x) = e^x$$

El dominio de la función exponencial natural es el conjunto de números reales, y su contradominio es el conjunto de números positivos.



$f(x) = e^x$

FIGURA 6.20

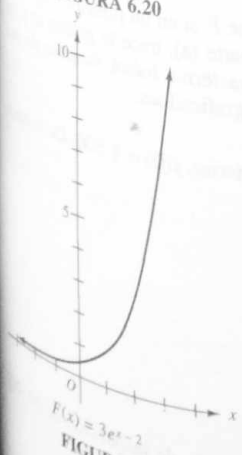
▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La Tabla 3 presenta algunos valores de x y los valores correspondientes de la función exponencial natural obtenidos con una calculadora. Para dibujar la gráfica de la función exponencial natural, se localizan los puntos cuyas coordenadas se dan en la Tabla 3 y se unen con una curva. Así, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 6.20.

Tabla 3

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	−0.5	−1	−2
e^x	1	1.6	2.7	4.5	7.4	12.2	0.6	0.4	0.1

◀



$F(x) = 3e^{x-2}$

FIGURA 6.21

▶ EJEMPLO 1 *Dibujo de la gráfica de una función exponencial mediante transformaciones geométricas*

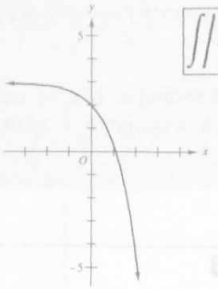
Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones mediante transformaciones geométricas de la gráfica de $f(x) = e^x$.

(a) $F(x) = 3e^{x-2}$ **(b)** $G(x) = -e^x + 3$

Solución

(a) Primero se hará una expansión vertical de la gráfica de f mediante el factor 3, y después una traslación horizontal de 2 unidades a la derecha. Así, se obtiene la gráfica de F mostrada en la Figura 6.21.

(b) Para la gráfica de G, el signo menos indica que primero se hará la reflexión de la gráfica de f con respecto al eje x. Después se hace una traslación vertical de 3 unidades hacia arriba, obteniéndose así la gráfica mostrada en la Figura 6.22.



$G(x) = -e^x + 3$

FIGURA 6.22

El *crecimiento y decrecimiento exponencial* proporcionan modelos matemáticos que implican potencias de e. Una función definida mediante una ecuación de la forma

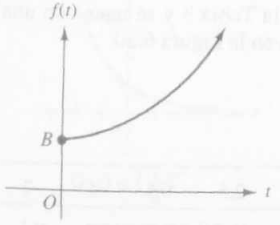
$$f(t) = Be^{kt} \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

donde B y k son constantes positivas se dice que describe el **crecimiento exponencial.** En Cálculo aprenderá que tales funciones resultan cuando el índice de crecimiento de una cantidad es proporcional a su magnitud. Para dibujar la gráfica de $f(t) = Be^{kt}$, observe que $f(0) = B$ y $f(t)$ es siempre positiva. Además,

$$Be^{kt} \longrightarrow +\infty \qquad \text{conforme } t \longrightarrow +\infty$$

Así, Be^{kt} crece sin límite conforme t también lo hace. La gráfica de (1) se muestra en la Figura 6.23.

El siguiente ejemplo implica crecimiento exponencial en biología.



$f(t) = Be^{kt}$

FIGURA 6.23

► EJEMPLO 2 *Solución de un problema que implica crecimiento exponencial*

En cierto cultivo bacteriano, si $f(t)$ bacterias se encuentran presentes en los t minutos, entonces

$$f(t) = Be^{0.04t}$$

donde B es una constante. **(a)** Determine B si en un principio hay 1 500 bacterias. **(b)** Con el valor de B de la parte (a), trace la gráfica de f en $[0, 70]$ por $[0, 17\,000]$. Determine algebraicamente cuántas bacterias habrá después de una hora y compruebe su respuesta en una graficadora.

Solución

(a) Como hay inicialmente 1 500 bacterias, $f(0) = 1\,500$. De la ecuación que define $f(t)$

$$f(x) = Be^{0.04(0)}$$

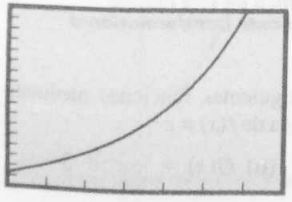
$$1\,500 = Be^0$$

$$1\,500 = B$$

(b) Con el valor de B de la parte (a)

$$f(t) = 1\,500e^{0.04t}$$

La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 70]$ por $[0, 17\,000]$ se muestra en la Figura 6.24.



[0, 70] por [0, 17 000]
$f(t) = 1\,500e^{0.04t}$

FIGURA 6.24

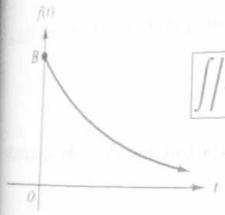
(c) El número de bacterias después de una hora es $f(60)$, y de la ecuación de la parte (b)

$$f(60) = 1\,500e^{0.04(60)}$$
$$= 1\,500e^{2.4}$$
$$= 16\,535$$

Conclusión: Después de una hora, habrá 16 535 bacterias en el cultivo. Esto se puede comprobar en la graficadora empleando el rastreo y aumento en la gráfica de la Figura 6.24. ◀

Una función definida mediante una ecuación de la forma

$$f(t) = Be^{-kt} \qquad t \geq 0 \tag{2}$$



$f(t) = Be^{-kt}$

FIGURA 6.25

donde B y k son constantes positivas, se dice que describe el **decrecimiento exponencial.** El decrecimiento exponencial ocurre cuando la razón de disminución es proporcional a su magnitud, como se establece en Cálculo. Por ejemplo, se sabe por experimentos que el índice de decrecimiento del radio es proporcional a la cantidad de este elemento presente en un momento específico. La gráfica de (2) se muestra en la Figura 6.25. Observe que

$$Be^{-kt} \to 0^+ \qquad \text{conforme } t \to +\infty$$

El ejemplo siguiente implica decrecimiento exponencial, donde el valor de cierto equipo disminuye exponencialmente.

▶ EJEMPLO 3 *Solución de un problema que implica decrecimiento exponencial*

Si $\$V(t)$ es el valor de un cierto equipo t años después de su compra, entonces

$$V(t) = Be^{-0.20t}$$

donde B es una constante. Si el equipo fue comprado por \$8 000, ¿cuál será su valor en 2 años? Compruebe la respuesta en una graficadora.

Solución Como el equipo se compró en \$8 000, $V(0) = 8\,000$. De la ecuación que define $V(t)$

$$V(0) = Be^{-0.20(0)}$$
$$8\,000 = Be^0$$
$$8\,000 = B$$

Por tanto, con $B = 8\,000$ se tiene

$$V(t) = 8\,000e^{-0.20t}$$

[0, 10] por [0, 10 000]
$V(t) = 8\,000e^{-0.2t}$
FIGURA 6.26

El valor del equipo después de 2 años es $V(2)$, y de la ecuación anterior

$$V(2) = 8\,000e^{-0.20(2)}$$
$$= 8\,000e^{-0.40}$$
$$= 5\,362.56$$

Conclusión: El valor del equipo en 2 años será \$5 362.56.

Para comprobar la respuesta en la graficadora, se traza la gráfica de $V(t) = 8\,000e^{-0.20t}$ en el rectángulo de inspección de [0, 10] por [0, 10 000] mostrada en la Figura 6.26. Empleando el rastreo de la graficadora ubique el cursor en donde $t = 2$, y encuentre el valor de la función 5 362.56.

Otro modelo matemático que contiene potencias de e está dado por la función definida por

$$f(t) = A(1 - e^{-kt}) \qquad t \geq 0$$

donde A y k son constantes positivas. Esta función describe el crecimiento **limitado.** Como

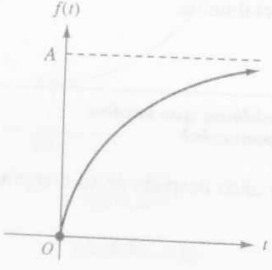
$$A(1 - e^{-kt}) = A - Ae^{-kt}$$

y $Ae^{-kt} \to 0^+$ conforme $t \to +\infty$, se deduce que

$$A(1 - e^{-kt}) \to A^- \qquad \text{conforme } t \to +\infty$$

Por tanto, la gráfica de f tiene como una asíntota horizontal a la recta A unidades arriba del eje t. Observe que

$$f(0) = A(1 - e^0)$$
$$= 0$$



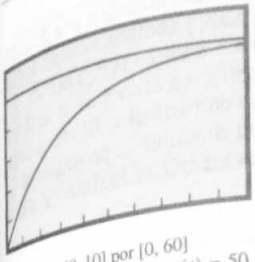
$f(t) = A(1 - e^{-kt})$
FIGURA 6.27

A partir de esta información se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 6.27. Esta gráfica es denominada, algunas veces, **curva de aprendizaje.** El nombre de esta curva se hace evidente cuando $f(t)$ representa la eficiencia con la que una persona realiza un trabajo. A medida que aumenta la experiencia de una persona, la eficiencia se incrementa rápidamente al principio y después disminuye cuando la experiencia adicional tiene poco efecto sobre la habilidad con la cual se efectúa la tarea.

▸ EJEMPLO 4 *Solución de un problema que implica crecimiento limitado*

Un trabajador común de cierta fábrica puede producir $f(t)$ unidades por día después de t días de haber ingresado al trabajo, donde

$$f(t) = 50(1 - e^{-0.34t})$$



[0, 10] por [0, 60]
$f(t) = 50(1 - e^{-0.34t})$ y $g(t) = 50$
FIGURA 6.28

(a) ¿Cuántas unidades por día puede producir el trabajador después de 7 días de trabajo? **(b)** ¿Cuántas unidades por día se esperaría que produzca el trabajador? **(c)** Emplee la respuesta de la parte (b) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f y trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

Solución

(a) Se desea encontrar $f(7)$. De la ecuación que define a $f(t)$

$$\begin{aligned} f(7) &= 50(1 - e^{-0.34(7)}) \\ &= 50(1 - e^{-2.38}) \\ &= 50(1 - 0.093) \\ &= 45 \end{aligned}$$

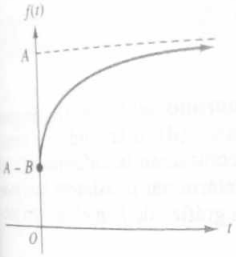
Conclusión: El trabajador puede producir 45 unidades por día después de 7 días de trabajo.

(b) Como $e^{-0.34t} \to 0^+$ conforme $t \to +\infty$, se infiere que

$$50(1 - e^{-0.34t}) \to 50^- \quad \text{conforme } t \to +\infty$$

Conclusión: Se espera que el trabajador produzca 50 unidades por día.

(c) La asíntota horizontal de la gráfica de f es la recta $g(t) = 50$. La Figura 6.28 muestra esta recta y la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [0, 10] por [0, 60]. ◀



$f(t) = A - Be^{-kt}$
FIGURA 6.29

El crecimiento limitado también puede describirse con una función definida por

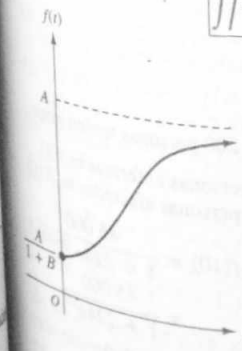
$$f(t) = A - Be^{-kt} \quad t \geq 0$$

donde A, B y k son constantes positivas. Para esta función $f(0) = A - B$. La gráfica se muestra en la Figura 6.29. En Cálculo, puede demostrarse que el crecimiento limitado ocurre cuando una cantidad crece a una razón proporcional a la diferencia entre un número fijo A y su magnitud, donde el número fijo sirve como límite superior.

Ahora, considere el crecimiento de una población que es afectada por el ambiente que impone un límite superior sobre su tamaño. Por ejemplo, el espacio o la reproducción pueden ser factores que están limitados por el medio. En tales casos, un modelo matemático de la forma (1) no se aplica, ya que el crecimiento de la población no sobrepasa cierto punto. Un modelo que considera factores ambientales está dado por la función definida como

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}} \quad t \geq 0$$

donde A, B y k son constantes positivas. La Figura 6.30 muestra la gráfica de esta función, la cual se denomina curva de **crecimiento logístico.**



$f(t) = \dfrac{A}{1 + Be^{-Akt}}$
FIGURA 6.30

Observe que cuando t es pequeño, la gráfica es parecida a una de crec... miento exponencial, como la de la Figura 6.23, y conforme t crece, la cur... va es análoga a la de crecimiento limitado mostrada en la Figura 6.29.

Una aplicación del crecimiento logístico en economía es la distri... bución de la información de un producto en particular. El crecimien... logístico es empleado por biólogos para describir la propagación d... una enfermedad y por los sociólogos para explicar la difusión de u... rumor o una broma.

▸ EJEMPLO 5 *Solución de un problema que implica crecimiento logístico*

En cierta comunidad, la propagación del virus de la gripe fue tal que... después de t semanas de su brote $f(t)$ personas se habían contagiado... donde

$$f(t) = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.9t}}$$

¿Cuántas personas tenían gripe (**a**) al momento del brote; (**b**) despué... de 3 semanas, y (**c**) después de 10 semanas? (**d**) Si la epidemia conti... núa indefinidamente, ¿cuántas personas contraerán la enfermedad? (... Utilice la respuesta de la parte (d) para determinar la asíntota horizon... tal de la gráfica de f y trace esta recta y la gráfica de f en el mismo re... tángulo de inspección.

Solución

(a) El número de personas que tenían gripe al momento del brote es... $f(0)$, y

$$f(0) = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.9(0)}}$$
$$= \frac{45\,000}{1 + 224}$$
$$= 200$$

Conclusión: Al momento del brote 200 personas tenían gripe.

(b) Después de 3 semanas el número de personas enfermas es $f(3)$.

(c) Después de 10 semanas el número de personas afectadas es $f(10)$.

$$\textbf{(b)}\ f(3) = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.9(3)}} = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-2.7}} = 2\,803$$

$$\textbf{(c)}\ f(10) = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.9(10)}} = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-9}} = 43\,790$$

Conclusión: **(b)** Después de 3 semanas, 2 803 personas tenían gripe y **(c)** después de 10 semanas 43 790 personas se contagiarán.

[0, 11] por [0, 50 000]
$f(t) = \frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.9t}}$ y $g(t) = 45$ (...

FIGURA 6.31

EJERCICIOS 6

En los ejercicios 1 a 8, dibuje ... exponencial. Compruebe la gráf...

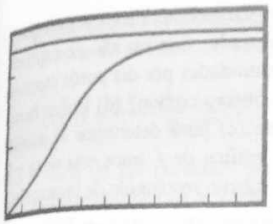
1. $f(x) = 3^x$
3. $g(x) = 3^{-x}$
5. $F(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
7. $G(x) = e^{-x}$

En los ejercicios 9 a 14, dibuje l... f mediante transformaciones ge... de f

9. (a) $F(x) = 3^{x-4}$, $f(x) = 3^x$
   (b) $F(x) = 3^x - 4$, $f(x) =$
10. (a) $F(x) = 2^{x+3}$, $f(x) = 2^x$
    (b) $F(x) = 2^x + 3$, $f(x) =$
11. (a) $F(x) = -e^{x+2}$, $f(x) =$
    (b) $F(x) = -e^x + 2$, $f(x)$
12. (a) $F(x) = -2e^{x-1}$, $f(x) =$
    (b) $F(x) = -2e^x - 1$, $f(x)$
13. (a) $F(x) = 2^{x+1} + 3$, $f(x) =$
    (b) $F(x) = e^{x-3} - 4$, $f(x) =$
14. (a) $F(x) = 3^{x-5} - 2$, $f(x) =$
    (b) $F(x) = e^{x+4} + 1$, $f(x) =$

En los ejercicios 15 a 18, dibuje l... ción exponencial. Verifique la gráf... ca.

15. $f(x) = 10e^{0.2x}$



[0, 11] por [0, 50 000]
$f(t) = \dfrac{45\,000}{1 + 224e^{-0.9t}}$ y $g(t) = 45\,000$

FIGURA 6.31

(d) Como

$$224e^{-0.9t} \to 0^+ \quad \text{conforme } t \to +\infty$$

se concluye que

$$\frac{45\,000}{1 + 224e^{-0.9t}} \to 45\,000 \quad \text{conforme } t \to +\infty$$

Conclusión: Aproximadamente 45 000 personas contraerán la enfermedad si la epidemia continúa indefinidamente.

(e) La asíntota horizontal es la recta $g(t) = 45\,000$. Esta recta y la gráfica de f, trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 11] por [0, 50 000], se muestran en la Figura 6.31. ◀

EJERCICIOS 6.3

En los ejercicios 1 a 8, dibuje la gráfica de la función exponencial. Compruebe la gráfica en la graficadora.

1. $f(x) = 3^x$
2. $g(x) = 4^x$
3. $g(x) = 3^{-x}$
4. $f(x) = 4^{-x}$
5. $F(x) = (\frac{1}{5})^x$
6. $G(x) = 10^x$
7. $G(x) = e^{-x}$
8. $F(x) = e^{2x}$

En los ejercicios 9 a 14, dibuje la gráfica de la función F mediante transformaciones geométricas de la gráfica de f.

9. (a) $F(x) = 3^{x-4}, f(x) = 3^x$
   (b) $F(x) = 3^x - 4, f(x) = 3^x$
10. (a) $F(x) = 2^{x+3}, f(x) = 2^x$
    (b) $F(x) = 2^x + 3, f(x) = 2^x$
11. (a) $F(x) = -e^{x+2}, f(x) = e^x$
    (b) $F(x) = -e^x + 2, f(x) = e^x$
12. (a) $F(x) = -2e^{x-1}, f(x) = e^x$
    (b) $F(x) = -2e^x - 1, f(x) = e^x$
13. (a) $F(x) = 2^{x+1} + 3, f(x) = 2^x$
    (b) $F(x) = e^{x-3} - 4, f(x) = e^x$
14. (a) $F(x) = 3^{x-5} - 2, f(x) = 3^x$
    (b) $F(x) = e^{x+4} + 1, f(x) = e^x$

En los ejercicios 15 a 18, dibuje la gráfica de la función exponencial. Verifique la gráfica en la graficadora.

15. $f(x) = 10e^{0.2x}$
16. $g(x) = 10e^{0.1x}$
17. $g(x) = 10e^{-0.1x}$
18. $f(x) = 10e^{-0.2x}$
19. Dibuje las gráficas de $y = 3^x$ y $x = 3^y$ en el mismo sistema coordenado.
20. Dibuje las gráficas de $y = e^x$ y $x = e^y$ en el mismo sistema coordenado.

En los ejercicios 21 a 33, resuelva el problema empleando un modelo matemático que implique una función exponencial. Escriba una conclusión.

21. El valor de cierta máquina t años después de su compra es $\$V(t)$, donde $V(t) = ke^{-0.3t}$ y k es una constante. (a) Determine k si se sabe que la máquina se compró hace 8 años en \$10 000. (b) Con el valor de k de la parte (a), trace la gráfica de V. (c) Determine algebraicamente el valor actual de la máquina, y compruebe su respuesta en la graficadora.
22. Si $f(t)$ gramos de una sustancia radiactiva están presentes después de t segundos, entonces $f(t) = ke^{0.3t}$, donde k es una constante. (a) Determine k si inicialmente se tienen presentes 100 g de la sustancia. (b) Con el valor de k de la parte (a), trace la gráfica de f. (c) Determine algebraicamente qué cantidad de la sustancia habrá después de 5 s, y compruebe la respuesta en la graficadora.
23. La población de cierta ciudad crece a una tasa proporcional a su tamaño. Si esta tasa es de 6% y si la población después de t años es $P(t)$, entonces $P(t) = ke^{0.06t}$, donde k es una constante. (a) Determine k si la población actual es de 10 000. (b) Con el valor de k de la parte (a) trace la gráfica de P.

Calcule algebraicamente la población esperada (c) después de 10 años y (d) después de 20 años. Compruebe las respuestas de las partes (c) y (d) en la graficadora.

24. Suponga que $f(t)$ es el número de bacterias presentes en cierto cultivo a los t minutos y $f(t) = ke^{0.035t}$, donde k es una constante. (a) Determine k si hay 5 000 bacterias presentes después de transcurridos 10 min. (b) Con el valor de k de la parte (a) trace la gráfica de f. (c) Encuentre, de manera algebraica, cuántas bacterias había inicialmente, y compruebe la respuesta en la graficadora.

25. Si $P(h)$ libras por pie^2 es la presión atmosférica a una altura de h pies sobre el nivel del mar, entonces $P(h) = ke^{-0.00003h}$, donde k es una constante. Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 2 116 lb/pie^2, determine la presión atmosférica que actúa sobre un avión que vuela a una altura de 10 000 pie. Compruebe la respuesta en la graficadora.

26. En 1985, se estimó que en los 20 años siguientes la población de cierta ciudad constaría de $f(t)$ personas t años a partir de 1985, siendo $f(t) = C \cdot 10^{kt}$, donde C y k son constantes. Si la población en 1985 era de 1 000 y en 1990 era de 4 000, ¿cuál es la población esperada para el año 2000? Compruebe la respuesta en la graficadora.

27. Una pintura abstracta históricamente importante fue comprada en 1922 a \$200, y su valor se ha duplicado cada 10 años desde su compra. Si $\$f(t)$ es el valor t años después de su compra: (a) defina $f(t)$, y (b) ¿cuál será el valor de la pintura en 1992?

28. Después de t horas de practicar mecanografía, se determinó que cierta persona podía mecanografiar $f(t)$ palabras por minuto, donde $f(t) = 90(1 - e^{-0.03t})$. (a) ¿Cuántas palabras por minuto puede mecanografiar la persona después de 30 horas de práctica? (b) ¿Cuántas palabras por minuto puede esperarse que mecanografíe la persona? (c) Utilice la respuesta de la parte (b) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f y trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

29. La eficiencia de un obrero común de una fábrica está determinada por la función definida por

$$f(t) = 100 - 60e^{-0.2t}$$

donde el obrero puede completar $f(t)$ unidades por día después de haber trabajado t meses. (a) ¿Cuántas unidades por día puede completar un obrero principiante? (b) ¿Cuántas unidades por día puede completar un trabajador con un año de experiencia? (c) ¿Cuántas unidades por día puede esperarse que produzca un obrero común? (d) Utilice la respuesta de la parte (c) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f, trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

30. El valor de reventa de cierto equipo es $\$f(t)$, t años después de su compra, donde

$$f(t) = 1\,200 + 8\,000e^{-0.25t}$$

(a) ¿Cuál es el valor del equipo cuando se compró? (b) ¿Cuál es el valor del equipo 10 años después de su compra? (c) ¿Cuál es el valor anticipado de deshecho del equipo después de un periodo prolongado? (d) Utilice la respuesta de la parte (c) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f, trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

31. Cierto día en un colegio asistieron 5 000 personas un estudiante se enteró que un orador polémico iba a efectuar una presentación no programada. Esta información fue comunicada a algunos amigos quienes a su vez la pasaron a otros. Después de transcurridos t minutos, $f(t)$ personas se habían enterado de la noticia, donde

$$f(t) = \frac{5\,000}{1 + 4\,999e^{-0.5t}}$$

¿Cuántas personas se habían enterado del suceso (a) después de 10 min y (b) después de 20 min? (c) ¿Cuántas personas se enterarán de la noticia? (d) Utilice la respuesta de la parte (c) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f, trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

32. En cierta ciudad de población A, 20% de los residentes escucharon un anuncio por radio acerca de un escándalo político local. Después de t horas $f(t)$ personas sabían del suceso, donde

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-Akt}}$$

Si 50% de la población supo del escándalo una hora después, ¿cuánto tiempo transcurrió hasta que 80% de la población se enteró de la noticia?

33. En una comunidad en la que A personas son susceptibles a un virus particular, el virus se propaga

de manera que t semanas después de su aparición, $f(t)$ personas se habían contagiado, donde

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Si 10% de las personas susceptibles contrajeron inicialmente el virus y 25% de ellas se habían infectado después de 3 semanas, ¿qué porcentaje se había infectado después de 6 semanas?

34. La función f definida por $f(x) = e^{-x^2}$ es importante en estadística. Dibuje la gráfica de f considerando que f es continua (la gráfica no se rompe) y localice los puntos para los cuales x tiene los valores -2, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ y 2. Emplee la calculadora para las potencias de e. Compruebe la gráfica en la graficadora.

35. *La ley de enfriamiento de Newton* establece que el índice al cual un cuerpo cambia de temperatura es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea. En Cálculo, se puede demostrar, a partir de esta ley, si un cuerpo rodeado de aire a 35° de temperatura se enfría de 120° a 60° en 40 min, entonces si $f(t)$ grados es la temperatura del cuerpo a los t minutos, donde

$$f(t) = 35 + 85\left(\frac{5}{17}\right)^{t/40}$$

Encuentre la temperatura del cuerpo **(a)** después de 10 min, **(b)** después de 50 min, **(c)** después de 100 min y **(d)** después de 3 h. **(e)** ¿Cuál será la temperatura del cuerpo eventualmente? **(f)** Utilice la respuesta de la parte (e) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f, trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

36. Por observación, una de las soluciones de la ecuación

$$x^2 = 2^x$$

es 2. **(a)** Existe otra solución entera positiva. ¿Cuál es? **(b)** Existe una solución irracional. Para conseguir una aproximación numérica de esta solución, trace las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2^x$ en el mismo rectángulo de inspección, emplee el rastreo y aumento de la graficadora para determinar la solución con una precisión de centésimos. A partir de las 3 soluciones de la ecuación y la gráfica de la parte (b), determine los valores de x para los cuales **(c)** $x^2 < 2^x$ y **(d)** $x^2 > 2^x$.

Las funciones S y C de los ejercicios 37 a 40 aparecen en Cálculo, se denominan funciones hiperbólicas y son definidas por

$$S(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{y} \quad C(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

En los ejercicios 37 y 38, determine los valores indicados de la función.

37. **(a)** $S(0)$ **(b)** $C(1)$ **(c)** $S(-1)$ **(d)** $S(3.5)$ **(e)** $C(-2)$

38. **(a)** $C(0)$ **(b)** $S(1)$ **(c)** $C(3)$ **(d)** $S(-2.5)$ **(e)** $C(-2.5)$

39. **(a)** Pruebe que S es una función impar. **(b)** Dibuje la gráfica de S, y compruebe la gráfica en la graficadora.

40. **(a)** Pruebe que C es una función par. **(b)** Dibuje la gráfica de C, y compruebe la gráfica en la graficadora.

6.4 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

OBJETIVOS

1. **Definir la función logarítmica de base b.**
2. **Encontrar el valor de un logaritmo.**
3. **Resolver ecuaciones logarítmicas.**
4. **Dibujar la gráfica de la función logarítmica de base b.**
5. **Definir la función logarítmica natural.**
6. **Dibujar la gráfica de la función logarítmica natural.**
7. **Resolver problemas que implican funciones logarítmicas y exponenciales naturales.**

En el ejemplo 2 de la Sección 6.3 se obtuvo la ecuación

$$f(t) = 1\,500e^{0.04t}$$

donde $f(t)$ bacterias están presentes en cierto cultivo a los t minutos. Ahora suponga que se desea encontrar en cuántos minutos habrá 15 000 bacterias presentes. Si T es el número de minutos a ser determinado, entonces

$$15\,000 = 1\,500e^{0.04T}$$

En esta ecuación la incógnita T aparece en un exponente. Por el momento no puede resolverse esta ecuación, sin embargo, el concepto de *logaritmo* nos permitirá hacerlo. Se desarrollará este concepto y después se volverá al problema en el ejemplo 3.

Cuando $b > 1$, la función exponencial de base b es creciente, y cuando $0 < b < 1$, es decreciente. Así, del Teorema 1 de la Sección 6.1 se deduce que la función exponencial de base b es uno a uno. Por tanto, tiene una función inversa, la cual está dada en la siguiente definición.

DEFINICIÓN **Función logarítmica de base b**

La función logarítmica de base b es la inversa de la función exponencial de base b.

Se emplea la notación $\log_b$ para denotar la función logarítmica de base b. Los valores de la función $\log_b$ se denotan por $\log_b(x)$ o de forma más sencilla $\log_b x$ (léase "logaritmo base b de x"). Por tanto, como $\log_b$ y la función exponencial de base b son funciones inversas,

$$y = \log_b x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = b^y \tag{1}$$

El dominio de la función exponencial de base b es el conjunto de números reales, y su contradominio es el conjunto de números positivos. De ahí que el dominio de $\log_b$ es el conjunto de números positivos y su contradominio es el conjunto de números reales.

Las dos ecuaciones que se muestran en (1) son equivalentes. Este hecho se emplea en los dos ejemplos ilustrativos siguientes.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

$$3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2 \qquad 2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

$$(\tfrac{1}{16})^{1/2} = \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow \log_{1/16} \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \qquad 5^{-2} = \tfrac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \tfrac{1}{25} = -2$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

$\log_{10} 10\,000 = 4 \Leftrightarrow 10^4 = 10\,000 \quad \log_8 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 8^{1/3} = 2$

$\log_6 1 = 0 \Leftrightarrow 6^0 = 1 \quad \log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 9^{-1/2} = \frac{1}{3}$ ◀

▶ EJEMPLO 1 *Determinación de un logaritmo*

Encuentre el valor de cada uno de los logaritmos siguientes:

(a) $\log_7 49$ **(b)** $\log_5 \sqrt{5}$ **(c)** $\log_6 \frac{1}{6}$ **(d)** $\log_3 81$ **(e)** $\log_{10} 0.001$

Solución En cada inciso se hace y igual al logaritmo dado y se obtiene una ecuación equivalente en forma exponencial. Luego, se despeja y considerando el hecho de que si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces

$$b^y = b^n \quad \text{implica que} \quad y = n^*$$

(a) Sea $\log_7 49 = y$. Esta ecuación es equivalente a $7^y = 49$. Como $49 = 7^2$, se tiene

$$7^y = 7^2$$

Por tanto, $y = 2$; esto es, $\log_7 49 = 2$.

(b) Sea $\log_5 \sqrt{5} = y$. Por tanto, $5^y = \sqrt{5}$, o bien, equivalentemente,

$$5^y = 5^{1/2}$$

De aquí, $y = \frac{1}{2}$; es decir, $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$.

(c) Sea $\log_6 \frac{1}{6} = y$. Así, $6^y = \frac{1}{6}$ o bien, equivalentemente,

$$6^y = 6^{-1}$$

Por tanto, $y = -1$; esto es, $\log_6 \frac{1}{6} = -1$.

(d) Sea $\log_3 81 = y$. De donde, $3^y = 81$, o bien, equivalentemente,

$$3^y = 3^4$$

De esto, $y = 4$; es decir, $\log_3 81 = 4$.

(e) Sea $\log_{10} 0.001 = y$. Por tanto, $10^y = 0.001$, y como $10^{-3} = 0.001$, se tiene

$$10^y = 10^{-3}$$

Así, $y = -3$. Esto es, $\log_{10} 0.001 = -3$. ◀

▶ EJEMPLO 2 *Solución de una ecuación logarítmica*

Resuelva la ecuación para cada x o b:

(a) $\log_6 x = 2$ **(b)** $\log_{27} x = \frac{2}{3}$ **(c)** $\log_b 4 = \frac{1}{3}$ **(d)** $\log_b 81 = -2$

* N. del T. Ésta es la forma lógica contrapropuesta de la condición de la función uno a uno aplicada a la función exponencial de base b.

Solución Se escribe cada ecuación logarítmica como una ecuación exponencial equivalente.

(a) $\log_6 x = 2 \Leftrightarrow 6^2 = x$

Por tanto,

$$x = 36$$

(b) $\log_{27} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 27^{2/3} = x$

De donde,

$$\begin{aligned} x &= (\sqrt[3]{27})^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

(c) $\log_b 4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b^{1/3} = 4$

Así

$$(b^{1/3})^3 = 4^3$$

$$b = 64$$

(d) $\log_b 81 = -2 \Leftrightarrow b^{-2} = 81$

Por tanto,

$$(b^{-2})^{-1/2} = 81^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{81^{1/2}} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

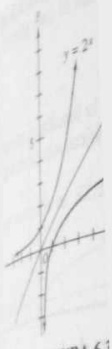


FIGURA 6.

De (1), $b^y = x$ y $y = \log_b x$ son ecuaciones equivalentes. Si en la primera de estas ecuaciones se sustituye y por $\log_b x$, se obtiene

$$b^{\log_b x} = x \tag{2}$$

donde $b > 0$, $b \neq 1$ y $x > 0$.

De (2), se observa que un *logaritmo es un exponente*; esto es, $\log_b x$ es el exponente al cual b debe ser elevado para obtener x.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

De (2)

$$3^{\log_3 7} = 7 \qquad \text{y} \qquad 10^{\log_{10} 5} = 5$$

Si se escriben las ecuaciones de (1) como $\log_b x = y$ y $x = b^y$ y se sustituye x, en la primera de estas ecuaciones, por b^y, se obtiene

$$\log_b b^y = y \tag{3}$$

donde $b > 0$, $b \neq 1$ y y es cualquier número real.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

De (3)

$$\log_2 2^{-5} = -5 \qquad \text{y} \qquad \log_{10} 10^3 = 3$$

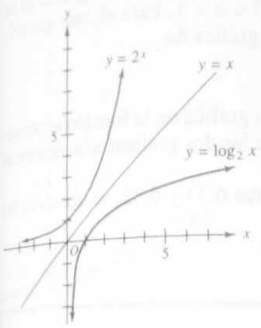


FIGURA 6.32

Las ecuaciones (2) y (3) se obtuvieron del enunciado (1), como un resultado del hecho de que las funciones exponencial y logarítmica son inversas una de la otra.

Recuerde de la Sección 6.1 que las gráficas de una función y su inversa son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$. Si se considera este hecho, se obtiene la gráfica de la función logarítmica a partir de la gráfica de la función exponencial correspondiente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

La gráfica de $y = 2^x$ aparece como la curva clara en la Figura 6.32. La gráfica de $y = \log_2 x$ es la más oscura de la figura. Las dos gráficas son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$. ◀

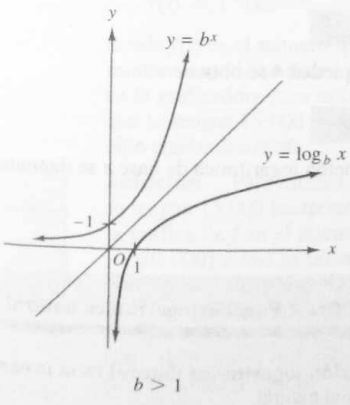
En la Figura 6.32 se tiene un caso especial de la función logarítmica de base b donde $b > 1$. En la Figura 6.33 se tiene el caso general. Esta figura muestra la gráfica de

$$f(x) = \log_b x \qquad b > 1$$

Esta gráfica es simétrica con respecto a la recta $y = x$, de la gráfica de la función exponencial de base b ($b > 1$), la cual también se muestra en la Figura 6.33.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

La Figura 6.34 muestra la gráfica de $y = (\frac{1}{2})^x$. La gráfica de $y = \log_{1/2} x$ se obtiene a partir de la de $y = (\frac{1}{2})^x$ mediante una reflexión con respecto a la recta $y = x$. ◀



$b > 1$

FIGURA 6.33

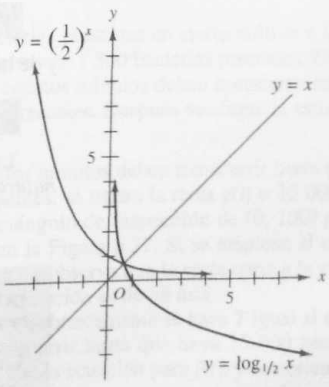
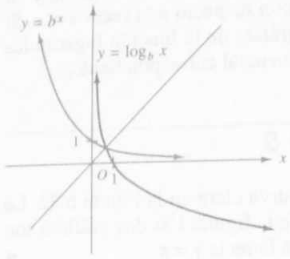


FIGURA 6.34

La gráfica de la Figura 6.34 es un caso especial de la gráfica de una función logarítmica de base b, donde $0 < b < 1$. Para el caso general *véase* la Figura 6.35, la cual muestra la gráfica de

$$f(x) = \log_b x \qquad 0 < b < 1$$



$0 < b < 1$

FIGURA 6.35

En en la Figura 6.35 también se tiene la gráfica de la función exponencial de base b $(0 < b < 1)$. Observe que las dos gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

De las gráficas de $\log_b$ de las figuras 6.33 y 6.35, se observan las propiedades siguientes.

Propiedades de la función logarítmica de base b

1. Si $b > 1$, $\log_b$ es una función creciente. Si $0 < b < 1$, $\log_b$ es una función decreciente.
2. Si $b > 1$, $\log_b x$ es positivo si $x > 1$, y $\log_b x$ es negativo si $0 < x < 1$. Si $0 < b < 1$, $\log_b x$ es negativo si $x > 1$, y $\log_b x$ es positivo si $0 < x < 1$. Además, $\log_b x$ no está definido si x es negativo o cero.
3. El único cero de la función $\log_b$ es 1; esto es, $\log_b x = 0$ si y sólo si $x = 1$.
4. $\log_b x = 1$ si y sólo si $x = b$.
5. Si $b > 1$, $\log_b x \to -\infty$ conforme $x \to 0^+$; y si $0 < b < 1$, $\log_b x \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$.

La propiedad 3 proporciona la ecuación

$$\log_b 1 = 0$$

y de la propiedad 4 se obtiene

$$\log_b b = 1$$

La función logarítmica de base e se denomina *función logarítmica natural*.

DEFINICIÓN **Función logarítmica natural**

La **función logarítmica natural** es la inversa de la función exponencial natural.

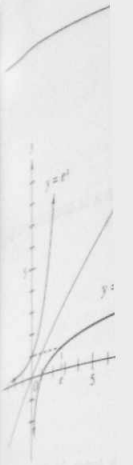


FIGURA 6.36

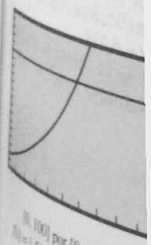


FIGURA 6.37

La función logarítmica natural puede denotarse por $\log_e$, pero la forma más común es *ln*. Los valores de la función ln se denotan por ln x (léase "logaritmo natural de x"). Como ln y la función exponencial natural son funciones inversas,

$$y = \ln x \quad \text{si y sólo si} \quad x = e^y \tag{4}$$

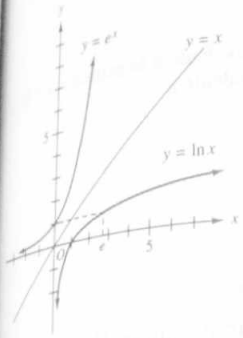


FIGURA 6.36

La tecla ln de la calculadora puede emplearse para obtener los valores de la función logarítmica natural. La gráfica de esta función se presenta en la Figura 6.36, donde también se muestra la gráfica de la función exponencial. Las dos gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$. Observe en esta figura que e es el número cuyo logaritmo natural es 1; esto es,

$$\ln e = 1$$

Esto se infiere del enunciado (4) porque

$$\ln e = 1 \quad \text{es equivalente a} \quad e = e^1$$

Si en (2) $b = e$, se tiene

$$e^{\ln x} = x$$

y si $b = e$ en (3), se obtiene

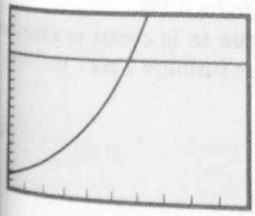
$$\ln e^x = x$$

► EJEMPLO 3 *Solución de un problema que implica las funciones exponencial y logarítmica naturales*

En el ejemplo 2 de la Sección 6.3 se obtuvo la ecuación

$$f(t) = 1\,500e^{0.04t}$$

donde $f(t)$ es el número de bacterias presentes en cierto cultivo a los t minutos cuando se tienen inicialmente 1 500 bacterias presentes. Utilice la graficadora para estimar cuántos minutos deben transcurrir hasta que se tengan 15 000 bacterias presentes. Después verifique la estimación algebraicamente.



[0, 100] por [0, 20 000]
$f(t) = 1\,500e^{0.04t}$ y $g(t) = 15\,000$
FIGURA 6.37

Solución Para estimar cuántos minutos deben transcurrir hasta que se tengan 15 000 bacterias presentes, se trazan la recta $g(t) = 15\,000$ y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección de [0, 100] por [0, 20 000] como se muestra en la Figura 6.37. Si se emplean el rastreo y aumento de la graficadora, se observa que la recta corta a la gráfica de f cuando $t = 58$. Así, la estimación es de 58 min.

Para verificar la estimación algebraicamente se hace T igual al número de minutos que deben transcurrir hasta que haya 15 000 bacterias. Después se sustituye T por t en la ecuación para $f(t)$, y se obtiene

$$f(T) = 1\,500e^{0.04T}$$

Como $f(T) = 15\,000$, entonces

$$15\,000 = 1\,500e^{0.04t}$$

$$10 = e^{0.04T}$$

Debido a que la ecuación $x = e^y$ es equivalente a la ecuación $y = \ln x$, entonces la ecuación $10 = e^{0.04T}$ es equivalente a

$$0.04T = \ln 10$$

$$T = \frac{\ln 10}{0.04}$$

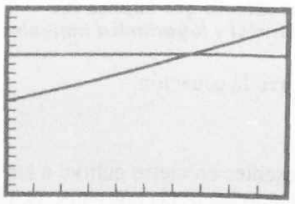
$$T = 57.56$$

Esta respuesta es acorde con la estimación.

Conclusión: Deben transcurrir 58 min para tener 15 000 bacterias presentes.

► EJEMPLO 4 *Solución de un problema que implica las funciones logarítmica y exponencial naturales*

Se efectúa un depósito de \$1 000 en una cuenta de ahorros que paga un interés de 6% compuesto continuamente y no se realizan depósitos ni retiros posteriores. **(a)** Exprese el monto, en unidades monetarias, del depósito a los t años como una función de t. **(b)** Utilice la graficadora para estimar el tiempo hasta que se acumulen \$1 500 en la cuenta. **(c)** Verifique la estimación algebraicamente.



[0,10] por [0, 2 000]
$A(t) = 1\,000e^{0.06t}$ y $g(t) = 1\,500$
FIGURA 6.38

Solución

(a) De la fórmula (3) de la Sección 6.2, si $A(t)$ representa el monto del depósito a los t años, entonces

$$A(t) = 1\,000e^{0.06t}$$

(b) La Figura 6.38 muestra la gráfica de A y la recta $g(t) = 1\,500$, ambas trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 10] por [0, 2 000]. Si se emplea el rastreo y aumento de la graficadora se determina que la recta corta a la gráfica de A cuando $t = 6.758$.

(c) Sea T el tiempo necesario hasta que en la cuenta se acumulen \$1 500. Si en la ecuación para $A(t)$ se sustituye T por t, se obtiene

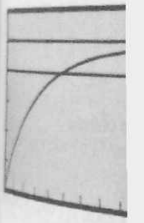
$$A(T) = 1\,000e^{0.06T}$$

Como $A(T) = 1\,500$, se tiene

$$1\,500 = 1\,000e^{0.06T}$$

$$e^{0.06T} = 1.5$$

$$0.06T = \ln 1.5$$



[0, 10] por [0, 60]
$f(t) = 50(1 - e^{-0.06t})$,
$g(t) = 50$ y $h(t) = 40$
FIGURA 6.39

$$T = \frac{\ln 1.5}{0.06}$$

$$T = 6.758$$

Esta respuesta está de acuerdo con la estimación.

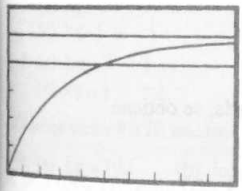
Conclusión: Como 6.758 años equivalen a 6 años, 9 meses y 3 días, esto se considerará como el tiempo hasta que se acumulen en la cuenta $1 500. ◄

► EJEMPLO 5 *Solución de un problema que implica a las funciones exponencial y logarítmica naturales*

En el ejemplo 4 de la Sección 6.3 se obtuvo la ecuación

$$f(t) = 50(1 - e^{-0.34t})$$

donde un trabajador común de cierta fábrica puede producir $f(t)$ unidades por día después de t días en el trabajo. (**a**) Emplee la graficadora para estimar el número de días hasta que el trabajador pueda producir 40 unidades por día. (**b**) Verifique la estimación algebraicamente.



[0, 10] por [0, 60]
$f(t) = 50(1 - e^{-0.34t})$,
$g(t) = 50$ y $h(t) = 40$
FIGURA 6.39

Solución

(**a**) En la solución del ejemplo 4 de la Sección 6.3, se obtuvo la Figura 6.28 de la sección, la cual muestra la gráfica de f y su asíntota horizontal, la recta $g(t) = 50$, trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 10] por [0, 60]. A esta figura se agregó la recta $h(t) = 40$ y se consiguió la Figura 6.39. Usando el rastreo y aumento de la graficadora, se determina que la recta $h(t) = 40$ corta la gráfica de f cuando $t = 4.7$.

(**b**) Sea T el número de días necesarios en el trabajo para que el obrero produzca 40 unidades por día. Si se sustituye T por t en la ecuación dada, se tiene

$$f(T) = 50(1 - e^{-0.34T})$$

Como $f(T) = 40$,

$$40 = 50(1 - e^{-0.34T})$$

$$0.80 = 1 - e^{-0.34T}$$

$$e^{-0.34T} = 0.2$$

$$-0.34T = \ln 0.2$$

$$T = \frac{\ln 0.2}{-0.34}$$

$$T = 4.7$$

Esta respuesta está de acuerdo con la estimación.

Conclusión: Después de 5 días de trabajo, el obrero podrá producir 40 unidades por día.

En problemas que implican decrecimiento exponencial, la vida **media** de una sustancia radiactiva es el tiempo requerido para que ella disminuya a la mitad.

▸ EJEMPLO 6 *Solución de un problema que implica a las funciones exponencial y logarítmica naturales*

La vida media del radio es 1 690 años. suponga que $f(t)$ miligramos de radio se tendrán en t años a partir de ahora, y

$$f(t) = Ae^{kt}$$

donde k es una constante. Si se tienen actualmente 60 mg de radio, ¿cuántos miligramos de radio se tendrán dentro de 100 años?

Solución Como se tienen 60 mg de radio, entonces $f(0) = 60$. Por tanto, de la ecuación se tiene

$$f(0) = Ae^{k(0)}$$
$$60 = A$$

Si se sustituye A por 60 en la ecuación dada, se obtiene

$$f(t) = 60e^{kt}$$

Debido a que la vida media del radio es 1 690 años, $f(1\,690) = 30$. Si en la fórmula anterior $t = 1\,690$, se tiene

$$f(1\,690) = 60e^{k(1690)}$$
$$30 = 60e^{1690k}$$
$$e^{1690k} = 0.5$$
$$1\,690k = \ln 0.5$$
$$k = \frac{\ln 0.5}{1690}$$
$$k = -0.000410$$

Al sustituir este valor de k en la ecuación $f(t) = 60e^{kt}$, se obtiene

$$f(t) = 60e^{-0.000410t}$$

Con este valor y el hecho de que la cantidad de miligramos de radio dentro de 100 años es $f(100)$, se tiene

$$f(100) = 60e^{-0.0410}$$
$$= 57.6$$

Conclusión: Se tendrán 57.6 mg de radio dentro de 100 años.

EJERCICIOS 6.4

En los ejercicios 1 a 4, exprese la relación dada en la ecuación mediante notación logarítmica.

1. (a) $3^4 = 81$ (b) $5^3 = 125$ (c) $10^{-3} = 0.001$

2. (a) $2^5 = 32$ (b) $7^2 = 49$ (c) $5^{-2} = \frac{1}{25}$

3. (a) $8^{2/3} = 4$ (b) $625^{-3/4} = \frac{1}{125}$ (c) $2^0 = 1$

4. (a) $81^{3/4} = 27$ (b) $10^0 = 1$ (c) $64^{-2/3} = \frac{1}{16}$

En los ejercicios 5 a 8, exprese la relación dada en la ecuación mediante notación exponencial.

5. (a) $\log_8 64 = 2$ (b) $\log_3 81 = 4$ (c) $\log_2 1 = 0$

6. (a) $\log_{10} 10{,}000 = 4$ (b) $\log_5 125 = 3$ (c) $\log_{10} 1 = 0$

7. (a) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ (b) $\log_{1/3} 9 = -2$ (c) $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

8. (a) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$ (b) $\log_{1/2} 64 = -6$ (c) $\log_{16} \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$

En los ejercicios 9 a 12, encuentre el valor del logaritmo.

9. (a) $\log_{10} 100$ (b) $\log_{27} 9$ (c) $\log_2 \frac{1}{8}$

10. (a) $\log_4 64$ (b) $\log_6 6$ (c) $\log_3 \frac{1}{81}$

11. (a) $\log_8 \frac{1}{2}$ (b) $\log_{27} \frac{1}{81}$ (c) $\ln \sqrt{e}$

12. (a) $\log_7 7$ (b) $\log_{1/4} \frac{1}{32}$ (c) $\ln e^2$

En los ejercicios 13 a 16, resuelva la ecuación para x.

13. (a) $\log_7 x = 3$ (b) $\log_{1/3} x = -4$

14. (a) $\log_4 x = 3$ (b) $\log_{1/4} x = -3$

15. (a) $\log_2 x = \frac{3}{2}$ (b) $\log_{1/4} x = \frac{7}{2}$

16. (a) $\log_3 x = \frac{2}{3}$ (b) $\log_{1/9} x = \frac{5}{2}$

En los ejercicios 17 a 20, resuelva la ecuación para b.

17. (a) $\log_b 144 = 2$ (b) $\log_b 6 = \frac{1}{3}$

18. (a) $\log_b 1000 = 3$ (b) $\log_b 3 = \frac{1}{4}$

19. (a) $\log_b 0.01 = -2$ (b) $\log_b \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$

20. (a) $\log_b 27 = -3$ (b) $\log_b 0.001 = -\frac{3}{2}$

En los ejercicios 21 a 24, simplifique la expresión.

21. (a) $\log_6(\log_5 5)$ (b) $\log_2(\log_9 81)$

22. (a) $\log_5(\log_2 32)$ (b) $\log_2(\log_3 81)$

23. (a) $\log_2(\log_2 256)$ (b) $\log_b(\log_b b), b > 0$

24. (a) $\log_3(\log_3 3)$
(b) $\log_b(\log_a a^b), a > 0$ y $b > 0$

En los ejercicios 25 a 30, dibuje la gráfica de la función.

25. $f(x) = \log_{10} x$ 26. $f(x) = \log_3 x$

27. $g(x) = \log_{1/3} x$ 28. $g(x) = \log_{1/10} x$

29. $F(x) = \log_3 x^2$ 30. $G(x) = \log_2 |x|$

En los ejercicios 31 a 38, dibuje la gráfica de la función mediante transformaciones geométricas de la gráfica de la función logarítmica natural.

31. $f(x) = -\ln x$ 32. $g(x) = 2 \ln x$

33. $g(x) = \ln(x - 1)$ 34. $f(x) = \ln(x + 4)$

35. $F(x) = \ln x + 2$ 36. $G(x) = \ln x - 3$

37. $f(x) = 3 \ln(x + 4) - 5$

38. $g(x) = -\ln(x - 2) + 1$

En los ejercicios 39 a 50, resuelva el problema por medio de un modelo matemático que contenga una función exponencial. Escriba una conclusión.

39. Remítase al ejercicio 21 de la Sección 6.3. El valor de una máquina, comprada hace 8 años en \$10 000, es $\$V(t)$, t años después de la compra, donde

$$V(t) = 10\,000e^{-0.3t}$$

Si la máquina será reemplazada cuando su valor sea \$500, utilice la graficadora para estimar cuándo se comprará una máquina nueva. Verifique la estimación algebraicamente.

40. Remítase al ejercicio 22 de la Sección 6.3. Si $f(t)$ gramos de una sustancia radiactiva se tienen después de t segundos e inicialmente se tenían 100 g, entonces

$$f(t) = 100e^{-0.3t}$$

Emplee la graficadora para estimar el tiempo necesario para que queden sólo 10 g de la sustancia. Compruebe la estimación algebraicamente.

41. Remítase al ejercicio 23 de la Sección 6.3. La población actual de una ciudad es de 10 000 y se incrementa con una tasa proporcional a su tamaño. Si

esta tasa es de 6% y si la población después de t años es $P(t)$, entonces

$$P(t) = 10\,000e^{0.06t}$$

Utilice la graficadora para estimar el tiempo en el cual la población será de 45 000. Verifique la estimación algebraicamente.

42. En cierto cultivo se tienen inicialmente 2 000 bacterias, y después de t minutos se tienen $f(t)$ bacterias, donde

$$f(t) = 2\,000e^{0.035t}$$

Utilice la graficadora para estimar cuándo se tendrán 10 000 bacterias. Compruebe la estimación algebraicamente.

43. Si se invierten \$500 a 9% compuesto continuamente: (**a**) exprese el valor de la inversión en t años como una función de t. (**b**) Emplee la graficadora para estimar el tiempo necesario para que la inversión sea de \$900. (**c**) Verifique la estimación algebraicamente.

44. Resuelva el ejercicio 43, si el dinero se invierte a 12% compuesto continuamente.

45. Remítase al ejercicio 29 de la Sección 6.3. La eficiencia de un obrero común de cierta fábrica está determinada por la función definida por

$$f(t) = 100 - 60e^{-0.2t}$$

donde el obrero puede completar $f(t)$ unidades de trabajo por día después de haber trabajado durante t meses. Emplee la graficadora para estimar cuántos meses de trabajo son necesarios para que el obrero común produzca 70 unidades por día. Compruebe la estimación algebraicamente.

46. Refiérase al ejercicio 30 de la Sección 6.3. El valor de reventa de cierto equipo es de \$$f(t)$ después de t años de su compra, donde

$$f(t) = 1\,200 + 8\,000e^{-0.25t}$$

Utilice la graficadora para estimar el tiempo después de la compra para que el valor de reventa sea \$2 000. Verifique la estimación algebraicamente.

47. Si una sustancia radiactiva determinada tiene una vida media de 500 años y una muestra original de 1 g decae a 4 g, ¿cuál es la edad de la muestra? Suponga que el número de gramos presentes t años a partir de la muestra es $f(t)$ y $f(t) = Ae^{kt}$, donde k es una constante.

48. Suponga que quedan $f(t)$ unidades de una sustancia radiactiva en t años a partir de ahora y $f(t) = Ae^{kt}$ donde k es una constante. Si 30% de la sustancia desaparece en 15 años, determine su vida media.

49. ¿Cuánto tiempo pasará para que una inversión se duplique si reditúa un interés de 8% compuesto continuamente?

50. ¿Cuánto tiempo pasará para que una inversión se triplique si reditúa un interés de 12% compuesto continuamente?

En los ejercicios 51 y 52, las funciones S y C son las funciones hiperbólicas definidas en los ejercicios 37 y 40 de la Sección 6.3 como sigue:

$$S(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{y} \quad C(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

51. Encuentre $S^{-1}(x)$. *Sugerencia*: Sea $y = S(x)$, escriba la ecuación como cuadrática en e^x, y resuelva para e^x mediante la fórmula cuadrática.

52. Determine $C^{-1}(x)$. Utilice una idea similar a la sugerencia del ejercicio 51 con una restricción en el dominio.

6.5 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

OBJETIVOS

1. **Aprender el teorema acerca del logaritmo de un producto.**
2. **Aprender el teorema acerca del logaritmo de un cociente.**
3. **Aprender el teorema acerca del logaritmo de una potencia.**
4. **Aplicar las propiedades de los logaritmos.**
5. **Resolver ecuaciones logarítmicas.**

Antes del advenimiento de las calculadoras electrónicas se utilizaban los logaritmos para efectuar tediosas operaciones con productos, cocientes, potencias y raíces. Para este propósito se aplicaron los logaritmos de base 10, así como las tablas de éstos. En la actualidad, esto es obsoleto ya que fundamentalmente nos interesan las propiedades de las funciones logarítmicas y su uso en la solución de ecuaciones logarítmicas, en esta sección, y de ecuaciones exponenciales en la Sección 6.6. Las operaciones de los ejemplos, ejemplos ilustrativos y ejercicios de esta sección se presentan sólo para mostrar estas propiedades y no para fomentar su aplicación.

Los tres teoremas de esta sección se refieren a las propiedades de los logaritmos que se infieren de las leyes de exponentes correspondientes. Después de enunciar cada teorema, un ejemplo ilustrativo muestra la ley de exponentes implicada. En las demostraciones se utiliza el siguiente hecho

$$x = b^y \qquad \text{es equivalente a} \qquad y = \log_b x$$

Se hará referencia a la ecuación $x = b^y$ como la *forma exponencial* de la ecuación $y = \log_b x$, y a la ecuación $y = \log_b x$ como la *forma logarítmica* de la ecuación $x = b^y$.

TEOREMA 1

Si $b > 0$, $b \neq 1$ y u y v son números positivos, entonces

$$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Suponga que en el enunciado del Teorema 1, $b = 2$, $u = 4$ y $v = 8$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \log_b uv &= \log_2 4 \cdot 8 \\ &= \log_2 2^2 \cdot 2^3 \\ &= \log_2 2^{2+3} \\ &= \log_2 2^5 \\ &= 5 \text{ (debido a que } \log_b b^y = y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log_b u + \log_b v &= \log_2 4 + \log_2 8 \\ &= \log_2 2^2 + \log_2 2^3 \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por esto, cuando $b = 2$, $u = 4$ y $v = 8$, el Teorema 1 es válido. ◀

Demostración del Teorema 1 Sea

$$r = \log_b u \qquad \text{y} \qquad s = \log_b v$$

Las formas exponenciales de estas ecuaciones son, respectivamente,

$$u = b^r \quad \text{y} \quad v = b^s$$

Por tanto,

$$uv = b^r \cdot b^s$$
$$uv = b^{r+s}$$

La forma logarítmica de esta ecuación es

$$\log_b uv = r + s$$

Pero $\log_b u = r$ y $\log_b v = s$. Así,

$$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Si $\log_{10} 2 = 0.3010$ y $\log_{10} 3 = 0.4771$, puede aplicarse el Teorema para determinar $\log_{10} 6$.

$$\begin{aligned} \log_{10} 6 &= \log_{10}(2 \cdot 3) \\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 0.3010 + 0.4771 \\ &= 0.7781 \end{aligned}$$

Como $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$ y $\log_{10} 6$ son números irracionales, los valores dados para ellos en el ejemplo ilustrativo 2 son aproximaciones decimales. Sin embargo, en las operaciones, como las de este ejemplo, se empleará el símbolo de igual.

TEOREMA 2

Si $b > 0$, $b \neq 1$ y u y v son números positivos, entonces

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Suponga que en el enunciado del Teorema 2, $b = 2$, $u = 128$ y $v = 4$. Por tanto,

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_2 \frac{128}{16} \qquad \log_b u - \log_b v = \log_2 128 - \log_2 16$$
$$= \log_2 \frac{2^7}{2^4} \qquad = \log_2 2^7 - \log_2 2^4$$
$$= \log_2 2^{7-4} \qquad = 7 - 4$$
$$= \log_2 2^3 \qquad = 3$$
$$= 3$$

Por esto, cuando $b = 2$, $u = 128$ y $v = 16$, es válido el Teorema 2. ◀

Demostración del Teorema 2 Como en la prueba del Teorema 1, sea

$$r = \log_b u \quad \text{y} \quad s = \log_b v$$

Las formas exponenciales de estas ecuaciones son, respectivamente,

$$u = b^r \quad \text{y} \quad v = b^s$$

En consecuencia,

$$\frac{u}{v} = \frac{b^r}{b^s} \qquad \frac{u}{v} = b^{r-s}$$

La forma logarítmica de esta ecuación es

$$\log_b \frac{u}{v} = r - s$$

Como $\log_b u = r$ y $\log_b v = s$, se tiene

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$ ■

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Por el Teorema 2

$$\log_{10} \tfrac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$$

Si se sustituyen los valores de $\log_{10} 3$ y $\log_{10} 2$ dados en el ejemplo ilustrativo 2, se obtiene

$$\log_{10} \tfrac{2}{3} = 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$$ ◀

TEOREMA 3

Si $b > 0$, $b \neq 1$, n es cualquier número real y u es un número positivo, entonces

$$\log_b u^n = n \log_b u$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Suponga que en el enunciado del Teorema 3, $b = 2$, $n = 3$ y $u = 4$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \log_b u^n &= \log_2 4^3 \\ &= \log_2 (2^2)^3 \\ &= \log_2 2^{2 \cdot 3} \\ &= \log_2 2^6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \log_b u &= 3 \log_2 4 \\ &= 3 \log_2 2^2 \\ &= 3 \cdot 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Así, cuando $b = 2$, $n = 3$ y $u = 4$, el Teorema 3 es válido.

Demostración del Teorema 3 Sea

$$r = \log_b u \Leftrightarrow u = b^r$$

Por tanto,

$$u^n = (b^r)^n$$

$$u^n = b^{nr}$$

La forma logarítmica de esta ecuación es

$$\log_b u^n = nr$$

Como $\log_b u = r$, se tiene

$$\log_b u^n = n \log_b u$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Como $\log_{10} 2 = 0.3010$, se deduce del Teorema 3 que

$$\begin{aligned} \log_{10} 32 &= \log_{10} 2^5 \\ &= 5 \log_{10} 2 \\ &= 5(0.3010) \\ &= 1.5050 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} \sqrt[3]{2} &= \log_{10} 2^{1/3} \\ &= \tfrac{1}{3} \log_{10} 2 \\ &= \tfrac{1}{3}(0.3010) \\ &= 0.1003 \end{aligned}$$

▸ EJEMPLO 1 *Aplicación de las propiedades de los logaritmos*

Escriba cada una de las expresiones siguientes en términos de los logaritmos de x, y y z, donde las variables representan números positivos.

(a) $\log_b x^2 y^3 z^4$ **(b)** $\log_b \dfrac{x}{yz^2}$ **(c)** $\log_b \sqrt{\dfrac{x^2 y}{z}}$

Solución

(a) Por el Teorema 1

$$\log_b x^2y^3z^4 = \log_b x^2 + \log_b y^3 + \log_b z^4$$

Al aplicar el Teorema 3 a cada uno de los logaritmos en el miembro derecho, se obtiene

$$\log_b x^2y^3z^4 = 2\log_b x + 3\log_b y + 4\log_b z$$

(b) Por el Teorema 2

$$\log_b \frac{x}{yz^2} = \log_b x - \log_b yz^2$$

Si se aplican los teoremas 1 y 3 al segundo logaritmo del miembro derecho, se tiene

$$\log_b \frac{x}{yz^2} = \log_b x - (\log_b y + \log_b z^2)$$
$$= \log_b x - \log_b y - 2\log_b z$$

(c) Por el Teorema 3

$$\log_b \sqrt[5]{\frac{xy^2}{z^3}} = \frac{1}{5}\log_b \frac{xy^2}{z^3}$$

Al aplicar el Teorema 2 al miembro derecho, se obtiene

$$\log_b \sqrt[5]{\frac{xy^2}{z^3}} = \tfrac{1}{5}(\log_b xy^2 - \log_b z^3)$$
$$= \tfrac{1}{5}(\log_b x + \log_b y^2 - \log_b z^3)$$
$$= \tfrac{1}{5}(\log_b x + 2\log_b y - 3\log_b z)$$
$$= \tfrac{1}{5}\log_b x + \tfrac{2}{5}\log_b y - \tfrac{3}{5}\log_b z$$

▶ EJEMPLO 2 *Aplicación de las propiedades de los logaritmos*

Escriba cada una de las expresiones siguientes como un solo logaritmo con coeficiente 1:

(a) $\log_b x + 2\log_b y - 3\log_b z$

(b) $\frac{1}{3}(\log_b 4 - \log_b 3 + 2\log_b x - \log_b y)$

Solución

(a) $\log_b x + 2\log_b y - 3\log_b z = (\log_b x + \log_b y^2) - \log_b z^3$
$$= \log_b xy^2 - \log_b z^3$$
$$= \log_b \frac{xy^2}{z^3}$$

(b) $\frac{1}{3}(\log_b 4 - \log_b 3 + 2\log_b x - \log_b y)$

$$= \tfrac{1}{3}[(\log_b 4 + \log_b x^2) - (\log_b 3 + \log_b y)]$$

$$= \tfrac{1}{3}[\log_b 4x^2 - \log_b 3y]$$

$$= \frac{1}{3}\log_b \frac{4x^2}{3y}$$

$$= \log_b \sqrt[3]{\frac{4x^2}{3y}}$$

▸ EJEMPLO 3 *Aplicación de las propiedades de los logaritmos*

Dados $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ y $\log_{10} 7 = 0.8451$, utilice las propiedades de los logaritmos de los teoremas 1 a 3 para determinar los valores de cada uno de los siguientes logaritmos:

(a) $\log_{10} 5$ (b) $\log_{10} 28$ (c) $\log_{10} 2100$ (d) $\log_{10} \sqrt[3]{4.2}$

Solución Aparte de los logaritmos del ejemplo, el logaritmo de base 10 de cualquier potencia entera de 10 puede determinarse fácilmente; por ejemplo, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 10^2 = 2$, $\log_{10} 10^3 = 3$, $\log_{10} 10^{-1} = -1$, y así sucesivamente. Esto se utilizará en este ejemplo.

(a) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2}$

$$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$

$$= 1 - 0.3010$$

$$= 0.6990$$

(b) $\log_{10} 28 = \log_{10} 2^2 \cdot 7$

$$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 7$$

$$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 7$$

$$= 2(0.3010) + 0.8451$$

$$= 0.6020 + 0.8451$$

$$= 1.4471$$

(c) $\log_{10} 2100 = \log_{10} 3 \cdot 7 \cdot 10^2$

$$= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 + \log_{10} 10^2$$

$$= 0.4771 + 0.8451 + 2$$

$$= 3.3222$$

(d) $\log_{10} \sqrt[3]{4.2} = \log_{10}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{10}\right)^{1/3}$

$$= \tfrac{1}{3}(\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 7 - \log_{10} 10)$$

$$= \tfrac{1}{3}(0.3010 + 0.4771 + 0.8451 - 1)$$

$$= \tfrac{1}{3}(0.6232)$$

$$= 0.2077$$

▶ EJEMPLO 4 *Aplicación de las propiedades de los logaritmos*

Utilice los valores de $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 7$ dados el ejemplo 3 para determinar el valor de cada una de las expresiones siguientes:

(a) $\log_{10} \frac{7}{2}$ (b) $\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$

Solución

(a) $\log_{10} \frac{7}{2} = \log_{10} 7 - \log_{10} 2$
$= 0.8451 - 0.3010$
$= 0.5441$

(b) $\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} = \frac{0.8451}{0.3010}$
$= 2.808$ ◀

Ahora, se compararán las operaciones de los incisos (a) y (b) del ejemplo 4. En el (a), se tiene el logaritmo de un cociente, el cual, al aplicar el Teorema 2, es la diferencia de 2 logaritmos. En el (b), se tiene el cociente de los logaritmos de 2 números. La operación se efectúa dividiendo 0.8451 entre 0.3010.

Una ecuación que contiene logaritmos se denomina **ecuación logarítmica.** Como el dominio de una función logarítmica se restringe con el fin de obtener los logaritmos de números positivos, se debe *verificar* cualquier solución posible en la ecuación dada. Los tres ejemplos siguientes se refieren a la solución de una ecuación logarítmica.

▶ EJEMPLO 5 *Solución de una ecuación logarítmica*

Determine el conjunto solución de la ecuación

$$\log_{10}(x + 3) = 2$$

Solución La forma exponencial de la ecuación es

$$x + 3 = 10^2$$
$$x = 100 - 3$$
$$x = 97$$

Para este valor de x, la ecuación dada como $\log_{10} 100 = 2$, la cual es verdadera. Por tanto, el cojunto solución es $\{97\}$. ◀

▶ EJEMPLO 6 *Solución de una ecuación logarítmica*

Encuentre el conjunto solución de la ecuación

$$\log_2(x + 4) - \log_2(x - 3) = 3$$

Solución Como la diferencia de dos logaritmos es el logaritmo de un cociente, se tiene

$$\log_2 \frac{x+4}{x-3} = 3$$

Si se escribe esta ecuación en la forma exponencial equivalente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{x-3} &= 2^3 \\ x+4 &= 8(x-3) \\ x+4 &= 8x-24 \\ -7x &= -28 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Si se sustituye x por 4 en el miembro izquierdo de la ecuación dada se tiene $\log_2 8 - \log_2 1$. Debido a que $\log_2 8 = 3$ y $\log_2 1 = 0$, la solución se verifica. Así, el conjunto solución es $\{4\}$.

▸ EJEMPLO 7 *Solución de una ecuación logarítmica*

Determine el conjunto solución de la ecuación

$$\log_3 x + \log_3(2x-3) = 3$$

Solución El miembro izquierdo de la ecuación dada es la suma de dos logaritmos; si se escribe como el logaritmo de un producto, se tiene

$$\log_3 x(2x-3) = 3$$

La forma exponencial equivalente de esta ecuación es

$$\begin{aligned} x(2x-3) &= 3^3 \\ 2x^2 - 3x - 27 &= 0 \\ (x+3)(2x-9) &= 0 \\ x+3=0 \qquad & 2x-9=0 \\ x=-3 \qquad & x=\tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

Cuando $x = -3$, ni $\log_3 x$ ni $\log_3(2x-3)$ están definidos; por tanto, se rechaza la raíz -3. Cuando $x = \frac{9}{2}$, el miembro izquierdo de la ecuación dada es

$$\begin{aligned} \log_3 \tfrac{9}{2} + \log_3 6 &= \log_3(\tfrac{9}{2} \cdot 6) \\ &= \log_3 27 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{\frac{9}{2}\}$.

EJERCICIOS 6.5

En los ejercicios 1 a 8, exprese el logaritmo en términos de los logaritmos de x, y y z, donde las variables representan números positivos.

1. (a) $\log_b(5xy)$ (b) $\log_b\left(\frac{y}{z}\right)$ (c) $\log_b\left(\frac{x}{yz}\right)$

2. (a) $\log_b(3xyz)$ (b) $\log_b\left(\frac{xy}{z}\right)$ (c) $\log_b(x^4y^2)$

3. (a) $\log_b(xy^5)$ (b) $\log_b\sqrt{xy}$

4. (a) $\log_b(z^{1/3})$ (b) $\log_b\sqrt[3]{yz^2}$

5. (a) $\log_b(x^{1/3}z^3)$ (b) $\log_b\left(\frac{xy^{1/2}}{z^4}\right)$

6. (a) $\log_b(x^2y^3z)$ (b) $\log_b\left(\frac{y^2}{x^5z^{1/4}}\right)$

7. (a) $\log_b\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz^2}}$ (b) $\log_b(\sqrt[3]{x^2}\sqrt{yz})$

8. (a) $\log_b\sqrt[3]{\frac{x^3y^4}{z^2}}$ (b) $\log_b(\sqrt[4]{xy^3}\sqrt{z})$

En los ejercicios 9 a 12, escriba la expresión como un solo logaritmo con coeficiente 1.

9. (a) $4\log_{10}x + \frac{1}{2}\log_{10}y$
   (b) $\frac{3}{4}\log_b x - 6\log_b y - \frac{4}{5}\log_b z$

10. (a) $5\log_{10}x + \frac{1}{2}\log_{10}y - \frac{1}{3}\log_{10}z$
    (b) $\frac{1}{2}\log_b x - 4\log_b y + \log_b z$

11. (a) $\log_{10}g + 2\log_{10}t - \log_{10}2$
    (b) $\ln\pi + \ln h + 2\ln r - \ln 3$

12. (a) $\log_{10}4 + \log_{10}\pi + 3\log_{10}r - \log_{10}3$
    (b) $\ln 2 + \ln\pi + \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2}\ln g$

En los ejercicios 13 a 20, determine el valor del logaritmo dado empleando lo siguiente: $\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ *y* $\log_{10}7 = 0.8451$.

13. (a) $\log_{10}14$ (b) $\log_{10}15$

14. (a) $\log_{10}18$ (b) $\log_{10}42$

15. (a) $\log_{10}63$ (b) $\log_{10}140$

16. (a) $\log_{10}120$ (b) $\log_{10}0.21$

17. (a) $\log_{10}\sqrt[3]{10.5}$ (b) $\log_{10}\left(\frac{\sqrt[5]{49}}{36^2}\right)$

18. (a) $\log_{10}\sqrt[3]{126}$ (b) $\log_{10}\left(\frac{14}{\sqrt[3]{84}}\right)$

19. (a) $\log_{10}\frac{2}{3}$ (b) $\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}$

20. (a) $\log_{10}\frac{7}{5}$ (b) $\frac{\log_{10}7}{\log_{10}5}$

En los ejercicios 21 a 24, determine el valor del logaritmo, empleando lo siguiente: $\ln 2 = 0.6931$, $\ln 3 = 1.0986$ *y* $\ln 5 = 1.6094$.

21. (a) $\ln 300$ (b) $\ln 7.5$

22. (a) $\ln 90$ (b) $\ln 1.2$

23. (a) $\ln\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{3}}\right)$ (b) $\ln\frac{5}{3}e^2$

24. (a) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{6}}\right)$ (b) $\ln\frac{2}{5}e^3$

En los ejercicios 25 a 32, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

25. $\log_5(4x - 3) = 2$

26. $\log_2(2 - 3x) = -3$

27. $\log_{10}x + 3\log_{10}2 = 3$

28. $\log_{10}x + \log_{10}(x + 15) = 2$

29. $\log_3(x + 6) - \log_3(x - 2) = 2$

30. $\log_2(11 - x) = \log_2(x + 1) + 3$

31. $\log_2(x + 1) + \log_2(3x - 5) = \log_2(5x - 3) + 2$

32. $\log_3(2x - 1) - \log_3(5x + 2) = \log_3(x - 2) - 2$

33. La escala de Richter, llamada así en honor a su inventor **Charles Richter** (1900-1985), mide la intensidad de un movimiento sísmico. Si x es la medición de la magnitud de un temblor de tierra, x está dado por la fórmula

$$x = \log_{10}\left(\frac{y}{T}\right) + D$$

donde y mide la energía liberada por el movimiento sísmico, y T y D son constantes que dependen del lapso del movimiento de la tierra y la distancia desde el epicentro del temblor de tierra a la estación

que recibe la señal. (a) Pruebe que $y = k \cdot 10^x$, donde k es una constante. (b) Utilice la fórmula de la parte (a) para mostrar que un terremoto con una magnitud de 7 en la escala de Richter, tiene una intensidad 100 veces mayor que la de un temblor de tierra de magnitud 5 con el mismo epicentro. (c) Si y_1 y y_2 son las mediciones de energía liberada por dos movimientos sísmicos con el mismo epicentro y que tienen magnitudes de 6.7 y 5.4, respectivamente, en la escala de Richter, ¿cuántas veces y_1 equivale a y_2?

34. Si se conocen los valores de $\log_{10} 2$ y $\log_{10} 3$, explique por qué puede obtenerse, sin emplear una calculadora, $\log_{10} 4$, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 6$, $\log_{10} 8$ y $\log_{10} 9$, pero no $\log_{10} 7$.

35. La única solución de la ecuación

$$\log_{10} x = \ln x$$

es $x = 1$. Explique por qué ésta es una solución y por qué no existen otras soluciones.

6.6 ECUACIONES EXPONENCIALES

OBJETIVOS

1. **Definir los logaritmos comunes.**
2. **Resolver ecuaciones exponenciales.**
3. **Encontrar el valor de un logaritmo en una base diferente de e o 10.**
4. **Resolver problemas que tienen ecuaciones exponenciales como modelos matemáticos.**

John Napier (1550-1617), aristócrata escocés, inventó los logaritmos a principios del siglo XVII. Poco después, el inglés **Henry Briggs** (1560-1630), en contacto cercano con Napier, empleó los logaritmos de base 10, denominados logaritmos de Briggs, pero ahora llamados **logaritmos comunes. Leonhard Euler** más tarde relacionó los logaritmos y los exponentes. En la actualidad, se estudian, en los cursos de álgebra, los exponentes antes que los logaritmos. Sin embargo, en los cursos de Cálculo se tratan las funciones logarítmicas antes que las exponenciales. Este orden de presentación nos permite definir el exponente real.

Debido a que $\log_b u^n = n \log_b u$, los logaritmos se aplican para resolver ecuaciones exponenciales, en las cuales la variable aparece en un exponente. Como los números se expresan en notación decimal, los logaritmos comunes se emplean frecuentemente para este fin. Al escribir logaritmos comunes, se acostumbra omitir el subíndice 10. De modo que se sobrentiende que $\log x$ representa el número $\log_{10} x$, y la función *log* denota la función logarítmica de base 10. Por ende,

$$\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

$\log 10 = 1$ porque $10^1 = 10$

$\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$

$$\log 1\,000 = 3 \quad \text{porque } 10^3 = 1\,000$$
$$\log 10\,000 = 4 \quad \text{porque } 10^4 = 10\,000$$

y así sucesivamente. Además,

$$\log 1 = 0 \quad \text{porque } 10^0 = 1$$
$$\log 0.1 = -1 \quad \text{porque } 10^{-1} = 0.1$$
$$\log 0.01 = -2 \quad \text{porque } 10^{-2} = 0.01$$
$$\log 0.001 = -3 \quad \text{porque } 10^{-3} = 0.001$$
$$\log 0.0001 = -4 \quad \text{porque } 10^{-4} = 0.0001$$

etcétera. ◀

Los logaritmos comunes pueden determinarse en una calculadora mediante la tecla $\boxed{\log}$.

Para resolver una ecuación exponencial, se considera la ecuación equivalente que se obtiene al igualar los logaritmos comunes (o naturales) de los dos miembros, después se resuelve la ecuación obtenida, como se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La ecuación exponencial

$$3^x = 16$$

es equivalente a la ecuación

$$x = \log_3 16$$

Sin embargo, esta ecuación no proporciona un valor numérico explícito para x. A fin de obtener tal valor, se igualan los logaritmos comunes de los dos miembros de la ecuación dada:

$$\log 3^x = \log 16$$
$$x \log 3 = \log 16$$
$$x = \frac{\log 16}{\log 3}$$
$$x = \frac{1.2041}{0.47712}$$
$$x = 2.5237$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{2.5237\}$. Observe que 2.5237 es una aproximación, con cinco dígitos significativos, del valor de x. El valor exacto de x está dado por $\log_3 16$ o $\dfrac{\log 16}{\log 3}$.

La ecuación dada también puede resolverse igualando los logaritmos naturales de sus dos miembros. Si se hace esto, la solución tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \ln 3^x &= \ln 16 \\ x \ln 3 &= \ln 16 \\ x &= \frac{\ln 16}{\ln 3} \\ x &= \frac{2.7726}{1.0986} \\ x &= 2.5237 \end{aligned}$$

▸ EJEMPLO 1 *Solución de una ecuación exponencial*

Determine el conjunto solución de la ecuación

$$5^{2x-1} = 8$$

Verifique la respuesta en la graficadora.

Solución Al igualar los logaritmos comunes de ambos miembros de la ecuación dada, se tiene

$$\begin{aligned} \log 5^{2x-1} &= \log 8 \\ (2x - 1)\log 5 &= \log 2^3 \\ 2x \log 5 - \log 5 &= 3 \log 2 \\ 2x \log 5 &= 3 \log 2 + \log 5 \\ x &= \frac{3 \log 2 + \log 5}{2 \log 5} \\ x &= 1.1460 \end{aligned}$$

Para comprobar la respuesta se traza en la graficadora la gráfica de $y = 5^{2x-1} - 8$ y mediante el rastreo y aumento, se determina la intercepción x de la gráfica.

▸ EJEMPLO 2 *Solución de una ecuación exponencial*

Determine el conjunto solución de la ecuación

$$7^x = 3^{x+1}$$

Compruebe la respuesta en la graficadora.

Solución Al igualar los logaritmos comunes de ambos lados de la ecuación dada se tiene

$$\log 7^x = \log 3^{x+1}$$

$$x \log 7 = (x + 1)\log 3$$
$$x \log 7 = x \log 3 + \log 3$$
$$x \log 7 - x \log 3 = \log 3$$
$$x(\log 7 - \log 3) = \log 3$$
$$x = \frac{\log 3}{\log 7 - \log 3}$$
$$x = 1.296$$

Así, el conjunto solución es {1.296}.

Para comprobar la respuesta se traza la gráfica de $y = 7^x - 3^{x+1}$ en la graficadora y al emplear el rastreo y aumento, se estima la intercepción x de la gráfica. ◄

Anteriormente, se indicó que los valores de los logaritmos naturales y comunes pueden determinarse en una calculadora. Los valores de logaritmos en otras bases se pueden determinar resolviendo ecuaciones exponenciales. El ejemplo siguiente muestra cómo hacerlo.

► EJEMPLO 3 *Determinación del valor de un logaritmo de base distinta de e o 10*

Determine el valor de $\log_4 19$.

Solución Sea

$$y = \log_4 19$$

Al escribir esta ecuación en forma exponencial, se obtiene

$$4^y = 19$$

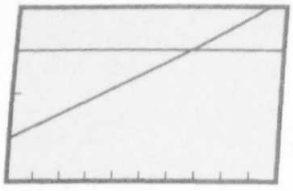
Por tanto,

$$\log 4^y = \log 19$$
$$y \log 4 = \log 19$$
$$y = \frac{\log 19}{\log 4}$$
$$y = 2.124$$

Así, con cuatro dígitos significativos, $\log_4 19 = 2.124$. ◄

El procedimiento aplicado en el ejemplo 3 puede emplearse para obtener una fórmula que relaciona a $\log_a x$ y $\log_b x$, esto es, los logaritmos de un número en bases diferentes. *Véase* el ejercicio 42.

Los dos ejemplos siguientes y los ejercicios 21 a 32 proporcionan aplicaciones de ecuaciones exponenciales.



[0, 10] por [700 000, 1 100 000]
$y_1 = 800\,000(1.035)^t$ y
$y_2 = 1\,000\,000$
FIGURA 6.40

▸ EJEMPLO 4 *Solución de un problema que tiene una ecuación exponencial como modelo matemático*

Suponga que el 1 de enero de 1993, la población de cierta ciudad fue de 800 000 habitantes. A partir de entonces y hasta el año 2001 se espera que la población se incremente a una tasa anual de 3.5%. Por tanto, t años después del 1 de enero de 1993, la población esperada es $800\,000(1.035)^t$ donde $0 \le t \le 8$. Utilice la graficadora para predecir, con aproximación de meses, cuándo la población será de un millón. Verifique la predicción algebraicamente.

Solución Se trazan en la graficadora las gráficas de

$$y_1 = 800\,000(1.035)^t \quad \text{y} \quad y_2 = 1\,000\,000$$

La Figura 6.40 muestra estas gráficas en el rectángulo de inspección [0, 10] por [700 000, 1 100 000]. Al emplear el rastreo y aumento de la graficadora se estima que las gráficas se intersectan cuando $t = 6.5$.

Seis años y medio después a partir del 1 de enero de 1993, se tiene la fecha 1 de julio de 1999, en la cual, la población será de un millón.

A fin de verificar esta predicción algebraicamente, se determina el valor de t tal que

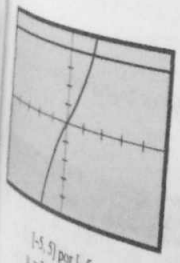
$$\begin{aligned} 800\,000(1.035)^t &= 1\,000\,000 \\ (1.035)^t &= \frac{1\,000\,000}{800\,000} \\ (1.035)^t &= 1.25 \end{aligned}$$

Como la variable t aparece en el exponente, se igualan los logaritmos de los dos lados para obtener

$$\begin{aligned} \log(1.035)^t &= \log 1.25 \\ t \log 1.035 &= \log 1.25 \\ t &= \frac{\log 1.25}{\log 1.035} \\ t &= 6.5 \end{aligned}$$

Este resultado concuerda con el valor de t obtenido en la graficadora.

Conclusión: Se predice que la población de la ciudad será de un millón el 1 de julio de 1999.



[-5, 5] por [-5, 5]
$y_1 = 3^x - 3^{-x}$ y $y_2 = 4$
FIGURA 6.41

▸ EJEMPLO 5 *Solución de un problema que tiene una ecuación exponencial como modelo matemático*

Se depositan $1 000 en una cuenta de ahorros que paga un interés anual de 6% compuesto trimestralmente y no se efectúan depósitos

retiros posteriores, ¿cuánto tiempo es necesario para que se tengan $1 500 en la cuenta?

Solución Por el Teorema 3 de la Sección 6.2

$$A_n = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$

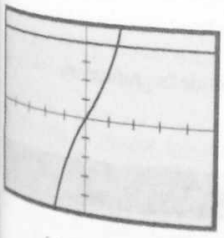
donde $\$A_n$ es el monto al final de n periodos de interés de una inversión de $\$P$ a una tasa de interés anual de $100r\%$ compuesto m veces al año. En este problema $A_n = 1\,500$, $P = 1\,000$, $r = 0.06$ y $m = 4$.

Se desea encontrar n. De la fórmula

$$\begin{aligned} 1500 &= 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^n \\ 1.5 &= (1.015)^n \\ \log 1.5 &= \log(1.015)^n \\ \log 1.5 &= n \log 1.015 \\ n &= \frac{\log 1.5}{\log 1.015} \\ n &= 27.33 \end{aligned}$$

Conclusión: Como n es el número de periodos de interés y el interés se compone trimestralmente, se necesitan 28 trimestres para que en la cuenta tenga $1 500. ◄

Compare el ejemplo anterior con el ejemplo 4 de la Sección 6.4, el cual contiene los mismos datos, excepto que el interés es compuesto continuamente en lugar de trimestralmente.



[–5, 5] por [–5, 5]
$y_1 = 3^x - 3^{-x}$ y $y_2 = 4$
FIGURA 6.41

► EJEMPLO 6 *Solución de una ecuación exponencial*

Utilice la graficadora para estimar con cuatro dígitos significativos la solución de la ecuación

$$3^x - 3^{-x} = 4$$

Compruebe la respuesta algebraicamente.

Solución La Figura 6.41 muestra las gráficas de

$$y_1 = 3^x - 3^{-x} \quad \text{y} \quad y_2 = 4$$

trazadas en el rectángulo de inspección de [–5, 5] por [–5, 5]. Al utilizar el rastreo y aumento de la graficadora se estima que las gráficas se cortan en el punto donde $x = 1.314$.

Para verificar algebraicamente la respuesta, se escribe la ecuación dada como

$$3^x - \frac{1}{3^x} = 4$$

$$3^{2x} - 1 = 4(3^x)$$

$$(3^x)^2 - 4(3^x) - 1 = 0$$

Al hacer $u = 3^x$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$u^2 - 4u - 1 = 0$$

Esta ecuación se resuelve mediante la fórmula cuadrática.

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{5}$$

Si se sustituye u por 3^x, se obtienen las dos ecuaciones

$$3^x = 2 + \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad 3^x = 2 - \sqrt{5}$$

La segunda ecuación no tiene solución, ya que $3^x > 0$ y $2 - \sqrt{5}$ es negativo. Por tanto,

$$3^x = 2 + \sqrt{5}$$

Al igualar los logaritmos comunes de los dos miembros de esta ecuación, se tiene

$$\log 3^x = \log(2 + \sqrt{5})$$

$$x \log 3 = \log(2 + \sqrt{5})$$

$$x = \frac{\log(2 + \sqrt{5})}{\log 3}$$

$$x = 1.314$$

Esta respuesta es acorde con la estimación de la graficadora.

EJERCICIOS 6.6

En los ejercicios 1 a 12, encuentre el conjunto solución de la ecuación. Exprese los resultados con cuatro dígitos significativos. Compruebe la respuesta en la graficadora.

1. $4^x = 7$
2. $3^x = 25$
3. $5^{2x} = 4$
4. $100^x = 65$
5. $3^{2+x} = 5^x$
6. $10^{3x-2} = 57$
7. $3^{x+1} = 4^{x-1}$
8. $3^{2x+1} = 5^{x-1}$
9. $(1.02)^x = 1.892$
10. $(1.04)^x = 0.65$
11. $e^{3x} = 21$
12. $10^{3x} = 57$

En los ejercicios 13 a 20, encuentre el valor del logaritmo con cuatro dígitos significativos.

13. $\log_3 12$
14. $\log_5 200$
15. $\log_2 18$
16. $\log_6 54$
17. $\log_9 155$
18. $\log_8 28$
19. $\log_{100} 75$
20. $\log_{20} 100$

En los ejercicios 21 a 32, resuelva el problema empleando un modelo matemático que contenga una función exponencial. Escriba una conclusión.

21. Para la ciudad del ejemplo 4, utilice la graficadora para predecir cuándo la población será de 900 000. Verifique la predicción algebraicamente.

22. Emplee la graficadora para determinar si la población de la ciudad del ejemplo 4 será 1 100 000 antes del año 2001. Compruebe la respuesta algebraicamente.

23. ¿Cuánto tiempo será necesario para que \$1 000 se tripliquen ganando un interés anual de 6% compuesto semestralmente?

24. ¿Cuánto tiempo será necesario para que una inversión se duplique si la tasa de interés anual es de 8% compuesto trimestralmente?

25. Refiérase al ejercicio 25 de la Sección 6.3. ¿A qué altura la presión atmosférica es de 500 lb/pie ^{2}? Verifique la respuesta en la graficadora.

26. Para la ciudad del ejercicio 23 de la Sección 6.3, ¿cuándo se espera que la población sea de 21 000? Verifique la respuesta en la graficadora.

27. ¿Cuándo se espera que el valor de la pintura abstracta, del ejercicio 27 de la Sección 6.3, sea \$18 000? Verifique la respuesta en la graficadora.

28. ¿Cuál será la edad del hombre, del ejercicio 28 de la Sección 6.2, cuando tenga \$50 000 en la cuenta de inversión? Compruebe la respuesta en la graficadora.

29. ¿Después de cuántos minutos la temperatura del cuerpo, del ejercicio 35 de la Sección 6.3, será de 45°?

30. ¿Después de cuántas horas de practicar mecanografía podrá la persona del ejercicio 28 de la Sección 6.3, escribir 60 palabras por minuto?

31. En cierta inversión especulativa, se adquirieron bienes raíces por \$20 000 hace 3 años y actualmente se venden por \$100 000. ¿Cuál es la tasa anual de interés compuesto mensualmente que ha redituado?

32. Un circuito eléctrico simple, sin condensadores, consta de una resistencia de R ohms y una inductancia de L henries, y tiene una fuerza electromotriz que se corta cuando se tienen I_0 amperes. La corriente disminuye de tal modo que a t segundos la corriente es i amperes e $i = I_0 e^{-(R/L)t}$. Emplee los logaritmos naturales para resolver esta ecuación para t en términos de i y las constantes R, L e I_0.

En los ejercicios 33 a 38, utilice la graficadora para estimar, con cuatro dígitos significativos, la solución de la ecuación. Verifique la respuesta algebraicamente.

33. $10^x - 10^{-x} = 2$
34. $10^x + 10^{-x} = 4$
35. $4^x - 4^{-x} = 3$
36. $5^x - 5^{-x} = 8$
37. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 4$
38. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 3$

En los ejercicios 39 y 40, resuelva la ecuación para x en términos de y.

39. $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$
40. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

41. (a) Utilice la graficadora para determinar, con aproximación de centésimos, el valor de x entre 1 y 2 para la cual $2^x = x^5$. (b) Utilice la graficadora para determinar, con aproximación de centésimos, el valor de x entre 1 y 2 para el cual

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{5} \ln 2$$

(c) ¿Por qué son iguales las respuestas de los incisos (a) y (b)?

42. Emplee el procedimiento de la solución del ejemplo 3 para proporcionar la fórmula siguiente que relaciona logaritmos con bases diferentes a y b de un número x:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

43. (a) Describa cómo usaría la graficadora para trazar la gráfica de la función definida por $f(x) = \log_x k$, donde k es una constante positiva. (b) Aplique la respuesta del inciso (a) para trazar la gráfica de la función definida por $f(x) = \log_x 5$. (c) A partir de la gráfica del inciso (b) determine el dominio y el contradominio de la función f.

44. **(a)** Describa cómo emplearía la graficadora para trazar la gráfica de la función definida por $f(x) = \log_x (x + k)$, donde k es una constante positiva. **(b)** Aplique la respuesta del inciso (a) para trazar la gráfica de la función definida por $f(x) = \log_x (x + 2)$. **(c)** A partir de la gráfica del inciso (b), determine el dominio y el contradominio de la función f.

45. Explique por qué se puede concluir de las ecuaciones

$$x^a = y \qquad \text{y} \qquad y^b = x$$

que a y b son recíprocos uno del otro, si x es diferente de 1.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 6

▸ VISIÓN RETROSPECTIVA

6.1 Se inició la discusión sobre funciones inversas con la definición de función uno a uno y se estableció la prueba de la recta horizontal que determina si una función es uno a uno. También se definió función creciente y función decreciente, y se probó el teorema que establece que las funciones monótonas son uno a uno. Se continuó con la definición de la inversa de una función, también se probó el teorema que garantiza que si una función f uno a uno tiene a f^{-1} como su inversa, entonces f^{-1} es una función uno a uno y tiene a f como su inversa. Después se explicó cómo encontrar $f^{-1}(x)$ cuando se conoce $f(x)$, y se demostró que las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

6.2 Después de que se establecieron las leyes de los exponentes, se mostró cómo la notación científica proporciona un modo conveniente para escribir numerales que representan números muy grandes o muy pequeños, así como la forma para indicar el número de dígitos significativos de un numeral. Se consideraron los tres tipos de interés: simple, compuesto y compuesto continuamente. La última forma de interés nos llevó a la introducción del número e. Se continuó esta discusión con una explicación intuitiva de cómo e puede aproximarse mediante la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

conforme x se incrementa sin límite.

6.3 El estudio acerca de las funciones exponenciales comenzó con la definición y gráfica de la función exponencial de base b. Después se presentó la función exponencial natural y su gráfica. El crecimiento exponencial fue ilustrado mediante el crecimiento del número de bacterias presentes en un cultivo, mientras que el decrecimiento exponencial fue un modelo para la disminución en el valor de una pieza de equipo. Se utilizó la curva de aprendizaje para mostrar el crecimiento limitado. El crecimiento de una población cuando el medio impone un límite superior a su tamaño, proporcionó un ejemplo para el crecimiento logístico.

6.4 Se definió una función logarítmica como la inversa de una función exponencial. En particular, la función logarítmica natural es la inversa de la función exponencial natural. Se mostró cómo determinar el valor de un logaritmo y cómo resolver una ecuación logarítmica. Las aplicaciones de este concepto incluyeron el empleo de los logaritmos para resolver ecuaciones en las que la variable se presenta en un exponente.

6.5 Las propiedades de los logaritmos se presentaron en forma de teoremas, considerando logaritmos de productos, cocientes y potencias. Se probaron estos teoremas a partir de las propiedades correspondientes de los exponentes. Las ecuaciones logarítmicas proporcionaron una aplicación de las propiedades de los logaritmos.

6.6 Se introdujeron los logaritmos comunes, o de base 10. Se aplicaron estos logaritmos, así como los logaritmos naturales, para determinar los logaritmos en otras bases, y en la solución de ecuaciones exponenciales.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 4, dibuje la gráfica de la función y emplee la prueba de la recta horizontal para determinar si es uno a uno. Verifique la gráfica en la graficadora.

1. $f(x) = 4 + 3x$
2. $g(x) = 1 - x^3$
3. $g(x) = x^2 - 1$
4. $f(x) = |x + 4|$

En los ejercicios 5 a 8, haga lo siguiente: (a) Dibuje la gráfica de f y utilice la prueba de la recta horizontal para probar que f es uno a uno; (b) encuentre $f^{-1}(x)$; (c) verifique que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$; (d) trace las gráficas de f, f^{-1} y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección y observe que las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$.

5. $f(x) = x^3 - 8$
6. $f(x) = 5x - 10$
7. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$
8. $f(x) = \dfrac{-4}{x + 1}$

En los ejercicios 9 a 12, f es una función uno a uno. (a) Establezca el contradominio de f. (b) Determine f^{-1} y establezca su dominio. (c) Trace las gráficas de f, f^{-1} y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección.

9. $f(x) = 9 - x^2,\ x \geq 0$
10. $f(x) = x^2 - 9,\ x \leq 0$
11. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1},\ x \leq -1$
12. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 1},\ x \geq 1$

En los ejercicios 13 a 16, (a) muestre que f es monótona y por tanto uno a uno; (b) encuentre $f^{-1}(x)$; (c) dibuje las gráficas de f y f^{-1} en el mismo sistema coordenado; (d) verifique las gráficas de f y f^{-1} trazándolas en el mismo rectángulo de inspección.

13. $f(x) = (1 - x)^3$
14. $f(x) = (x + 8)^3$
15. $f(x) = x^2 - 4,\ x \geq 0$
16. $f(x) = 1 - x^2,\ x \leq 0$

En los ejercicios 17 a 46, dibuje la gráfica de la función y compruébela en la graficadora.

17. $f(x) = 6^x$
18. $g(x) = 5^x$
19. $F(x) = 6^{-x}$
20. $G(x) = 5^{-x}$
21. $g(x) = 2^{x/2}$
22. $f(x) = 3^{x/3}$
23. $G(x) = 2^{-x/2}$
24. $F(x) = 3^{-x/3}$
25. $f(x) = 3e^x$
26. $g(x) = 2e^{-x}$
27. $g(x) = -e^{-x}$
28. $f(x) = -2e^{3x}$
29. $G(x) = 4e^{-2x}$
30. $F(x) = 5e^{-0.1x}$
31. $f(x) = e^{x-2}$
32. $g(x) = e^{x+1}$
33. $F(x) = e^x - 3$
34. $G(x) = e^x + 1$
35. $f(x) = 2 \ln x$
36. $g(x) = 4 \log_2 x$
37. $g(x) = -\frac{1}{2} \log_{10} x$
38. $f(x) = 3 \ln(-x)$
39. $f(x) = 3 - \ln x$
40. $g(x) = \ln(x + 2)$
41. $g(x) = 3 \ln(x - 2)$
42. $f(x) = 2 \ln x + 1$
43. $F(x) = -2e^{x-3} + 4$
44. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x+4} - 3$
45. $f(x) = 3 \ln(x + 2) - 5$
46. $g(x) = -\ln(x - 1) + 2$

En los ejercicios 47 a 50, resuelva la ecuación para x, y o b.

47. (a) $\log_5 x = 4$ (b) $\log_8 16 = y$
48. (a) $\log_9 x = -\frac{3}{2}$ (b) $\log_{27} 81 = y$
49. (a) $\log_b 4 = -\frac{1}{3}$ (b) $\ln x = -2$
50. (a) $\log_b 256 = \frac{4}{3}$ (b) $\ln x = \frac{3}{4}$

En los ejercicios 51 a 54, exprese el logaritmo en términos de los logaritmos de x, y y z, donde las variables representan números positivos.

51. $\log_b(x^3 y^2 \sqrt{z})$
52. $\log_b(\sqrt[3]{xy}\, z^5)$
53. $\log_b\left(\dfrac{x\sqrt[3]{y}}{z^4}\right)$
54. $\log_b \sqrt{\dfrac{x^4 y^2}{z^3}}$

En los ejercicios 55 a 58, escriba la expresión como un solo logaritmo con coeficiente 1.

55. $\frac{2}{3} \log_{10} y - 4 \log_{10} x - \frac{1}{3} \log_{10} z$
56. $\ln k + 4 \ln L - \ln b - 3 \ln d$
57. $\ln 4 + \ln \pi + 2 \ln r + \ln h - \ln 3$
58. $\log_b 3 + \frac{1}{2} \log_b x + 3 \log_b z - \frac{1}{3} \log_b y - \log_b 2$

En los ejercicios 59 a 66, encuentre el conjunto solución de la ecuación, y exprese los resultados con cuatro dígitos significativos. Verifique la respuesta en la graficadora.

59. $5^x = 26$
60. $3^{x-2} = 8$

61. $(21.6)^x = 104$

62. $e^{-4x} = 0.231$

63. $e^{x/3} = 14.8$

64. $8^x - 8^{-x} = 8$

65. $2^x + 2^{-x} = 6$

66. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 67 a 70, determine el valor del logaritmo con cuatro dígitos significativos.

67. $\log_8 7$

68. $\log_7 100$

69. $\log_2 38$

70. $\log_5 e$

En los ejercicios 71 a 74, encuentre el conjunto solución de la ecuación.

71. $\log_4(2x + 3) - 2\log_4 x = 2$

72. $\log_3(2x - 3) + \log_3(x + 3) = 4$

73. $\log_{10} x + \log_{10}(x - 200) - \log_{10} 4 = 5 - \log_{10} 5$

74. $\log_2(x + 2) - 3 = \log_2 3 - \log_2 x$

75. Si $\ln i = \ln I - RT/L$, muestre que $i = Ie^{-RT/L}$.

En los ejercicios 76 a 95, resuelva el problema mediante un modelo matemático que contenga una función exponencial. Escriba una conclusión.

76. Se paga un préstamo de \$1 000 a una tasa de interés anual de 16% en un solo pago al final de un año. Determine el monto total pagado si **(a)** se paga interés simple, **(b)** el interés se compone trimestralmente, y **(c)** el interés se compone mensualmente.

77. Una inversión de \$8 000 gana interés a una tasa de 12% anual, y el interés se paga al final de año. Encuentre el interés para el primer año si **(a)** reditúa interés simple, **(b)** el interés se compone semestralmente, y **(c)** el interés se compone trimestralmente.

78. Efectúe el ejercicio 76, si el interés se compone continuamente.

79. Realice el ejercicio 77, si el interés se compone continuamente.

80. Se depositan \$500 en una cuenta de ahorros y gana un interés durante 7 años a una tasa de 6%. Si no se efectúan retiros ni depósitos posteriormente, ¿cuánto habrá en la cuenta después de 7 años si **(a)** el interés se compone trimestralmente, y **(b)** el interés se compone continuamente.

81. Hace 10 años se compró una casa y fue vendida en \$100 000. Si la tasa de interés anual fue determinada en 20% compuesta trimestralmente, ¿cuál fue el precio de adquisición de la casa con una aproximación de miles?

82. El interés sobre una cuenta de ahorros se calcula 8% anual compuesto continuamente. Si se desea tener \$1 000 en la cuenta al final de un año realizando un solo depósito ahora, ¿cuál debe ser la cantidad del depósito?

83. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que una inversión se duplique si se gana interés a una tasa de 12% anual compuesto **(a)** trimestralmente, y **(b)** continuamente?

84. ¿Cuánto tiempo será necesario para que un depósito de \$500 en una cuenta de ahorros se acumule hasta \$600, si el interés es calculado a 8% anual compuesto **(a)** trimestralmente, y **(b)** continuamente?

85. Si $f(t)$ miligramos de radio están presentes después de t años, entonces $f(t) = ke^{-0.0004t}$, donde k es una constante. **(a)** Determine k a partir de hecho de que 60 mg están presentes ahora. **(b)** el valor de k del inciso (a) trace la gráfica de f Determine algebraicamente cuánto radio se tendrá dentro de 100 años a partir de este momento verifique la respuesta en la graficadora. **(d)** ce la graficadora para estimar cuánto tiempo necesitará hasta que únicamente existan 50 mg radio. Compruebe la estimación algebraicamente

86. En t minutos se tendrán presentes $f(t)$ bacterias cierto cultivo, donde $f(t) = ke^{0.03t}$ y k es una constante. **(a)** Determine k si inicialmente tienen 60 000 bacterias presentes. **(b)** Con el lor de k del inciso (a) trace la gráfica de f. **(c)** termine algebraicamente cuántas bacterias tendrán en 15 min, y verifique la respuesta en graficadora. **(d)** Emplee la graficadora para mar cuántos minutos se necesitarán hasta existan 200 000 bacterias. Compruebe la mación algebraicamente.

87. ¿Después de cuántos meses en el trabajo puede obrero, del ejercicio 29 de la Sección 6.3, pletar 80 unidades por día?

88. La población de cierta ciudad t años a partir ahora se espera que sea $f(t)$, donde $f(t) = 40\,000$ y k es una constante. Si dentro de 40 años se ra una población de 60 000, ¿cuándo se que sea de 80 000?

89. De la ley de enfriamiento el ejercicio 35 de la demostrar, en Cálculo, que de una habitación, en la qu hacia el exterior, donde la t la lectura del termómetro e minutos si $f(t)$ grados es la segundos después del trasl

$$f(t) = 35 + 40\left(\frac{3}{4}\right)^{t/30}$$

¿Cuál es la lectura del term después del traslado; **(b)** 5 m **(c)** 10 min después del después del traslado? **(e)** ¿C termómetro finalmente? **(f)** U la parte (e) para determinar de la gráfica de f y trace esta en el mismo rectángulo de in

90. En una ciudad pequeña se pr de tal manera que $f(t)$ perso enfermedad t semanas despué

$$f(t) = \frac{10\,000}{1 + 599e^{-0.8t}}$$

¿Cuántas personas tenían la e cualmente; **(b)** después de 6 s después de 12 semanas? **(d)** Si la indefinidamente, ¿cuántas pers enfermedad? **(e)** Utilice la respu para determinar la asíntota hori de f y trace esta recta y la mismo rectángulo de inspección.

91. Después de cuántos minutos la cuerpo del ejercicio 89, será de 4

92. En la ciudad del ejercicio 90, ¿de semanas 5 000 personas, la mitad de la ciudad, contraerá la enferme

93. Anteriormente, un bono del Tes Unidos se vendía en \$74 para ser años después, a su vencimiento, p mine la tasa de interés anual comp mente que se obtuvo.

94. Una inversión de \$1 000 gana \$80 un año a una tasa de interés simple ¿Cuál es la tasa de interés anual que tuar la misma cantidad de interés en

89. De la ley de enfriamiento de Newton (*véase* el ejercicio 35 de la Sección 6.3), se puede demostrar, en Cálculo, que si un termómetro se lleva de una habitación, en la que la temperatura es de 75°, hacia el exterior, donde la temperatura es de 35°, y la lectura del termómetro es 65° después de 30 s, entonces si $f(t)$ grados es la lectura del termómetro, t segundos después del traslado

$$f(t) = 35 + 40\left(\frac{3}{4}\right)^{t/30}$$

¿Cuál es la lectura del termómetro **(a)** 3 min después del traslado; **(b)** 5 min después del traslado; **(c)** 10 min después del traslado; **(d)** 30 min después del traslado? **(e)** ¿Cuál será la lectura del termómetro finalmente? **(f)** Utilice la respuesta de la parte (e) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f y trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

90. En una ciudad pequeña se propaga una epidemia de tal manera que $f(t)$ personas han contraído la enfermedad t semanas después de su brote, donde

$$f(t) = \frac{10\,000}{1 + 599e^{-0.8t}}$$

¿Cuántas personas tenían la enfermedad **(a)** inicialmente; **(b)** después de 6 semanas, y **(c)** después de 12 semanas? **(d)** Si la epidemia continúa indefinidamente, ¿cuántas personas contraerán la enfermedad? **(e)** Utilice la respuesta del inciso (d) para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de f y trace esta recta y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección.

91. ¿Después de cuántos minutos la temperatura del cuerpo del ejercicio 89, será de 45°?

92. En la ciudad del ejercicio 90, ¿después de cuántas semanas 5 000 personas, la mitad de la población de la ciudad, contraerá la enfermedad?

93. Anteriormente, un bono del Tesoro de Estados Unidos se vendía en $74 para ser reembolsado 12 años después, a su vencimiento, por $100. Determine la tasa de interés anual compuesta mensualmente que se obtuvo.

94. Una inversión de $1 000 gana $80 de interés en un año a una tasa de interés simple de 8% anual. ¿Cuál es la tasa de interés anual que debería redituar la misma cantidad de interés en un año si **(a)** el interés se compone trimestralmente, y **(b)** el interés se compone continuamente?

95. Dos movimientos sísmicos tienen el mismo epicentro y registran magnitudes de 7.3 y 5.6 en la escala de Richter. Si y_1 y y_2 son respectivamente las mediciones de la energía liberada por los dos temblores, entonces ¿cuántas veces y_1 equivale a y_2? *Sugerencia*: *Véase* el ejercicio 33 de la Sección 6.5.

En los ejercicios 96 a 98, f es una función exponencial, es decir, $f(x) = b^x$. Utilice las leyes de los exponentes para probar la igualdad.

96. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ **97.** $f(x - y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

98. $f(nx) = [f(x)]^n$

En los ejercicios 99 a 101, g es una función logarítmica, esto es, $g(x) = \log_b x$. Emplee las propiedades de los logaritmos para probar la igualdad.

99. $g(xy) = g(x) + g(y)$ **100.** $g\left(\dfrac{x}{y}\right) = g(x) - g(y)$

101. $g(x^n) = n\,g(x)$

102. Dadas

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ y } g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(a) Trace las gráficas de f, g y la recta $y = x$ en el mismo rectángulo de inspección y observe que las gráficas de f y g son reflexiones una de la otra con respecto a la recta $y = x$. **(b)** Pruebe algebraicamente que f y g son funciones inversas.

103. **(a)** Utilice la respuesta del ejercico 43 de la Sección 6.6, para trazar la gráfica de la función definida por $f(x) = \log_x 10$. **(b)** A partir de la gráfica del inciso (a) determine el dominio y contradominio de la función f.

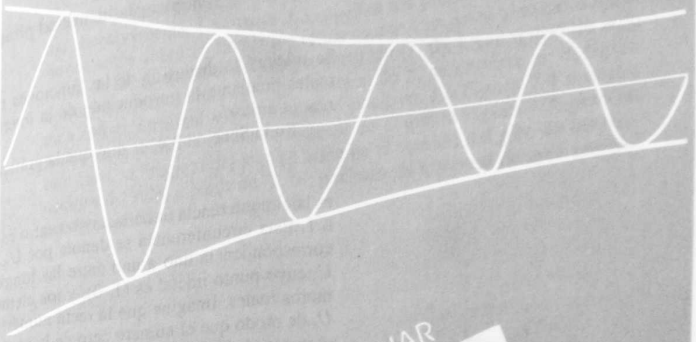
104. Sea F la función definida por $F(x) = \log_x (x - 3)$. **(a)** Determine $F(10)$ en la calculadora. **(b)** Obtenga $F(100)$ en la calculadora usando la tecla $\log_{10}$. **(c)** Determine $F(1\,000)$ en la calculadora empleando la tecla $\log_{10}$. **(d)** De las respuestas de las partes (a) a (c) ¿a qué se aproxima $F(x)$ conforme x crece sin límite? **(e)** Utilice la respuesta de la parte (d) para escribir una ecuación de la recta que se sospecha es una asíntota horizontal de la gráfica de F. **(f)** Trace la recta del inciso (e) y la gráfica de F en el mismo rectángulo de inspección. *Sugerencia*: Un método para trazar la gráfi-

ca de F, se tiene en las respuestas de los ejercicios 43 y 44 de la Sección 6.6. (**g**) A partir de las gráficas del *inciso (f)*, determine el dominio y contradominio de F.

105. Por observación, se determinó que una de las soluciones de la ecuación $x^3 = 3^x$ es 3. (**a**) Existe también una solución irracional. Para dar una aproximación numérica de esta solución, trace gráfica de $y = x^3 - 3^x$ y emplee el rastreo y a mento de la graficadora para determinar la lución con una aproximación de centésimo partir de las dos soluciones de la ecuación y la gráfica del inciso (a), determine los valo de x para los que (**b**) $x^3 < 3^x$, y (**c**) $x^3 > 3^x$.

Capítulo 7

Funciones trigonométricas de números reales



VISIÓN PRELIMINAR

Se continuará la discusión de las funciones trascendentes, iniciada en el Capítulo 6, con las funciones exponenciales y logarítmicas. Aquí se presentarán las funciones trigonométricas. En griego, la palabra *trigonom* significa triángulo y *metron*, medida. Así, *trigonometría* es la medición de triángulos, y antiguamente se empleó en la agrimensura (medición y deslinde de terrenos). La navegación y la astronomía, con el objeto de encontrar relaciones entre las longitudes de los lados de los triángulos, así como en la medición de ángulos. Aún se emplea para estos propósitos en los cuales las funciones trigonométricas tienen dominios constituidos por medidas angulares. En la actualidad, estas funciones están relacionadas con fenómenos que se repiten periódicamente, tales como movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, oscilación de péndulos, ciclos comerciales y ritmos biológicos. Estas aplicaciones de las funciones trigonométricas requieren que sus dominios sean conjuntos de números reales. Debido a la importancia de la naturaleza periódica de las funciones trigonométricas para el estudio del Cálculo, estas se definirán primero con dominios de números reales. Posteriormente, en el Capítulo 8, se tratarán las funciones trigonométricas de modo que sus dominios sean conjuntos de mediciones angulares.

Sumario

7.1 Funciones seno y coseno
7.2 Valores de las funciones seno y coseno, y funciones periódicas
7.3 Gráficas de las funciones seno y coseno, y de otras ondas senoidales
7.4 Aplicaciones de las funciones seno y coseno a fenómenos periódicos
7.5 Otras gráficas que implican a las funciones seno y coseno
7.6 Funciones tangente, cotangente, secante y cosecante
7.7 Periodicidad y gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

7.1 FUNCIONES SENO Y COSENO

OBJETIVOS

1. **Medir la longitud de un arco de la circunferencia unitaria.**
2. **Localizar el punto terminal de un arco de longitud dada de la circunferencia unitaria.**
3. **Definir las funciones seno y coseno.**
4. **Calcular los valores exactos de las funciones seno y coseno de los números cuadrantales.**
5. **Calcular los valores exactos de las funciones seno y coseno para $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, y $\frac{1}{3}\pi$.**
6. **Aprender y emplear la identidad pitagórica fundamental.**

FIGURA 7.2

Se iniciará la discusión de las funciones trigonométricas de números reales mediante la introducción de la *longitud de arco en la circunferencia unitaria*.

En la Sección 3.4, se dijo que la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

es la circunferencia unitaria, cuyo centro es el origen y su radio es igual a 1. Esta circunferencia se denota por U. Se mostrará que existe una correspondencia uno a uno entre las longitudes de todos los arcos de U, cuyo punto inicial es (1, 0), y los elementos del conjunto R de números reales. Imagine que la recta numérica "se enrolla alrededor" de U, de modo que el número cero de la recta numérica real coincida con el punto (1, 0) de U. *Véase* la Figura 7.1(a)-(c). La Figura 7.1(a) muestra a U y la recta numérica tangente a U en el punto (1, 0). En la Figura 7.1(b), la parte positiva de la recta numérica se enrolló alrededor de

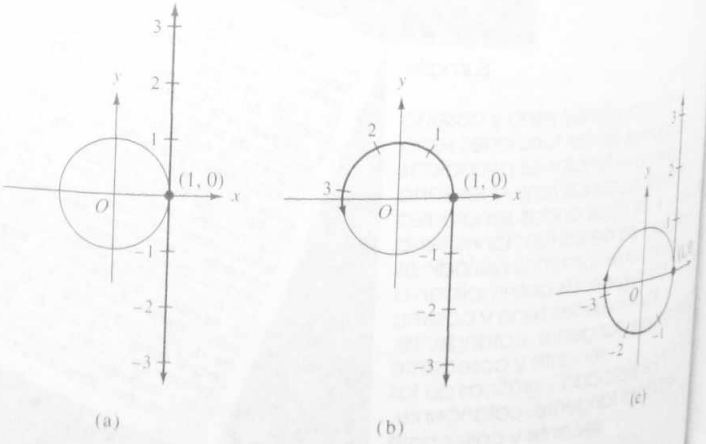


FIGURA 7.1

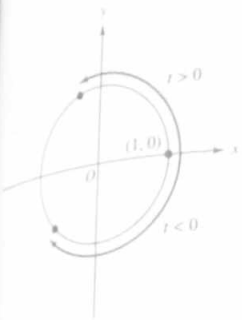


FIGURA 7.2

U en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj; y en la Figura 7.1(c), el lado negativo se enrolla sobre U en el sentido del giro de las manecillas del reloj. Si se considera que un arco con punto inicial en (1, 0) tiene su punto terminal sobre U y se enrolla en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, entonces un número real positivo representa la longitud del arco; si el arco considerado se enrolla en el mismo sentido del giro de las manecillas del reloj a partir de (1, 0), entonces la longitud del arco se representa con un número negativo. *Véase* la Figura 7.2.

Debido a que la longitud de una circunferencia está dada por $2\pi r$, donde r es la medida del radio, entonces, la longitud de la circunferencia U es 2π. De aquí que un medio de la longitud de U es π, una cuarta parte de su longitud es $\frac{1}{2}\pi$, una octava parte de su longitud es $\frac{1}{4}\pi$, y así sucesivamente. La Figura 7.3 muestra los puntos terminales de algunos arcos sobre U, donde los arcos se enrollan en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir de (1, 0). La longitud de arco correspondiente a cada arco en términos de π, se expresa en la figura en el punto terminal y es un número positivo. La Figura 7.4 muestra los mismos puntos terminales de arcos de U que la Figura 7.3, pero en este caso, la longitud del arco se mide en el sentido del giro de las manecillas del reloj a partir de (1, 0); por esto, la longitud de arco correspondiente es un número negativo.

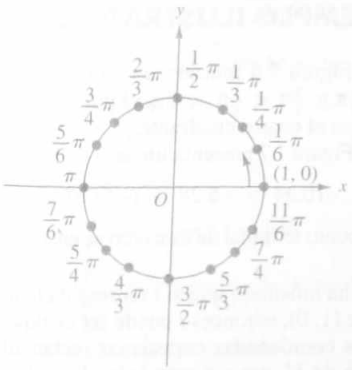


FIGURA 7.3

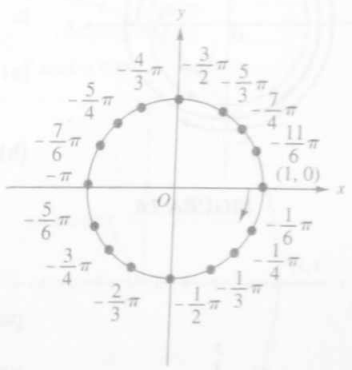


FIGURA 7.4

La longitud de un arco de U suele expresarse en términos de π. Sin embargo, cuando se utilizan decimales es posible aproximar π mediante 3.14 y escribir $\pi \approx 3.14$. Así,

$$\frac{1}{2}\pi \approx 1.57 \qquad \frac{3}{2}\pi \approx 4.71 \qquad 2\pi \approx 6.28$$
$$\frac{1}{4}\pi \approx 0.79 \qquad -\frac{1}{3}\pi \approx -1.05 \qquad -\frac{3}{4}\pi \approx -2.36$$

y así sucesivamente.

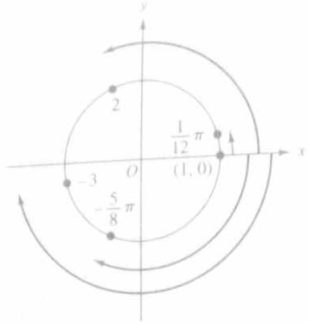


FIGURA 7.5

▶ EJEMPLO 1 *Localización del punto terminal de un arco de U dada su longitud*

Muestre en una figura la localización de los puntos terminales de los arcos de U, cuyos puntos iniciales son $(1, 0)$ y tienen la longitud dada también indique el cuadrante en el cual se encuentra el punto terminal (a) $\frac{1}{12}\pi$; (b) 2; (c) $-\frac{5}{8}\pi$; (d) -3.

Solución Considere la Figura 7.5.

(a) Debido a que $0 < \frac{1}{12}\pi < \frac{1}{2}\pi$, el punto terminal está en el primer cuadrante.

(b) Como $1.57 < 2 < 3.14$, el punto terminal se encuentra en el segundo cuadrante.

(c) Puesto que $-\pi < -\frac{5}{8}\pi < -\frac{1}{2}\pi$, el punto terminal está en el tercer cuadrante.

(d) Como $-3.14 < -3 < -1.57$, el punto terminal se encuentra en el tercer cuadrante.

Se ha considerado que la recta numérica real se enrolla sobre Por esto, si la longitud de un arco a partir de $(1, 0)$ es mayor que 2π menor que -2π, la parte de la recta numérica enrollada será mayor que la longitud de U.

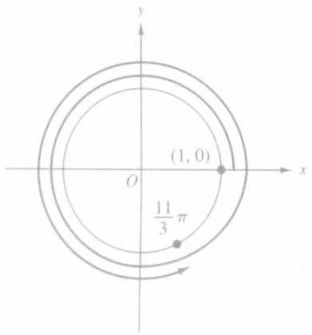


FIGURA 7.6

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) La Figura 7.6 muestra un arco de longitud $\frac{11}{3}\pi$. Como $\frac{11}{3}\pi = 2\pi + \frac{5}{3}\pi$ y $\frac{3}{2}\pi < \frac{5}{3}\pi < 2\pi$, el punto terminal de este arco se encuentra en el cuarto cuadrante.

(b) La Figura 7.7 presenta un arco de longitud -10.34. Debido a que

$$-10.34 = -6.28 + (-4.06) \quad \text{y} \quad -4.71 < -4.06 < -3.14$$

el punto terminal de este arco se encuentra en el segundo cuadrante.

Se ha mostrado que si t representa la longitud de un arco de U que parte de $(1, 0)$, entonces t puede ser cualquier número real.

Las coordenadas cartesianas rectangulares del punto terminal de un arco de U, cuyo punto inicial es $(1, 0)$, son funciones del arco de longitud t. Dichas funciones se denominan *seno* (se abrevia *sen*) y *coseno* (se abrevia *cos*).

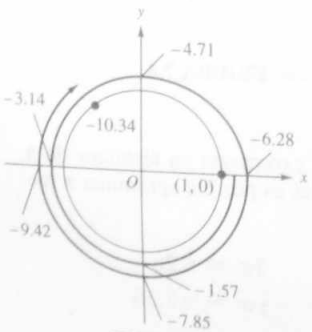


FIGURA 7.7

DEFINICIÓN **Funciones seno y coseno**

Si t es un número real que representa la longitud de un arco de U con punto inicial $(1, 0)$ y punto terminal (x, y), entonces

$$\operatorname{sen} t = y \quad \text{y} \quad \cos t = x$$

El dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de números reales. Para determinar los contradominios de estas funciones, observe que (x, y) es un punto de la circunferencia unitaria U. De esto,

$$|y| \leq 1 \quad \text{y} \quad |x| \leq 1$$

Por tanto, el contradominio de cada una de estas funciones es el intervalo cerrado $[-1, 1]$; es decir,

$$-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos t \leq 1$$

Como sen t y cos t son coordenadas de un punto de una circunferencia, las funciones seno y coseno se denominan **funciones circulares.** También se les llama **funciones trigonométricas definidas sobre números reales.**

La Figura 7.8 muestra la circunferencia unitaria U, y sobre U hay marcas para cada 0.1 de unidad. La longitud de U es $2\pi \approx 6.28$. Para cualquier número real t, se puede aproximar sen t y cos t mediante valores aproximados de las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto cuya longitud de arco, a partir de $(1, 0)$, es t. La figura siguiente muestra esto para tres valores de t.

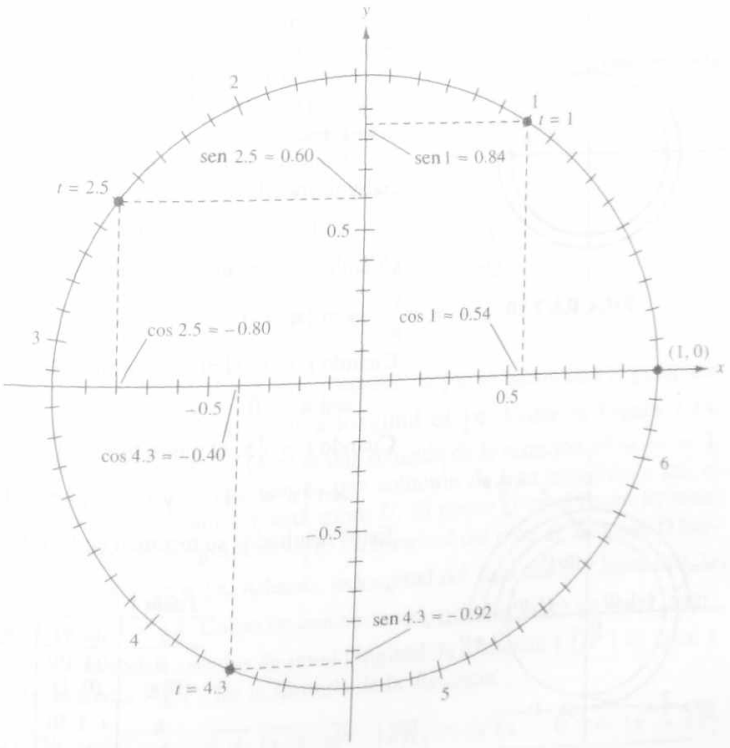


FIGURA 7.8

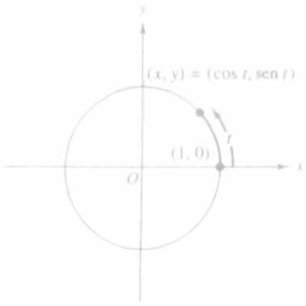


FIGURA 7.9

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

La Figura 7.8 presenta los puntos de U cuyas longitudes de arco a partir de (1, 0), son $t = 1$, $t = 2.5$ y $t = 4.3$. El seno y el coseno de cada uno de estos valores de t se aproximan mediante las coordenadas x y y del punto, respectivamente. De la figura se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{sen } 1 &\approx 0.84 & \cos 1 &\approx 0.54 \\ \text{sen } 2.5 &\approx 0.60 & \cos 2.5 &\approx -0.80 \\ \text{sen } 4.3 &\approx -0.92 & \cos 4.3 &\approx -0.40 \end{aligned}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) La Figura 7.9 muestra a U y un arco, para el cual $t > 0$, que tiene su punto terminal en el primer cuadrante. Observe que sen t y cos t son positivos.

(b) En la Figura 7.10 hay un arco de U, para el cual $t < 0$, que tiene su punto terminal en el segundo cuadrante. En este caso sen t es positivo y cos t es negativo.

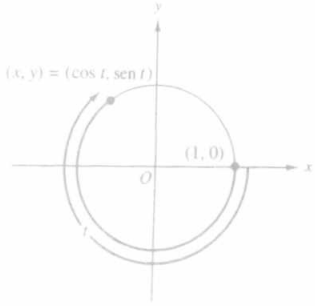


FIGURA 7.10

Los valores exactos de las funciones seno y coseno de ciertos números reales pueden obtenerse mediante el uso de geometría. En particular, *véase* la Figura 7.11 en la que se muestran arcos para los cuales es igual a 0, $\frac{1}{2}\pi$, π y $\frac{3}{2}\pi$. Estos valores de t se denominan **números cuadrantales.**

Cuando $t = 0$, la longitud del arco es 0, y por esto los puntos inicial y terminal son (1, 0). Así,

$$\text{sen } 0 = 0 \quad \text{y} \quad \cos 0 = 1$$

Cuando $t = \frac{1}{2}\pi$, el punto terminal del arco es (0, 1). Por tanto,

$$\text{sen } \tfrac{1}{2}\pi = 1 \quad \text{y} \quad \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0$$

Cuando $t = \pi$, el punto terminal del arco es (−1, 0). En consecuencia,

$$\text{sen } \pi = 0 \quad \text{y} \quad \cos \pi = -1$$

Cuando $t = \frac{3}{2}\pi$, el punto terminal del arco es (0, −1). Así,

$$\text{sen } \tfrac{3}{2}\pi = -1 \quad \text{y} \quad \cos \tfrac{3}{2}\pi = 0$$

Estos resultados se resumen en la Tabla 1.

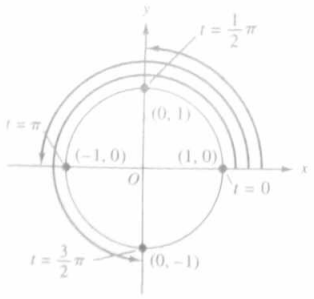


FIGURA 7.11

Tabla 1

t	(x, y)	sen t	cos t
0	(1, 0)	0	1
$\frac{1}{2}\pi$	(0, 1)	1	0
π	(−1, 0)	0	−1
$\frac{3}{2}\pi$	(0, −1)	−1	0

Ahora se procederá a determinar el seno y el coseno de $\frac{1}{4}\pi$. La octava parte de la longitud de U es $\frac{1}{4}\pi$. *Véase* la Figura 7.12, la cual muestra el punto terminal (x, y) para un arco sobre U cuya longitud es $\frac{1}{4}\pi$. En este punto $x = y$. Si se sustituye y por x en la ecuación de U, la cual es $x^2 + y^2 = 1$, se tiene

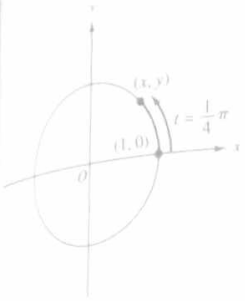


FIGURA 7.12

$$\begin{aligned} y^2 + y^2 &= 1 \\ 2y^2 &= 1 \\ y^2 &= \tfrac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Se rechaza la raíz cuadrada negativa de $\frac{1}{2}$ porque el punto está en el primer cuadrante. Como $x = y$, se obtiene

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto

$$\operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

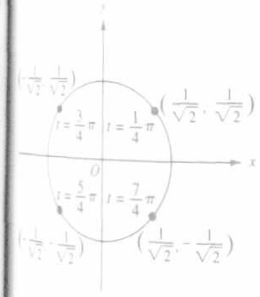


FIGURA 7.13

De estos resultados, y como U es simétrica con respecto a los ejes coordenados y al origen, se obtienen las coordenadas de los puntos para los cuales t es igual a $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ y $\frac{7}{4}\pi$. *Véase* la Figura 7.13. Así

$$\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{7}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos \frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A fin de obtener el seno y coseno de $\frac{1}{6}\pi$, se encontrará el punto terminal $P(x, y)$ del arco cuya longitud es $\frac{1}{6}\pi$. *Véase* la Figura 7.14. Como P está sobre U, (x, y) es una solución de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. De donde $(x, -y)$ también es una solución de esta ecuación y así, el punto $Q(x, -y)$ también está sobre U. El punto Q es el punto terminal del arco cuya longitud es $-\frac{1}{6}\pi$. La longitud del arco de U desde Q hasta P es $\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$. Además, la longitud del arco desde P hasta $R(0, 1)$ es $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$. Como en una circunferencia los arcos de igual longitud subtienden cuerdas de igual longitud, la distancia $|\overline{QP}|$ es igual a la distancia $|\overline{PR}|$. De la fórmula de la distancia

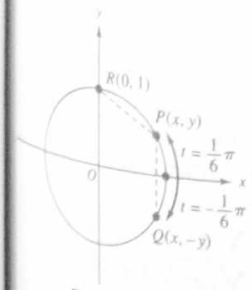


FIGURA 7.14

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y + y)^2} \qquad |\overline{PR}| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2}$$
$$= \sqrt{4y^2} \qquad = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}$$

Como $|\overline{QP}| = |\overline{PR}|$, $|\overline{QP}|^2 = |\overline{PR}|^2$. Por tanto,

$$4y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

Debido a que (x, y) está sobre U, $x^2 + y^2 = 1$. Si se sustituye por $x^2 + y^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} 4y^2 &= 1 - 2y + 1 \\ 4y^2 + 2y - 2 &= 0 \\ 2y^2 + y - 1 &= 0 \\ (2y - 1)(y + 1) &= 0 \\ y = \tfrac{1}{2} \quad &\text{o bien} \quad y = -1 \end{aligned}$$

Como (x, y) está en el primer cuadrante $y > 0$. Por tanto, puede tomarse $y = \frac{1}{2}$. Si se sustituye $\frac{1}{2}$ por y en la ecuación de U, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + (\tfrac{1}{2})^2 &= 1 \\ x^2 &= \tfrac{3}{4} \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Se rechaza la raíz cuadrada negativa de $\frac{3}{4}$ ya que $x > 0$. Así

$$\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

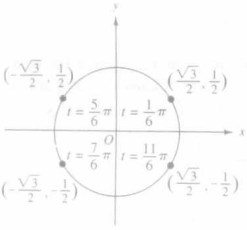


FIGURA 7.15

De estos resultados y la simetría de U, se obtienen las coordenadas de los puntos para los cuales t es igual a $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$ y $\frac{11}{6}\pi$. *Véase* la Figura 7.15. Por tanto,

$$\operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

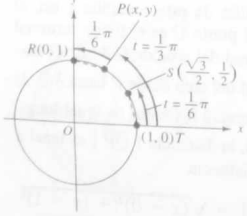


FIGURA 7.16

Ahora sea $P(x, y)$ el punto terminal del arco cuya longitud es t. *Véase* la Figura 7.16. La longitud del arco de U desde P hasta $R(0, 1)$ es $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$. La longitud del arco de U desde $T(1, 0)$ hasta $S(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ es $\frac{1}{6}\pi$. Por tanto, $|\overline{PR}| = |\overline{TS}|$. Como antes,

$$|\overline{PR}| = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} \qquad |\overline{TS}| = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 1)^2 + (\tfrac{1}{2} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{4} - \sqrt{3} + 1 + \tfrac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

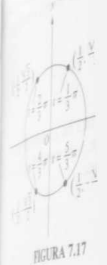


FIGURA 7.17

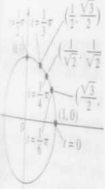


FIGURA 7.18

Tabla 2

t	sen t	cos t
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Como $|\overline{PR}|^2 = |\overline{TS}|^2$, se tiene

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2 - \sqrt{3}$$

Si se sustituye $x^2 + y^2$ por 1, y como (x, y) está sobre U, se obtiene

$$\begin{aligned} 1 - 2y + 1 &= 2 - \sqrt{3} \\ -2y &= -\sqrt{3} \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

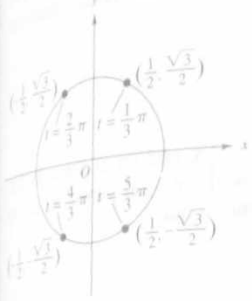


FIGURA 7.17

Al sustituir $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ por y en la ecuación de U, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1 \\ x^2 + \tfrac{3}{4} &= 1 \\ x^2 &= \tfrac{1}{4} \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

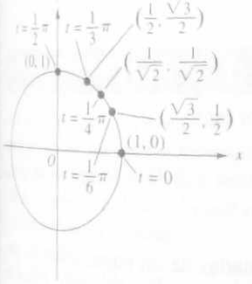


FIGURA 7.18

Otra vez se rechaza la raíz negativa ya que $x > 0$. En consecuencia

$$\operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

Las coordenadas de los puntos para los que t es igual a $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$ y $\frac{5}{3}\pi$, se deducen de estos valores y de la simetría de U, como se muestra en la Figura 7.17. De modo que

$$\operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{5}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

En la Figura 7.18 y la Tabla 2 se tienen el seno y el coseno cuando t es igual a 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi$. Los valores de las funciones correspondientes a múltiplos enteros de estos números se obtienen a partir de U mediante simetría.

Tabla 2

t	sen t	cos t
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0

► EJEMPLO 2 *Determinación de los valores exactos de las funciones seno y coseno para puntos sobre U*

Determine el valor para cada una de las siguientes expresiones: **(a)** $\cos(-\frac{3}{4}\pi)$; **(b)** $\operatorname{sen}(-\frac{4}{3}\pi)$; **(c)** $\cos(\frac{17}{6}\pi)$; **(d)** $\operatorname{sen}(-\frac{5}{2}\pi)$.

Solución

(a) El punto sobre U para $t = -\frac{3}{4}\pi$ está en el tercer cuadrante, y es simétrico, con respecto al origen, al punto del primer cuadrante para el cual $t = \frac{1}{4}\pi$. Por tanto,

$$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) El punto sobre U para el que $t = -\frac{4}{3}\pi$ está en el segundo cuadrante, y es simétrico, con respecto al eje y, al punto del primer cuadrante para el cual $t = \frac{1}{3}\pi$. De modo que

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) Como $\frac{17}{6}\pi = 2\pi + \frac{5}{6}\pi$, el punto sobre U para el que $t = \frac{17}{6}\pi$ está en el segundo cuadrante y es simétrico, con respecto al eje y, al punto del primer cuadrante para el cual $t = \frac{1}{6}\pi$. En consecuencia

$$\cos\frac{17}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(d) Debido a que $-\frac{5}{2}\pi = -2\pi + (-\frac{1}{2}\pi)$, $-\frac{5}{2}\pi$ es un número cuadrantal y el punto sobre U es $(0, -1)$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{5}{2}\pi\right) = -1$$

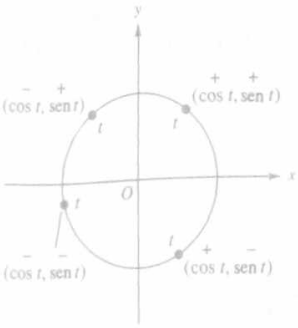


FIGURA 7.19

Como sen t y cos t son las coordenadas de un punto sobre U, los signos dependen del cuadrante en el cual se localiza el punto. Véase la Figura 7.19. La Tabla 3 resume los resultados de esta figura. El cuadrante en la tabla indica aquel que contiene al punto terminal del arco de longitud t.

Tabla 3

Cuadrante	sen t	cos t
Primero	+	+
Segundo	+	−
Tercero	−	−
Cuarto	−	+

Si t es cualquier número real, entonces como (cos t, sen t) es un punto de U y una ecuación de U es $y^2 + x^2 = 1$, se tiene

$$(\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

Esta ecuación es verdadera para todo t. En lugar de $(\operatorname{sen} t)^2$ y $(\cos t)^2$, se acostumbra escribir $\operatorname{sen}^2 t$ y $\cos^2 t$. Por tanto, se tiene la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Esta identidad se denomina **identidad pitagórica fundamental** debido a que la fórmula de la distancia (obtenida a partir del teorema de Pitágoras) se utilizó para deducir la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. La identidad muestra la relación entre los valores de seno y coseno, la cual se emplea para determinar uno de ellos cuando el otro se conoce.

EJERCICIOS 7

En los ejercicios 1 a 8, mue ubicación de los puntos ter cuyo punto inicial es (1, 0) ; dado, también indique el c cuentra el punto terminal.

1. (a) $\frac{1}{4}\pi$ (b) $\frac{3}{5}\pi$
3. (a) 1.23 (b) 5
5. (a) $\frac{17}{7}\pi$ (b) $-\frac{8}{3}\pi$
7. (a) −2 (b) 12.2

En los ejercicios 9 a 16, emp Figura 7.8 para mostrar, sob ria U, el punto cuya longitud es t. Después aproxime el va décimales.

9. $t = 2$ 10. $t =$
12. $t = 4.6$ 13. $t =$
15. $t = -6.1$ 16. $t =$

En los ejercicios 17 a 36, det su función.

17. (a) sen 0 (b) co
18. (a) $\cos\frac{1}{2}\pi$ (b) se

▶ EJEMPLO 3 *Aplicación de la identidad pitagórica fundamental*

Si $\operatorname{sen} t = \frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$, encuentre $\cos t$.

Solución De la identidad pitagórica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Como $\operatorname{sen} t = \frac{2}{3}$, se tiene

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 t = 1$$
$$\tfrac{4}{9} + \cos^2 t = 1$$
$$\cos^2 t = \tfrac{5}{9}$$
$$\cos t = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Se rechaza el valor positivo porque $\cos t < 0$ ya que $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$. Así,

$$\cos t = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$ ◀

EJERCICIOS 7.1

En los ejercicios 1 a 8, muestre mediante una figura la ubicación de los puntos terminales de los arcos de U cuyo punto inicial es (1, 0) y tienen la longitud de arco dada; también indique el cuadrante en el que se encuentra el punto terminal.

1. (a) $\frac{1}{7}\pi$ (b) $\frac{3}{5}\pi$
2. (a) $\frac{1}{5}\pi$ (b) $\frac{9}{8}\pi$
3. (a) 1.23 (b) 5
4. (a) 3 (b) -0.25
5. (a) $\frac{17}{6}\pi$ (b) $-\frac{8}{7}\pi$
6. (a) $\frac{29}{8}\pi$ (b) $-\frac{8}{5}\pi$
7. (a) -2 (b) 12.2
8. (a) 10.6 (b) -4

En los ejercicios 9 a 16, emplee una figura similar a la Figura 7.8 para mostrar, sobre la circunferencia unitaria U, el punto cuya longitud de arco, a partir de (1, 0), es t. Después aproxime el valor de sen *t y* cos *t con dos decimales.*

9. $t = 2$
10. $t = 3$
11. $t = 5.2$
12. $t = 4.6$
13. $t = -3$
14. $t = -2$
15. $t = -6.1$
16. $t = -0.8$

En los ejercicios 17 a 36, determine el valor exacto de la función.

17. (a) sen 0 (b) cos π
18. (a) $\cos\frac{1}{2}\pi$ (b) $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi$
19. (a) $\cos(-\frac{1}{2}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}(-\frac{3}{2}\pi)$
20. (a) $\operatorname{sen}(-\pi)$ (b) $\cos(-\pi)$
21. (a) $\cos\frac{1}{6}\pi$ (b) $\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi$
22. (a) $\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi$ (b) $\cos\frac{3}{4}\pi$
23. (a) $\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi$ (b) $\cos(-\frac{1}{4}\pi)$
24. (a) $\cos\frac{7}{6}\pi$ (b) $\operatorname{sen}(-\frac{1}{6}\pi)$
25. (a) $\cos\frac{1}{3}\pi$ (b) $\cos(-\frac{1}{3}\pi)$
26. (a) $\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi$ (b) $\operatorname{sen}(-\frac{1}{3}\pi)$
27. (a) $\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi$ (b) $\cos\frac{4}{3}\pi$
28. (a) $\cos\frac{5}{6}\pi$ (b) $\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi$
29. (a) $\cos(-\frac{5}{4}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi$
30. (a) $\operatorname{sen}(-\frac{1}{4}\pi)$ (b) $\cos\frac{7}{4}\pi$
31. (a) $\cos\frac{5}{2}\pi$ (b) $\operatorname{sen}(-\frac{5}{2}\pi)$
32. (a) $\cos 4\pi$ (b) $\operatorname{sen} 5\pi$
33. (a) $\operatorname{sen}\frac{8}{3}\pi$ (b) $\cos(-\frac{17}{6}\pi)$

34. (a) $\cos(-\frac{13}{6}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}\frac{10}{3}\pi$

35. (a) $\cos(-\frac{25}{4}\pi)$ (b) $\cos(-\frac{15}{4}\pi)$

36. (a) $\operatorname{sen}\frac{19}{4}\pi$ (b) $\operatorname{sen}(-\frac{11}{4}\pi)$

En los ejercicios 37 y 38, determine el cuadrante que contiene al punto terminal del arco de longitud t si el punto inicial es $(1, 0)$.

37. (a) $\operatorname{sen} t > 0$ y $\cos t > 0$
(b) $\operatorname{sen} t < 0$ y $\cos t > 0$

38. (a) $\operatorname{sen} t < 0$ y $\cos t < 0$
(b) $\operatorname{sen} t > 0$ y $\cos t < 0$

39. Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, encuentre $\operatorname{sen} t$.

40. Si $\operatorname{sen} t = \frac{5}{13}$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, determine $\cos t$.

41. Si $\operatorname{sen} t = -\frac{8}{17}$ y $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$, encuentre $\cos t$.

42. Si $\cos t = -\frac{4}{5}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$, determine $\operatorname{sen} t$.

43. Si $\cos t = \frac{12}{13}$ y $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$, encuentre $\operatorname{sen} t$.

44. Si $\operatorname{sen} t = -\frac{15}{17}$ y $\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$, determine $\cos t$.

45. Si $\cos t = -\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$, encuentre $\operatorname{sen} t$.

46. Si $\cos t = -\frac{1}{3}$ y $-\pi < t < -\frac{1}{2}\pi$, determine $\operatorname{sen} t$.

47. Si $\operatorname{sen} t = 0$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \frac{3}{2}\pi$, encuentre $\cos t$.

48. Si $\cos t = 0$ y $\pi < t < 2\pi$, determine $\operatorname{sen} t$.

En los ejercicios 49 a 52, utilice una calculadora para determinar el cuadrante que contiene al punto terminal del arco cuyo punto inicial es $(1, 0)$ *y su longitud de arco se proporciona.*

49. (a) 52 (b) 26.74

50. (a) 32 (b) 48.22

51. (a) 1984 (b) -1492

52. (a) 2001 (b) -1776

En los ejercicios 53 a 56, utilice la identidad pitagórica fundamental y una calculadora para determinar, con cuatro dígitos significativos, el valor de la función a partir de la información proporcionada.

53. Determine $\operatorname{sen} t$ si $\cos t = 0.7816$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$

54. Encuentre $\cos t$ si $\operatorname{sen} t = 0.1234$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$

55. Determine $\cos t$ si $\operatorname{sen} t = -0.4178$ y $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$

56. Encuentre $\operatorname{sen} t$ si $\cos t = -0.8245$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$

En los ejercicios 57 y 58, $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = \frac{1}{6}t$ *y* $\phi(t) = \frac{1}{4}t$. *Calcule el valor de la función compuesta.*

57. (a) $f(h(\pi))$ (b) $g(\phi(2\pi))$
(c) $f(h(4\pi))$ (d) $g(\phi(5\pi))$

58. (a) $g(h(2\pi))$ (b) $f(\phi(3\pi))$
(c) $g(h(3\pi))$ (d) $f(\phi(-\pi))$

FIGURA 7.20

7.2 VALORES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO, Y FUNCIONES PERIÓDICAS

OBJETIVOS

1. **Aproximar los valores de las funciones seno y coseno en una calculadora.**
2. **Definir una función periódica.**
3. **Aprender que las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π.**
4. **Encontrar valores de las funciones seno y coseno empleando el concepto de periodicidad.**
5. **Encontrar periodos de funciones definidas por sen at y cos at.**
6. **Resolver enunciados de problemas que tienen funciones periódicas como modelos matemáticos.**
7. **Emplear polinomios de Taylor para encontrar valores de las funciones seno y coseno.**

A fin de encontrar los valores de las funciones seno y coseno de números reales se puede emplear una calculadora. Además de las teclas para seno y coseno, la calculadora puede usarse en el modo de *grados* o *radianes*. Cuando se obtienen valores de las funciones trigonométricas de números reales, la calculadora podría utilizarse en el modo de radianes. El uso de la palabra *radián* para este propósito se hará evidente después de estudiar la Sección 8.1. El número de dígitos significativos mostrados para un valor de una función trigonométrica, variará de acuerdo con la calculadora empleada. En esta obra, cuando se obtiene un valor de una función trigonométrica en una calculadora, se redondea el número a cuatro dígitos significativos.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Para evaluar cos 1.384 en una calculadora, primero se activa el modo de radianes. Si se muestran diez dígitos significativos, se leerá

$$\cos 1.384 \approx 0.1857119105$$

Al redondear el resultado a cuatro dígitos significativos se obtiene

$$\cos 1.384 \approx 0.1857$$ ◀

► EJEMPLO 1 *Aproximación de los valores de las funciones seno y coseno en una calculadora*

Aproxime a cuatro dígitos significativos cada una de las siguientes expresiones:

(a) sen 1.072 **(b)** $\operatorname{sen} \frac{3}{14}\pi$ **(c)** cos 1 **(d)** $\cos \frac{5}{12}\pi$

Solución Active el modo de radianes de la calculadora. Los valores introducidos en la calculadora se redondearon a cuatro dígitos significativos.

(a) $\operatorname{sen} 1.072 \approx 0.8782$ **(b)** $\operatorname{sen} \frac{3}{14}\pi \approx 0.6235$

(c) $\cos 1 \approx 0.5403$ **(d)** $\cos \frac{5}{12}\pi \approx 0.2588$ ◀

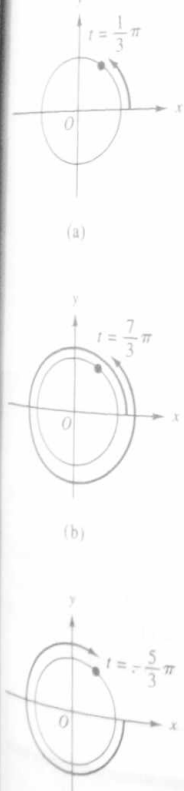


FIGURA 7.20

En la introducción de este capítulo, se mencionó la importancia de la naturaleza periódica de las funciones trigonométricas para el estudio del Cálculo, lo cual motivó las definiciones de sen t y cos t como coordenadas de un punto de la circunferencia unitaria.

Como la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, dos arcos cuyo punto inicial es (1, 0) y que difieren en su longitud por un múltiplo entero de 2π tienen el mismo punto terminal de U. Por ejemplo, *véase* la Figura 7.20. La Figura 7.20(a) muestra un arco de U cuya longitud es de $\frac{1}{3}\pi$. En la Figura 7.20(b) se presenta un arco de longitud $\frac{7}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + 2\pi$, y este arco tiene el mismo punto terminal que el ante-

rior. En la Figura 7.20(c) se muestra un arco de longitud $-\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$ (−1) (2π), y también este arco tiene el mismo punto terminal que los dos anteriores. En realidad, cualquier arco para el cual

$$t = \tfrac{1}{3}\pi + k(2\pi) \qquad k \in Z$$

tendrá el mismo punto terminal que los anteriores. Debido a que las coordenadas del punto terminal del arco determinan el seno y el coseno de la longitud del arco, se infiere que

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi \quad \text{y} \quad \cos(\tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi) = \cos\tfrac{1}{3}\pi$$

donde k es cualquier entero.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

$$\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{7}{3}\pi = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\pi + 2\pi\right) \qquad \cos\frac{7}{3}\pi = \cos\left(\frac{1}{3}\pi + 2\pi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{13}{3}\pi = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\pi + 4\pi\right) \qquad \cos\frac{13}{3}\pi = \cos\left(\frac{1}{3}\pi + 4\pi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\pi - 2\pi\right) \qquad \cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi - 2\pi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = \frac{1}{2}$$

y así sucesivamente.

Como un arco de longitud $t + k \cdot 2\pi$, donde $k \in Z$, tiene el mismo punto terminal que el arco de longitud t, se deduce que las ecuaciones (1) son válidas si se sustituye $\frac{1}{3}\pi$ por cualquier número real t. A continuación se establece este resultado como un teorema.

TEOREMA 1

Si t es un número real y k es cualquier entero,

$$\operatorname{sen}(t + k \cdot 2\pi) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \cos(t + k \cdot 2\pi) = \cos t$$

La propiedad del seno y coseno dada en el Teorema 1 se denomina *periodicidad*, la cual se define ahora formalmente.

DEFINICIÓN **Función periódica**

Se dice que una función f es **periódica** si existe un número real positivo p tal que para cualquier x del dominio de f, se tiene que $x + p$ pertenece también al dominio de f, y

$$f(x + p) = f(x)$$

Al más pequeño de estos números p se le denomina **periodo** de f.

Compare esta definición y el Teorema 1. Puede mostrarse que 2π es el número positivo p más pequeño que tiene la propiedad de que $\operatorname{sen}(t + p) = \operatorname{sen} t$ y $\cos(t + p) = \cos t$, y por tanto, el seno y el coseno son funciones periódicas con periodo 2π.

▶ EJEMPLO 2 *Aplicación del concepto de periodicidad para encontrar valores de las funciones seno y coseno*

Utilice los valores de sen t y cos t cuando $0 \le t < 2\pi$ y la periodicidad de estas funciones, con el propósito de determinar cada una de las siguientes expresiones: **(a)** $\operatorname{sen} \frac{17}{14}\pi$; **(b)** $\cos(-\frac{7}{6}\pi)$; **(c)** $\operatorname{sen} \frac{15}{2}\pi$.

Solución

(a) $$\operatorname{sen} \tfrac{17}{4}\pi = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi)$$
$$= \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) $$\cos(-\tfrac{7}{6}\pi) = \cos[\tfrac{5}{6}\pi + (-1)2\pi]$$
$$= \cos \tfrac{5}{6}\pi$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) $$\operatorname{sen} \tfrac{15}{2}\pi = \operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\pi + 3 \cdot 2\pi)$$
$$= \operatorname{sen} \tfrac{3}{2}\pi$$
$$= -1$$

◀

A partir del hecho de que seno y coseno tienen periodo 2π, puede demostrarse que las funciones definidas por sen at y cos at, donde a es cualquier número real, son periódicas. Esto se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) Sea f la función definida por

$$f(t) = \operatorname{sen} 4t$$

Como el seno tiene periodo 2π,

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sen}(4t + 2\pi) \\ &= \operatorname{sen}[4(t + \tfrac{1}{2}\pi)] \\ &= f(t + \tfrac{1}{2}\pi) \end{aligned}$$

Así, f es periódica con periodo $\frac{1}{2}\pi$.

(b) Sea g la función definida por

$$g(t) = \cos \tfrac{1}{3}t$$

Debido a que el coseno tiene periodo 2π,

$$\begin{aligned} g(t) &= \cos(\tfrac{1}{3}t + 2\pi) \\ &= \cos[\tfrac{1}{3}(t + 6\pi)] \\ &= g(t + 6\pi) \end{aligned}$$

Por tanto, g es periódica con periodo 6π.

Para cada una de las funciones del siguiente ejemplo ilustrativo el periodo es un número racional en lugar de un múltiplo de π.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) Sea f la función definida por

$$f(t) = \operatorname{sen} 6\pi t$$

Como el seno tiene periodo 2π,

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sen}(6\pi t + 2\pi) \\ &= \operatorname{sen}[6\pi(t + \tfrac{1}{3})] \\ &= f(t + \tfrac{1}{3}) \end{aligned}$$

Por tanto, f es periódica con periodo $\frac{1}{3}$.

(b) Sea g la función definida por

$$g(t) = 5 \cot \tfrac{2}{3}\pi t$$

Debido a que la cotangente tiene periodo π,

$$\begin{aligned} g(t) &= 5 \cot(\tfrac{2}{3}\pi t + \pi) \\ &= 5 \cot[(\tfrac{2}{3}\pi(t + \tfrac{3}{2})] \\ &= g(t + \tfrac{3}{2}) \end{aligned}$$

Así, g es periódica con periodo $\frac{3}{2}$. ◀

Ahora se presentarán algunas aplicaciones de las funciones seno y coseno en relación con fenómenos que se repiten periódicamente. Otras aplicaciones se proporcionarán en la Sección 7.4.

▶ EJEMPLO 3 *Solución del enunciado de un problema que tiene una función periódica como modelo matemático*

La fuerza electromotriz para un circuito eléctrico con un generador simplificado es $E(t)$ volts a los t segundos donde

$$E(t) = 50 \operatorname{sen} 120\pi t$$

(a) Determine el periodo de E. Encuentre la fuerza electromotriz para **(b)** 0.02 s y **(c)** 0.2 s.

Solución

(a) Como el seno tiene periodo 2π,

$$\begin{aligned} E(t) &= 50 \operatorname{sen}(120\pi t + 2\pi) \\ &= 50 \operatorname{sen}[120\pi(t + \tfrac{1}{60})] \\ &= E(t + \tfrac{1}{60}) \end{aligned}$$

Conclusión: El periodo de E es $\frac{1}{60}$.

(b) La fuerza electromotriz a los 0.02 s es $E(0.02)$ volts, y

$$\begin{aligned} E(0.02) &= 50 \operatorname{sen} 120\pi(0.02) \\ &= 50 \operatorname{sen} 2.4\pi \\ &= 50 \operatorname{sen}(0.4\pi + 2\pi) \\ &= 50 \operatorname{sen} 0.4\pi \\ &= 50(0.9511) \\ &= 47.55 \end{aligned}$$

Conclusión: La fuerza electromotriz a los 0.02 s es 47.55volts.

(c) La fuerza electromotriz a los 0.2 s es $E(0.2)$ volts, y

$$\begin{aligned} E(0.2) &= 50 \operatorname{sen} 120\pi(0.2) \\ &= 50 \operatorname{sen} 24\pi \\ &= 50 \operatorname{sen}[0 + 12(2\pi)] \\ &= 50 \operatorname{sen} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusión: La fuerza electromotriz a los 0.2 s es 0 volts.

▶ EJEMPLO 4 *Solución del enunciado de un problema que tiene una función periódica como modelo matemático*

Una compañía que vende abrigos para hombres inicia su año fiscal el 1 de julio. Para el año fiscal que inicia el 1 de julio de 1992, la utilidad por ventas estuvo dada por

$$P(t) = 20\,000(1 - \cos \tfrac{1}{6}\pi t) \qquad 0 \le t \le 36$$

donde $P(t)$ dólares fue la utilidad mensual después de t meses desde el 1 de julio de 1992. (**a**) Encuentre el periodo de P. Determine la utilidad mensual en (**b**) 1 de octubre de 1992; (**c**) 1 de noviembre de 1992; (**d**) 1 de diciembre de 1992; (**e**) 1 de enero de 1993; (**f**) 1 de abril de 1993 y (**g**) 1 de julio de 1993.

Solución

(**a**) Como el coseno tiene periodo 2π,

$$\begin{aligned} P(t) &= 20\,000[1 - \cos(\tfrac{1}{6}\pi t + 2\pi)] \\ &= 20\,000[1 - \cos \tfrac{1}{6}\pi(t + 12)] \\ &= P(t + 12) \end{aligned}$$

Conclusión: El periodo de P es 12.

(**b**)-(**g**) La utilidad mensual en el 1 de octubre de 1992, el 1 de noviembre de 1992, el 1 de diciembre de 1992, el 1 de enero de 1993, el 1 de abril de 1993 y 1 de julio de 1993, fue de $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(9)$ y $P(12)$ dólares respectivamente.

(**b**) $$\begin{aligned} P(3) &= 20\,000(1 - \cos \tfrac{1}{2}\pi) \\ &= 20\,000(1 - 0) \\ &= 20\,000 \end{aligned}$$

Conclusión: En el 1 de octubre de 1992 la utilidad mensual fue de $20 000.

(**c**) $$\begin{aligned} P(4) &= 20\,000(1 - \cos \tfrac{2}{3}\pi) \\ &= 20\,000(1 + \tfrac{1}{2}) \\ &= 30\,000 \end{aligned}$$

Conclusión: En el 1 de noviembre de 1992 la utilidad mensual fue de $30 000.

(d) $P(5) = 20\,000(1 - \cos \frac{5}{6}\pi)$

$= 20\,000\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 37\,321$

Conclusión: En el 1 de diciembre de 1992 la utilidad mensual fue de \$37 321.

(e) $P(6) = 20\,000(1 - \cos \pi)$

$= 20\,000(1 + 1)$

$= 40\,000$

Conclusión: En el 1 de enero de 1993 la utilidad fue de \$40 000.

(f) $P(9) = 20\,000(1 - \cos \frac{3}{2}\pi)$

$= 20\,000(1 - 0)$

$= 20\,000$

Conclusión: En el 1 de abril de 1993 la utilidad fue de \$20 000.

(g) $P(12) = 20\,000(1 - \cos 2\pi)$

$= 20\,000(1 - 1)$

$= 0$

Conclusión: En el 1 de julio de 1993 no hubo utilidad. ◀

En Cálculo, aprenderá varios métodos para aproximar, mediante polinomios, una función específica. Uno de los métodos más empleados se atribuye al matemático inglés **Brook Taylor** (1685-1731). Los polinomios de Taylor para seno y coseno son

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \frac{t^{11}}{11!} + \ldots + R_n \qquad (2)$$

y

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - \frac{t^{10}}{10!} + \ldots + R_n \qquad (3)$$

donde R_n denota el residuo después de n términos, y $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, y así sucesivamente. Una aproximación del seno o del coseno de un número específico t puede determinarse considerando términos del correspondiente polinomio de Taylor; el error que resulta es menor que el valor absoluto del siguiente término del polinomio.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Si se emplea el polinomio (3) para calcular el valor de cos 1 con cuatro dígitos significativos, se obtiene

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} + \ldots + R_n$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \frac{1}{40\,320} - \frac{1}{3\,628\,800} + \ldots + R_n$$

$$= 1 - 0.5 + 0.04167 - 0.00139 + 0.00002 - 0.0000003 + \ldots + R_n$$

Al tomar los primeros cinco términos para aproximar el valor de cos 1, el error es menor que el valor absoluto del sexto término. Así, el error es menor que 0.0000003. Al sumar los primeros cinco términos se obtiene 0.54030. Si se redondea este valor a cuatro dígitos significativos se tiene

$$\cos 1 \approx 0.5403$$

► EJEMPLO 5 *Determinación de un valor de la función seno a partir de su polinomio de Taylor*

Emplee el polinomio de Taylor (2) para determinar el valor de sen 0.75 con cuatro dígitos significativos.

Solución Al sustituir t por 0.75 en (2), se tiene

$$\operatorname{sen} 0.75 = 0.75 - \frac{(0.75)^3}{3!} + \frac{(0.75)^5}{5!} - \frac{(0.75)^7}{7!} + \frac{(0.75)^9}{9!} - \ldots + R_n$$

$$= 0.75 - \frac{0.42188}{6} + \frac{0.23730}{120} - \frac{0.13348}{5040} + \frac{0.07508}{362\,880} - \ldots + R_n$$

$$= 0.75 - 0.07031 + 0.00198 - 0.00003 + 0.0000002 - \ldots + R_n$$

Si se toman los primeros cuatro términos, el error es menor que 0.0000002. Al sumar estos cuatro términos se obtiene 0.68164, y al redondear a cuatro dígitos significativos se tiene

$$\operatorname{sen} 0.75 \approx 0.6816$$

EJERCICIOS 7.2

En los ejercicios 1 a 6, utilice una calculadora para determinar el valor de la función con cuatro dígitos significativos.

1. (a) sen 0.34 (b) cos 0.34 (c) sen 2.85 (d) cos 2.85

2. (a) sen 1.27 (b) cos 1.27 (c) sen 1.72 (d) cos 1.72

3. (a) sen 4.29 (b) cos 4.29 (c) sen(−1.36) (d) cos (−1.36)

4. (a) sen 5.08 (b) cos 5.08 (c) sen(−2.69) (d) cos(−2.69)

5. (a) $\operatorname{sen} \frac{5}{11}\pi$ (b) $\cos \frac{1}{8}\pi$ (c) $\operatorname{sen} \frac{8}{9}\pi$ (d) $\cos \frac{9}{5}\pi$

6. (a) $\operatorname{sen} \frac{2}{7}\pi$ (b) $\cos \frac{4}{9}\pi$ (c) $\operatorname{sen} \frac{7}{5}\pi$ (d) $\cos \frac{11}{7}\pi$

En los ejercicios 7 a 14, emplee la periodicidad de las funciones seno y coseno, así como los valores de

cos t cuando $0 \le t < 2\pi$, *para determinar el valor de la función.*

7. (a) $\operatorname{sen} \frac{9}{4}\pi$ (b) $\cos \frac{9}{4}\pi$
(c) $\operatorname{sen} \frac{10}{3}\pi$ (d) $\cos \frac{10}{3}\pi$

8. (a) $\operatorname{sen} \frac{17}{6}\pi$ (b) $\cos \frac{17}{6}\pi$
(c) $\operatorname{sen} \frac{15}{4}\pi$ (d) $\cos \frac{15}{4}\pi$

9. (a) $\operatorname{sen}(-\frac{1}{6}\pi)$ (b) $\cos(-\frac{1}{6}\pi)$
(c) $\operatorname{sen}(-\frac{5}{4}\pi)$ (d) $\cos(-\frac{5}{4}\pi)$

10. (a) $\operatorname{sen}(-\frac{2}{3}\pi)$ (b) $\cos(-\frac{2}{3}\pi)$
(c) $\operatorname{sen}(-\frac{11}{6}\pi)$ (d) $\cos(-\frac{11}{6}\pi)$

11. (a) $\operatorname{sen}(-\frac{7}{3}\pi)$ (b) $\cos \frac{11}{3}\pi$
(c) $\operatorname{sen} 8\pi$ (d) $\cos 10\pi$

12. (a) $\operatorname{sen} \frac{13}{4}\pi$ (b) $\cos(-\frac{11}{4}\pi)$
(c) $\operatorname{sen} \frac{7}{2}\pi$ (d) $\cos \frac{5}{2}\pi$

13. (a) $\operatorname{sen}(-\frac{7}{2}\pi)$ (b) $\cos(-\frac{5}{2}\pi)$
(c) $\operatorname{sen}(-\frac{11}{2}\pi)$ (d) $\cos(-\frac{9}{2}\pi)$

14. (a) $\operatorname{sen}(-8\pi)$ (b) $\cos(-10\pi)$
(c) $\operatorname{sen}(-7\pi)$ (d) $\cos(-9\pi)$

En los ejercicios 15 a 20, encuentre el periodo de la función.

15. (a) $\operatorname{sen} 3t$ (b) $3 \cos 6t$
(c) $\cos \frac{1}{4}t$ (d) $2 \operatorname{sen} \frac{1}{5}t$

16. (a) $\cos 5t$ (b) $4 \operatorname{sen} 4t$
(c) $\operatorname{sen} \frac{5}{6}t$ (d) $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{3}t$

17. (a) $4 \cos 7t$ (b) $\operatorname{sen} \frac{4}{7}t$
(c) $\cos 4\pi t$ (d) $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi t$

18. (a) $3 \operatorname{sen} 8t$ (b) $\cos \frac{3}{8}t$
(c) $4 \cos 3\pi t$ (d) $\operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi t$

19. (a) $10(2 - \cos \frac{1}{5}\pi t)$ (b) $6 + \operatorname{sen} \pi(1 + t)$

20. (a) $3 + 4 \cos \pi(\frac{1}{2} + t)$ (b) $3(4 - \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t)$

En los ejercicios 21 a 26, utilice el polinomio de Taylor (1) o (2) para encontrar el valor de la función con cuatro dígitos significativos.

21. cos 0.75 22. cos 2.39

23. sen 4.26 24. sen 5.73

25. sen(–0.81) 26. cos(–1.27)

En los ejercicios 27 a 34, las funciones son modelos matemáticos que describen fenómenos periódicos, discutidos en la Sección 7.4. Escriba una conclusión.

27. En un circuito eléctrico la fuerza electromotriz es $E(t)$ volts a los t segundos, donde $E(t) = 2 \cos 50\pi t$. (a) Determine el periodo de E. Encuentre la fuerza electromotriz a los (b) 0.02 s; (c) 0.03 s; (d) 0.04 s y (e) 0.06 s.

28. Realice el ejercicio 27 si $E(t) = 40 \operatorname{sen} 120\pi t$.

29. Una corriente alterna se describe mediante $I(t) = 10 \operatorname{sen} 2\,800t$, donde $I(t)$ amperes es la corriente a los t segundos. (a) Determine el periodo de I. Encuentre la corriente a los (b) 0.001 s; (c) 0.003 s; (d) 0.005 s y (e) 0.01 s.

30. Realice el ejercicio 29 si $I(t) = 2 \operatorname{sen} 3\,000t$.

31. Un peso suspendido de un resorte vibra verticalmente, y $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del peso a partir de su posición central (el origen) a los t segundos, donde el sentido positivo es hacia arriba. Si $f(t) = 2 \operatorname{sen} 3t$, (a) determine el periodo de f, y encuentre la posición del peso a los (b) 0 s; (c) 1 s; (d) 2 s y (e) 5 s.

32. Realice el ejercicio 31 si $f(t) = 6 \cos 4t$.

33. Una onda producida por un sonido simple tiene la ecuación $P(t) = 0.02 \operatorname{sen} 1\,500\pi t$, donde $P(t)$ dinas por centímetro cuadrado es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los t segundos. (a) Determine el periodo de P. Encuentre la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los (b) $\frac{1}{9}$ s; (c) $\frac{1}{8}$ s; (d) $\frac{1}{7}$ s y (e) $\frac{1}{6}$ s.

34. Haga el ejercicio 33 si $P(t) = 0.003 \operatorname{sen} 1\,800\pi t$.

35. La función H del ejemplo 6 de la Sección 4.2 está definida por

$$H(x) = [\![x]\!] - x$$

Muestre que H es periódica con periodo 1.

36. Realice el ejercicio 35 para la función G del ejercicio 41 de la Sección 4.2, definida por

$$G(x) = x - [\![x]\!]$$

37. Explique por qué una función periódica no puede ser uno a uno.

7.3 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO, Y DE OTRAS ONDAS SENOIDALES

OBJETIVOS

1. **Obtener la gráfica de la función seno.**
2. **Obtener la gráfica de la función coseno.**
3. **Determinar valores aproximados de las funciones seno y coseno mediante el trazo de curvas senoidales y cosenoidales.**
4. **Determinar valores aproximados de t si se conoce sen t o cos t mediante el trazo de curvas senoidales y cosenoidales.**
5. **Aprender que el periodo de una función de la forma sen bt o cos bt es $\dfrac{2\pi}{|b|}$.**
6. **Definir la amplitud de una onda senoidal.**
7. **Definir el defasamiento de una onda senoidal.**
8. **Dibujar ondas senoidales.**

En discusiones anteriores sobre gráficas, se denotaron los ejes coordenados mediante los símbolos x y y. Sin embargo, al estudiar las funciones trigonométricas de números reales, x y y se emplearon para las coordenadas del punto terminal del arco de longitud t de la circunferencia unitaria U. Por tanto, en este capítulo donde se discuten las gráficas de las funciones trigonométricas, se denotará al eje horizontal por t y al eje vertical por $f(t)$. Frecuentemente conviene marcar sobre el eje t los puntos correspondientes a múltiplos racionales de π. En la Figura 7.21 se muestran estas marcas teniendo en consideración $\pi \approx 3.14$.

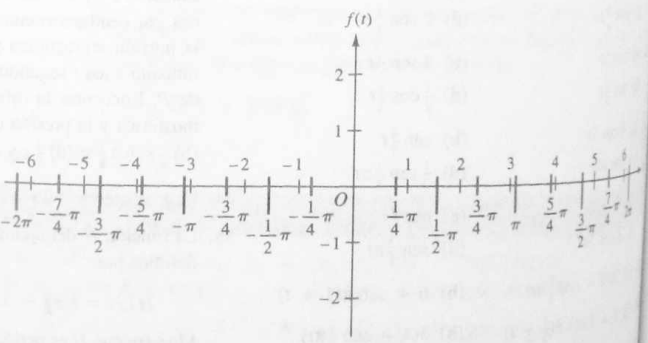


FIGURA 7.21

La periodicidad de las funciones seno y coseno desempeña un papel importante en la obtención de las gráficas de estas funciones. Se considerará primero la gráfica de la función seno. Sea

$$f(t) = \text{sen } t$$

Tabla 1

Conforme t se incrementa de	sen t va de
0 a $\frac{1}{2}\pi$	0 a 1
$\frac{1}{2}\pi$ a π	1 a 0
π a $\frac{3}{2}\pi$	0 a −1
$\frac{3}{2}\pi$ a 2π	−1 a 0

Tabla 2

t	sen t	t	sen t
0	0	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{2}\pi$	−1
$\frac{1}{2}\pi$	1	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	2π	0
π	0		

Debido a que la función seno es periódica con periodo 2π, es suficiente determinar la porción de la gráfica para $0 \le t \le 2\pi$. Después se repetirá esta porción en intervalos de longitud 2π a lo largo del eje t. Como $-1 \le \text{sen } t \le 1$, el valor máximo que sen t puede alcanzar es 1, y el mínimo, −1. La Tabla 1 resume el comportamiento de sen t, en cada uno de los cuatro cuadrantes, conforme t crece de 0 a 2π.

A continuación se localizarán algunos puntos específicos de la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi]$. La Tabla 2 contiene los valores de sen t para cada $\frac{1}{4}\pi$ de unidad, mientras que la Figura 2 muestra los puntos cuyas coordenadas son los pares de números $(t, \text{sen } t)$ dados en la tabla. En Cálculo se demuestra que la función seno es continua, lo cual significa que no tiene "roturas" en su gráfica. Por tanto, se pueden unir los puntos de la Figura 7.22 con una curva para obtener la gráfica mostrada en la Figura 7.23. A fin de lograr una mejor exactitud de la gráfica pueden graficarse puntos para los cuales t es igual a $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{5}{6}\pi$, y así sucesivamente. También puede emplearse una calculadora para obtener otros puntos.

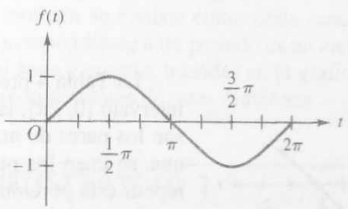


FIGURA 7.23

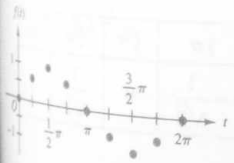
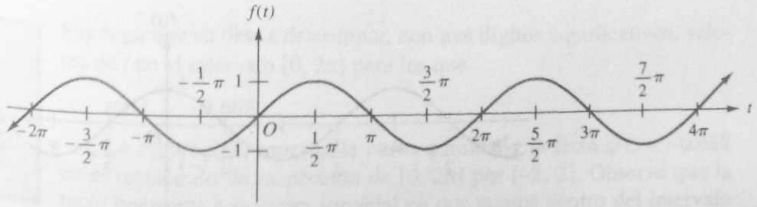


FIGURA 7.22

Ahora que se tiene la porción de la gráfica para el intervalo $[0, 2\pi]$, esta porción se repite para cada intervalo de longitud 2π a lo largo del eje t: $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$, y así de manera sucesiva. La Figura 7.24 muestra la gráfica completa; ésta es continua indefinidamente a la izquierda y hacia la derecha, para cualquier número real t. A esta gráfica se le llama **curva senoidal,** también se le denomina **onda senoidal.** A la porción de la gráfica correspondiente a un periodo se le llama **ciclo.**



$f(t) = \text{sen } t$

FIGURA 7.24

Debido a que los ceros de la función seno son los valores de t en los que la gráfica corta al eje t, entonces ellos son $t = k\pi$, $k \in Z$.

De forma semejante a la descrita, puede obtenerse la gráfica de la función coseno, denominada **curva cosenoidal**. Sea

$$f(t) = \cos t$$

Como el periodo del coseno es 2π, se considera primero el comportamiento de $\cos t$ para $t \in [0, 2\pi]$, según se resume en la Tabla 3.

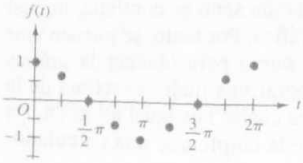


FIGURA 7.25

Tabla 3

Conforme t se incrementa de	*cos t va de*
0 a $\frac{1}{2}\pi$	1 a 0
$\frac{1}{2}\pi$ a π	0 a −1
π a $\frac{3}{2}\pi$	−1 a 0
$\frac{3}{2}\pi$ a 2π	0 a 1

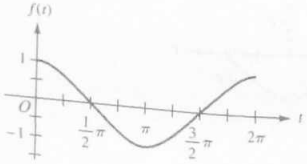
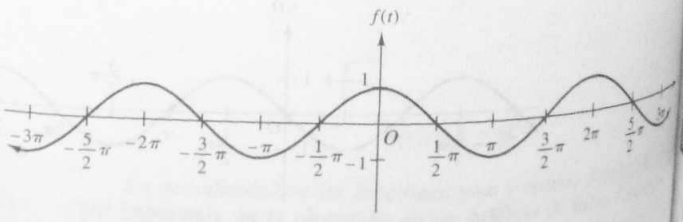


FIGURA 7.26

La Tabla 4 presenta valores de $\cos t$ para cada $\frac{1}{4}\pi$ de unidad en el intervalo $[0, 2\pi]$; la Figura 7.25 muestra los puntos cuyas coordenadas son los pares de números $(t, \cos t)$. Como la función coseno es continua, se unen los puntos para conseguir la curva de la Figura 7.26. Al repetir esta porción de la gráfica para cada intervalo del eje t de longitud 2π, se obtiene la Figura 7.27. Al igual que con el seno, pueden graficarse puntos adicionales mediante los valores exactos del coseno o tomar los valores de una calculadora.

Tabla 4

t	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\cos t$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1



$f(t) = \cos t$

FIGURA 7.27

Las coordenadas t de los puntos en los que la gráfica corta al eje t son los ceros de la función coseno. Éstos son $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in Z$.

Observe que la gráfica del seno es simétrica con respecto al origen, mientras que la gráfica del coseno lo es con respecto al eje $f(t)$. Estas propiedades de simetría se deducen de las identidades

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen } t, \tag{1}$$

y

$$\cos(-t) = \cos t \tag{2}$$

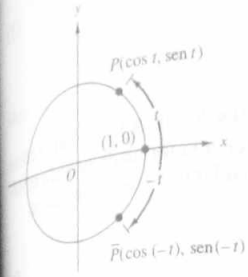
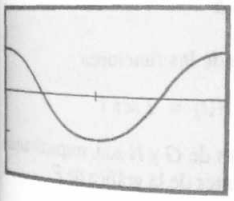


FIGURA 7.28

A fin de justificar estas identidades refiérase a la Figura 7.28. Observe que como los puntos $P(\cos t, \text{sen } t)$ y $\bar{P}(\cos(-t), \text{sen}(-t))$ son simétricos con respecto al eje x, entonces se obtienen (1) y (2). De (1) se puede concluir que el seno es una función impar, y de (2) se deduce que el coseno es una función par.

Note que el seno y coseno tienen la misma forma. En realidad, la gráfica del coseno puede obtenerse mediante una traslación horizontal, de $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la izquierda, de la gráfica del seno. Por esto, la gráfica del coseno también se conoce como onda senoidal, y la porción de la gráfica correspondiente a un periodo es un ciclo.

Las gráficas del seno y coseno, trazadas en la graficadora, pueden emplearse para aproximar valores de estas funciones.



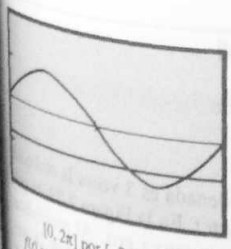
[0, 2π] por [−2, 2]
$f(t) = \cos t$
FIGURA 7.29

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Se desea encontrar el valor de cos 1.36 con tres dígitos significativos mediante la graficadora. La Figura 7.29 muestra la curva cosenoidal en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$. Al emplear el rastreo y aumento de la graficadora se obtiene

$$\cos 1.36 = 0.209 \quad \blacktriangleleft$$

También se pueden utilizar las curvas senoidal y cosenoidal en la graficadora para aproximar valores de t si se conocen sen t o cos t.



[0, 2π] por [−2, 2]
$f(t) = \text{sen } t$ y $y(t) = -0.688$
FIGURA 7.30

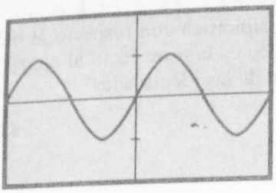
▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Suponga que se desea determinar, con tres dígitos significativos, valores de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ para los que

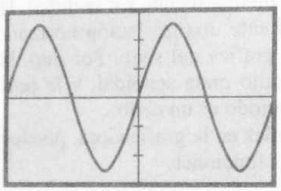
$$\text{sen } t = -0.688$$

La Figura 7.30 muestra la curva senoidal y la recta $g(t) = -0.688$ en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$. Observe que la recta intersecta a la curva senoidal en dos puntos dentro del intervalo $[0, 2\pi]$. Al utilizar el rastreo y el aumento de la graficadora se obtiene

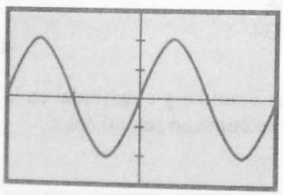
$$\text{sen } 3.90 = -0.688 \quad \text{y} \quad \text{sen } 5.52 = -0.688 \quad \blacktriangleleft$$



[−2π, 2π] por [−2, 2]
$F(t) = \text{sen } t$
(a)



[−2π,2π] por [−6, 6]
$G(t) = 5 \text{ sen } t$
(b)



[−2π, 2π] por [−3, 3]
$H(t) = 2 \text{ sen } t$
(c)
FIGURA 7.31

Otras ondas senoidales se obtienen de las funciones definidas mediante las ecuaciones de la forma

$$f(t) = a \text{ sen } b(t - c)$$

y

$$f(t) = a \cos b(t - c)$$

donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$ y $b \neq 0$. A fin de saber cómo los valores de las constantes a, b y c afectan la forma de la onda senoidal definida por estas ecuaciones, se considerarán casos especiales.

La función definida por

$$f(t) = a \text{ sen } t$$

es el caso especial de (3) donde $c = 0$ y $b = 1$. Cuando $a > 0$, el factor a origina la gráfica de (5) al expandir verticalmente la curva senoidal en esto debido al factor. La ordenada de un punto de la gráfica de (5) es veces la ordenada correspondiente de la curva senoidal.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La Figura 7.31 (a)-(c) muestra la gráfica de las funciones

$$F(t) = \text{sen } t \qquad G(t) = 5 \text{ sen } t \qquad H(t) = 2 \text{ sen } t$$

Observe que las ordenadas de las gráficas de G y H son, respectivamente, 5 y 2 veces las ordenadas correspondientes de la gráfica de F.

Considere otra vez la ecuación (5). Como

$$-1 \leq \text{sen } t \leq 1$$

el valor máximo de $f(t)$ es $|a|$, y el valor mínimo es $-|a|$. El número $|a|$ se denomina **amplitud** de la onda senoidal.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Suponga que se desea dibujar la gráfica de

$$g(t) = 3 \text{ sen } t$$

La amplitud de la gráfica es 3, y cada ordenada es 3 veces la ordenada correspondiente de la gráfica de $f(t) = \text{sen } t$. En la Figura 7.32, la gráfica de $f(t) = \text{sen } t$ se muestra mediante la curva gris. Al multiplicar las ordenadas de esta curva por 3, se obtienen las ordenadas de la curva requerida.

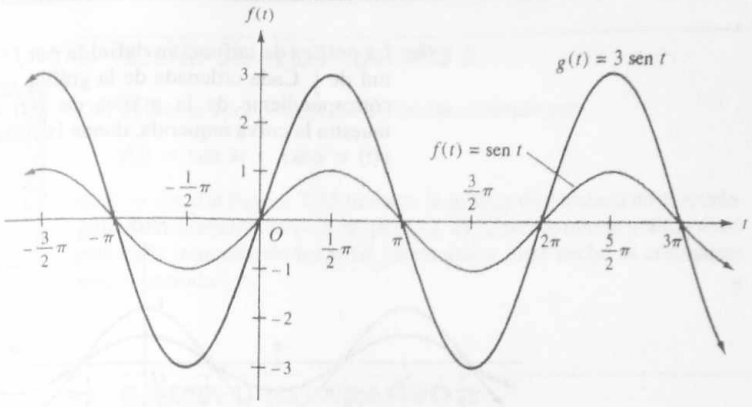


FIGURA 7.32

La discusión relativa a la ecuación (5) también se aplica a las gráficas de las funciones definidas por una ecuación de la forma

$$f(t) = a \cos t \tag{6}$$

Si $a < 0$ en (5) o (6), las ordenadas de los puntos de sus gráficas son los negativos de las ordenadas correspondientes de las gráficas de $f(t) = |a| \operatorname{sen} t$ o $f(t) = |a| \cos t$, respectivamente.

► EJEMPLO 1 *Dibujo de ondas senoidales*

Dibuje las ondas senoidales definidas por las ecuaciones siguientes y verifique las gráficas en una graficadora: **(a)** $f(t) = -2 \cos t$; **(b)** $f(t) = \frac{1}{2} \cos t$.

Solución

(a) La ecuación $f(t) = -2 \cos t$ es de la forma (6) donde $a = -2$. La amplitud de la gráfica es $|-2| = 2$. Cada ordenada de la gráfica es -2 veces la ordenada correspondiente de la gráfica de $g(t) = \cos t$. La curva pedida se muestra en la Figura 7.33, donde la gráfica de $g(t) = \cos t$ se indica con la curva gris.

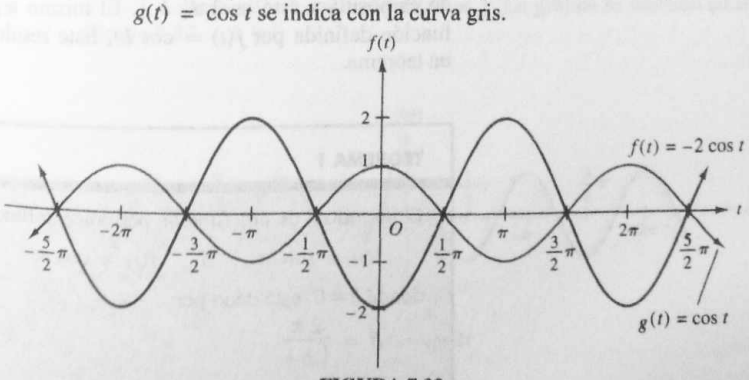


FIGURA 7.33

(b) La gráfica de la función definida por $f(t) = \frac{1}{2}\cos t$ tiene amplitud de $\frac{1}{2}$. Cada ordenada de la gráfica es la mitad de la ordenada correspondiente de la gráfica de $g(t) = \cos t$. La Figura 7.34 muestra la curva requerida, donde la curva gris denota la gráfica de $g(t) = \cos t$.

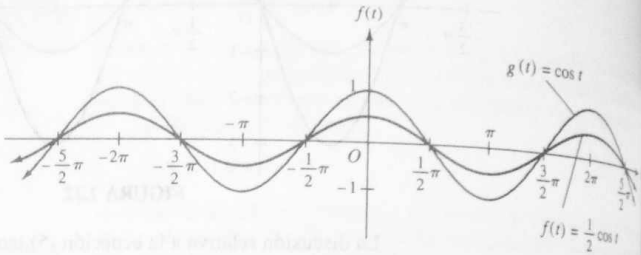


FIGURA 7.34

La graficadora verifica las gráficas de las figuras 7.33 y 7.34.

Considere ahora una ecuación de la forma

$$f(t) = \operatorname{sen} bt$$

Esta función es el caso especial de $f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$ donde $c = 0$ y $a = 1$. Como la función seno tiene periodo 2π,

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sen}(bt + 2\pi) \\ &= \operatorname{sen}\left[b\left(t + \frac{2\pi}{b}\right)\right] \\ &= f\left(t + \frac{2\pi}{b}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, f es una función periódica, y como, por definición, el periodo es positivo, éste es $2\pi/|\,b\,|$. El mismo argumento se aplica a la función definida por $f(t) = \cos bt$. Este resultado se establece como un teorema.

TEOREMA 1

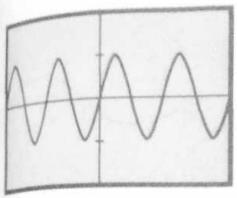
El periodo P de una función periódica definida por

$$f(t) = \operatorname{sen} bt \quad \text{o} \quad f(t) = \cos bt$$

donde $b \neq 0$, está dado por

$$P = \frac{2\pi}{|\,b\,|}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5



$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$
$f(t) = \operatorname{sen} 4t$
FIGURA 7.35

Del Teorema 1, el periodo de la función definida por

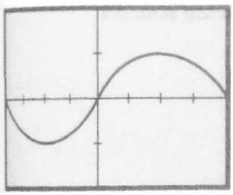
$$f(t) = \operatorname{sen} 4t$$

es $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$. La Figura 7.35 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$. Observe que la gráfica se repite cada intervalo de longitud $\frac{1}{2}\pi$ unidades. Este hecho es consistente con el periodo $\frac{1}{2}\pi$. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

La Figura 7.36 muestra la gráfica de la función definida por

$$f(t) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{4} t$$



$[-4\pi, 4\pi]$ por $[-2, 2]$
$f(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{4} t$
FIGURA 7.36

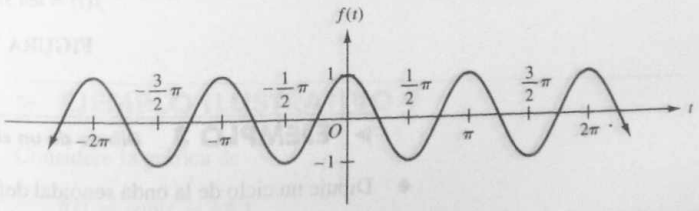
trazada en el rectángulo de inspección de $[-4\pi, 4\pi]$ por $[-2, 2]$. Del Teorema 1, el periodo de esta función es $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$, lo cual es consistente con la Figura 7.36, en la que se muestra un ciclo de la onda senoidal correspondiente. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

A fin de dibujar la gráfica de

$$f(t) = \cos 2t$$

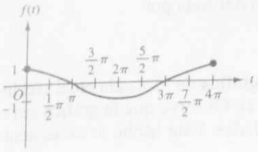
primero se aplica el Teorema 1 para determinar el periodo P. Como $b = 2$, entonces $P = \pi$. La amplitud es 1. La gráfica se muestra en la Figura 7.37.



$f(t) = \cos 2t$

FIGURA 7.37 ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8



$f(t) = \cos \frac{1}{2}t$

FIGURA 7.38

Para la gráfica de

$$f(t) = \cos \tfrac{1}{2}t$$

el periodo es P, donde, por el Teorema 1,

$$P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$$
$$= 4\pi$$

La amplitud es 1. La Figura 7.38 muestra un ciclo de esta onda senoidal dibujada en el intervalo $[0, 4\pi]$.

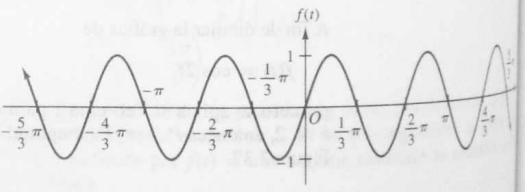
► EJEMPLO 2 *Dibujo de una onda senoidal*

Dibuje la onda senoidal definida por

$$f(t) = \operatorname{sen} 3t$$

y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución La amplitud es 1. Como $b = 3$, por el Teorema 1, el periodo es $\frac{2}{3}\pi$. En la Figura 7.39, las unidades del eje t están marcadas en cada intervalo de longitud $\frac{1}{3}\pi$. La figura muestra la gráfica pedida. La graficadora comprueba esta gráfica.



$f(t) = \operatorname{sen} 3t$

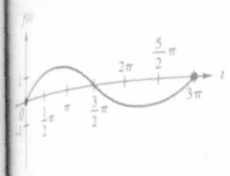
FIGURA 7.39

► EJEMPLO 3 *Dibujo de un ciclo de una onda senoidal*

Dibuje un ciclo de la onda senoidal definida por

$$f(t) = \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}t$$

Compruebe la gráfica en una graficadora.



$f(t) = \operatorname{sen} \frac{2}{3}t$

FIGURA 7.40

Solución La amplitud es 1. Por el Teorema 1, el periodo P es

$$P = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$$

Por tanto, un ciclo de la onda senoidal está en el intervalo $[0, 3\pi]$. Este ciclo se muestra en la Figura 7.40 y es acorde con el que se obtiene en la graficadora. ◀

El periodo de la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} t$ es 2π. En el ejemplo ilustrativo 7 para la gráfica de $f(t) = \cos 2t$, el periodo es π, y en el ejemplo 2 el periodo de la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} 3t$ es $\frac{2}{3}\pi$. Para las gráficas de $f(t) = \operatorname{sen} bt$ y $f(t) = \cos bt$, conforme b se incrementa cuando $b > 0$, el periodo disminuye, y los ciclos de la onda senoidal se aproximan cada vez más entre sí. Note que en el ejemplo 3 el periodo de la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} \frac{2}{3}t$ es 3π. Además, en el ejemplo ilustrativo 8 el periodo de la gráfica de $f(t) = \cos \frac{1}{2}t$ es 4π. Conforme b decrece cuando $b > 0$, el periodo de las gráficas de $f(t) = \operatorname{sen} bt$ y $f(t) = \cos bt$, se hace mayor. En particular, la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{8}t$ tiene un periodo de 16π. Así, en el intervalo $[0, 16\pi]$ hay un solo ciclo de esta onda senoidal.

¿Qué ocurre con las gráficas de $f(t) = \operatorname{sen} bt$ y $f(t) = \cos bt$ cuando $b < 0$? Para responder esta pregunta, se usarán las identidades (1) y (2). Por ejemplo, la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen}(-3t)$ es la misma que la gráfica de $f(t) = -\operatorname{sen} 3t$, y la gráfica de $f(t) = \cos(-3t)$ es la misma que la gráfica de $f(t) = \cos 3t$.

Si en la ecuación $f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$, $a = 1$ y $b = 1$, se tiene una ecuación de la forma

$$f(t) = \operatorname{sen}(t - c) \tag{8}$$

La gráfica de esta ecuación puede obtenerse a partir de la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} t$ mediante una traslación horizontal (o desplazamiento) de c unidades a la derecha si $c > 0$, y $|c|$ unidades a la izquierda si $c < 0$. El valor absoluto de c se denomina **defasamiento** de la gráfica de (8). El defasamiento de una gráfica también es el defasamiento de la función correspondiente.

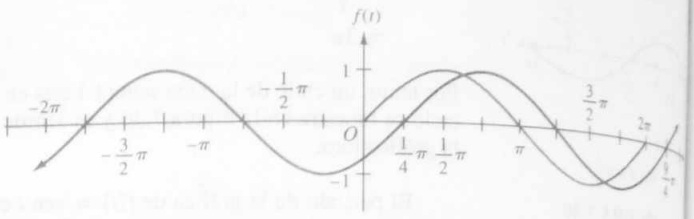
▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

Considere la gráfica de

$$f(t) = \operatorname{sen}(t - \tfrac{1}{4}\pi)$$

Aquí, $c = \frac{1}{4}\pi$; entonces el defasamiento de esta gráfica es $\frac{1}{4}\pi$. La gráfica se obtiene desplazando la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} t$ a una distan-

cia de $\frac{1}{4}\pi$ unidades a la derecha, debido a que $c > 0$. La Figura 7.41 muestra esta gráfica. La gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} t$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ se indica con la curva gris.



$$f(t) = \operatorname{sen}\left(t - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

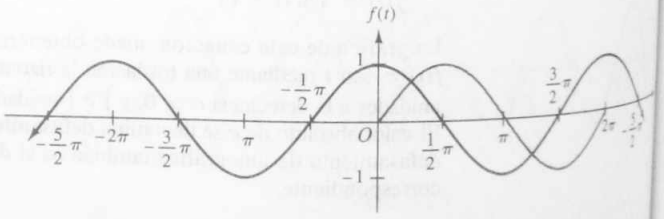
FIGURA 7.41

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

Para la gráfica de

$$f(t) = \operatorname{sen}(t + \tfrac{1}{2}\pi)$$

$c = -\frac{1}{2}\pi$. De esto, el defasamiento es $\frac{1}{2}\pi$, y la gráfica se obtiene desplazando la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} t$ a una distancia de $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la izquierda debido a que $c < 0$. La Figura 7.42 muestra la gráfica como la gráfica de $f(t) = \operatorname{sen} t$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, la cual se indica con la curva gris.



$$f(t) = \operatorname{sen}\left(t + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

FIGURA 7.42

Ahora se aplicarán las propiedades de las gráficas de (5), (7), para obtener las gráficas de las funciones definidas mediante ecuaciones de la forma

$$f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c) \quad \text{y} \quad f(t) = a \cos b(t - c)$$

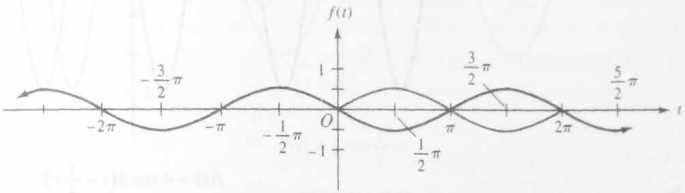
▶ EJEMPLO 4 *Dibujo de una onda senoidal*

Dibuje la gráfica de

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(t + \pi)$$

Compruebe la gráfica por medio de la graficadora.

Solución Esta ecuación es de la forma $f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$ donde $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $c = -\pi$. Como $a = \frac{1}{2}$, la amplitud de la gráfica es $\frac{1}{2}$. Como $b = 1$, el periodo de la gráfica es 2π. Como $c = -\pi$, el defasamiento es π, y la gráfica requerida se obtiene desplazando la gráfica de $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$ una distancia de π unidades a la izquierda. La gráfica pedida se muestra en la Figura 7.43, y la gráfica de $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ se denota con la curva gris. La misma gráfica se obtiene en la graficadora.



$$f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t + \pi)$$

FIGURA 7.43 ◀

▶ EJEMPLO 5 *Dibujo de una onda senoidal*

Dibuje la gráfica de

$$f(t) = 4\cos(2t - \tfrac{1}{2}\pi)$$

Verifique la gráfica por medio de la graficadora.

Solución Se escribe la ecuación dada en la forma

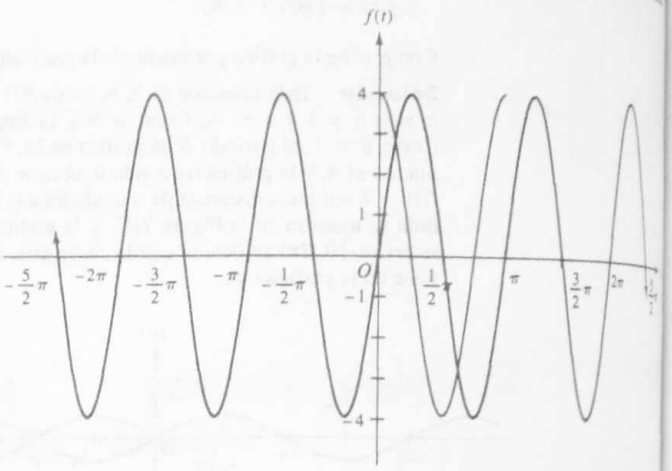
$$f(t) = a\cos b(t - c)$$

mediante la factorización de 2 en la expresión $2t - \frac{1}{2}\pi$. Al hacerlo se obtiene

$$f(t) = 4\cos 2(t - \tfrac{1}{4}\pi)$$

Como $a = 4$, la amplitud de la gráfica es 4. El periodo de la gráfica es π debido a que $b = 2$. Como $c = \frac{1}{4}\pi$, el defasamiento es $\frac{1}{4}\pi$, y la gráfica requerida se obtiene desplazando la gráfica de $f(t) = 4\cos 2t$ una

distancia de $\frac{1}{4}\pi$ unidades a la derecha. La Figura 7.44 muestra la gráfica pedida, y la gráfica de $f(t) = 4 \cos 2t$ en el intervalo $[0, \pi]$ se representa con la curva gris. Se obtiene la misma gráfica en la graficadora.



$$f(t) = 4 \cos 2\left(t - \frac{1}{4}\pi\right)$$

FIGURA 7.44

La función del ejemplo siguiente difiere de los previamente discutidos porque el periodo es un número racional en vez de un múltiplo de π. En tal caso, cuando se dibuje la gráfica, es más conveniente utilizar los números racionales para marcar los intervalos en el eje t.

▶ EJEMPLO 6 *Dibujo de una onda senoidal*

Dibuje la gráfica de

$$f(t) = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t$$

Verifique la gráfica en una graficadora.

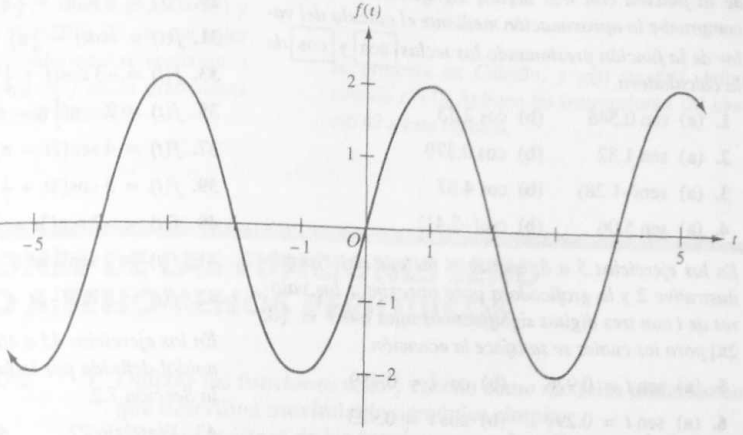
Solución Se comparará la ecuación dada con $f(t) = a \operatorname{sen} bt$. Como $a = 2$, la amplitud es 2. Si P es el periodo, entonces como $b = \frac{1}{2}\pi$,

$$P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi}$$
$$= 4$$

$E(t) = 50 \operatorname{sen} 120\pi t$

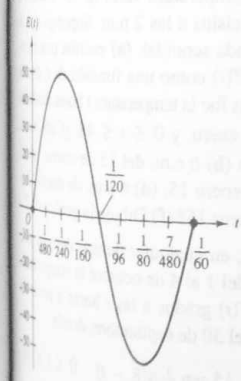
FIGURA 7.46

La gráfica se muestra en la Figura 7.45 tal como aparece en la graficadora.



$f(t) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t$

FIGURA 7.45 ◄



$E(t) = 50 \operatorname{sen} 120\pi t$

FIGURA 7.46

► **EJEMPLO 7** ***Dibujo de un ciclo de una onda senoidal***

Dibuje un ciclo de la onda senoidal obtenida por la función del ejemplo 3 de la Sección 7.2. Verifique la gráfica en una graficadora.

Solución La función se define por

$$E(t) = 50 \operatorname{sen} 120\pi t$$

y el periodo de E es $\frac{1}{60}$. La amplitud de E es 50. Se emplean diferentes escalas en los dos ejes; en el eje t se tomaron marcas cada $\frac{1}{480}$ de unidad, y sobre el eje $E(t)$ se tomaron marcas cada 10 unidades. La Tabla 5 presenta valores de $E(t)$ para cada $\frac{1}{480}$ de unidad en el intervalo $[0, \frac{1}{60}]$. El ciclo se muestra en la Figura 7.46. En la graficadora se obtiene la misma gráfica.

Tabla 5

t	0	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{7}{480}$	$\frac{1}{60}$
$E(t)$	0	35.4	50	35.4	0	−35.4	−50	−35.4	0

◄

EJERCICIOS 7.3

En los ejercicios 1 a 4, utilice el método del ejemplo ilustrativo 1 y la graficadora para aproximar el valor de la función con tres dígitos significativos. Después compruebe la aproximación mediante el cálculo del valor de la función presionando las teclas sen *y* cos *de la calculadora.*

1. (a) sen 0.546 (b) cos 2.73
2. (a) sen 1.82 (b) cos 0.379
3. (a) sen(−1.28) (b) cos 4.67
4. (a) sen 5.06 (b) cos(−2.41)

En los ejercicios 5 a 8, emplee el método del ejemplo ilustrativo 2 y la graficadora para aproximar los valores de t con tres dígitos significativos tales que $t \in [0, 2\pi]$ *para los cuales se satisface la ecuación.*

5. (a) $\operatorname{sen} t = 0.976$ (b) $\cos t = 0.489$
6. (a) $\operatorname{sen} t = 0.291$ (b) $\cos t = 0.923$
7. (a) $\operatorname{sen} t = -0.641$ (b) $\cos t = -0.506$
8. (a) $\operatorname{sen} t = -0.996$ (b) $\cos t = -0.785$

En los ejercicios 9 a 16, dibuje la onda senoidal definida por la función y verifique la gráfica en la graficadora.

9. (a) $f(t) = 2 \operatorname{sen} t$ (b) $g(t) = \operatorname{sen} 2t$
10. (a) $f(t) = 3 \cos t$ (b) $g(t) = \cos 3t$
11. (a) $f(t) = \frac{1}{4} \cos t$ (b) $g(t) = \cos \frac{1}{4}t$
12. (a) $f(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t$ (b) $g(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{3}t$
13. (a) $f(t) = -\operatorname{sen} t$ (b) $g(t) = \operatorname{sen}(-t)$
14. (a) $f(t) = -\cos t$ (b) $g(t) = \cos(-t)$
15. (a) $f(t) = 5 \cos \frac{1}{3}t$ (b) $g(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 5t$
16. (a) $f(t) = 4 \cos \frac{1}{2}t$ (b) $g(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4t$

En los ejercicios 17 a 20, dibuje un ciclo de la onda senoidal definida por la función y compruebe la gráfica en la graficadora.

17. $f(t) = \cos \frac{2}{3}t$
18. $f(t) = \operatorname{sen} \frac{2}{5}t$
19. $f(t) = 5 \operatorname{sen} \frac{4}{5}t$
20. $f(t) = 3 \cos \frac{4}{3}t$

En los ejercicios 21 a 42, dibuje la onda senoidal definida por la función y verifique la gráfica en la graficadora.

21. $f(t) = 6 \cos \pi t$
22. $f(t) = 4 \operatorname{sen} \pi t$
23. $f(t) = 2 \cos \frac{1}{2}\pi t$
24. $f(t) = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi t$
25. $f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi t$
26. $f(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\pi t$
27. $f(t) = \cos(t + \frac{1}{2}\pi)$
28. $f(t) = \cos(t + \frac{1}{4}\pi)$
29. $f(t) = 2 \operatorname{sen}(t - \frac{1}{4}\pi)$
30. $f(t) = 3 \operatorname{sen}(t - \frac{1}{2}\pi)$
31. $f(t) = \cos(t - \frac{1}{3}\pi)$
32. $f(t) = \operatorname{sen}(t + \frac{1}{3}\pi)$
33. $f(t) = -3 \cos(t + \frac{1}{6}\pi)$
34. $f(t) = 6 \cos(t - \frac{1}{2}\pi)$
35. $f(t) = 2 \operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi - t)$
36. $f(t) = \frac{1}{2} \cos(\pi - t)$
37. $f(t) = 4 \operatorname{sen}(2t - \pi)$
38. $f(t) = 2 \cos(4t + \pi)$
39. $f(t) = 5 \cos(3t + \frac{1}{2}\pi)$
40. $f(t) = -2 \operatorname{sen}(3t - \frac{1}{2}\pi)$
41. $f(t) = 2 \operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{2}\pi)$
42. $f(t) = 3 \cos(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{3}\pi)$

En los ejercicios 43 a 46, dibuje un ciclo de la onda senoidal definida por la función del ejercicio indicado de la Sección 7.2.

43. Ejercicio 27
44. Ejercicio 28
45. Ejercicio 29
46. Ejercicio 30

47. En cierta ciudad, en cada una de las fechas 15, 16, 17 de enero, la temperatura varió de −5° Celsius a las 2 a.m. a 5° Celsius a las 2 p.m. Suponga que la gráfica es una onda senoidal, (a) escriba una ecuación que defina $T(t)$ como una función de t, donde $T(t)$ grados Celsius fue la temperatura t horas después de las 2 a.m. del 15 de enero, y $0 \le t \le 48$. ¿Cuál fue la temperatura a las (b) 6 a.m. del 15 de enero; (c) mediodía de enero 15; (d) 4 p.m. de enero 15; (e) 10 p.m. de enero 15? (f) Dibuje la gráfica de T.

48. En cierta ciudad, en cualquier tiempo determinado del día, a partir del 1 al 4 de octubre la temperatura en Fahrenheit fue $T(t)$ grados a las t horas a partir de la medianoche del 30 de septiembre, donde

$$T(t) = 60 - 15 \operatorname{sen} \tfrac{1}{12}\pi(8 - t) \quad 0 \le t \le 9$$

(a) Determine el periodo de T. Encuentre la temperatura a las (b) 8 a.m. del 1 de octubre; (c) 12 del mediodía del 1 de octubre; (d) 2 p.m. del 1 de octubre; (e) 6 p.m. del 1 de octubre y (f) medianoche del 1 de octubre. (g) Dibuje la gráfica de T.

49. [∬ dy/dx] La función definida por

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

surge en Cálculo. Esta función no está definida cuando $t = 0$. Sin embargo, en Cálculo es necesario conocer el comportamiento de esta función conforme t se aproxima a cero. Emplee la calculadora para determinar (a) $f(0.1)$ y $f(-0.1)$; (b) $f(0.06)$ y $f(-0.06)$; (c) $f(0.02)$ y $f(-0.02)$; (d) $f(0.01)$ y $f(-0.01)$; (e) $f(0.001)$ y $f(-0.001)$. (f) ¿A qué valor parece aproximarse $f(t)$ conforme t se aproxima a cero? (g) Trace la gráfica de f en la graficadora para verificar la respuesta del inciso (f).

50. ∫∫ dy/dx La función definida por

$$g(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$$

se presenta en Cálculo, y $g(t)$ no está definida cuando $t = 0$. Aplique las instrucciones del ejercicio 49 a esta función.

7.4 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO A FENÓMENOS PERIÓDICOS

OBJETIVOS

1. **Utilizar las funciones seno y coseno como modelos matemáticos que describen movimiento armónico simple.**
2. **Dibujar gráficas de las funciones que describen movimiento armónico simple.**
3. **Resolver enunciados de problemas que implican movimiento armónico simple.**
4. **Dibujar gráficas de funciones que describen otros fenómenos periódicos.**
5. **Resolver enunciados de problemas que implican otros fenómenos periódicos.**

Las funciones discutidas en la Sección 7.3 y definidas por

$$f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c) \tag{1}$$

y

$$f(t) = a \cos b(t - c) \tag{2}$$

son modelos matem ticos que describen **movimiento armónico simple,** vibratorio u oscilatorio.

Un ejemplo de movimiento armónico simple ocurre cuando se suspende un cuerpo de un resorte que vibra verticalmente. Sea $f(t)$ centímetros la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central, o de reposo, después de transcurridos t segundos. *Véase* la Figura 7.47, donde un valor positivo de $f(t)$ indica que el cuerpo está por arriba de su posición central. Si en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares se trazan valores de función $f(t)$ para valores específicos de t, entonces si no se toma en cuenta la fricción, la gráfica resultante tendrá una ecuación de la forma (1) o (2). Las constantes a, b y c están determinadas por el peso del cuerpo y el resorte, así como por la forma en que se ponga en movimiento al cuerpo. Por ejemplo, cuanto más se

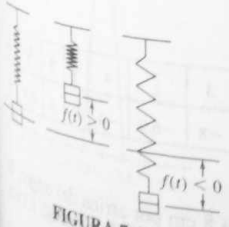


FIGURA 7.47

tire del cuerpo hacia abajo antes de liberarlo, tanto mayor será el ... amplitud del movimiento. Además, cuanto más rígido sea el resorte ... tanto más rápidamente vibrar el cuerpo de modo que P, el periodo del ... movimiento, ser menor; recuerde que las constantes b y P están relacionadas mediante la ecuación $P = 2\pi/|b|$. La **frecuencia** de un movimiento armónico simple es el número de vibraciones, u oscilaciones, por unidad de tiempo. Así, si n es la frecuencia del movimiento entonces $n = 1/P$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Un cuerpo está vibrando verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$f(t) = 8 \cos \tfrac{1}{3}\pi t \qquad (3)$$

donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. La ecuación (3) es el caso especial de (2) donde $a = 8$, $b = \frac{1}{3}\pi$ y $c = 0$. Por tanto, el movimiento es armónico simple. Como la amplitud es 8, el máximo desplazamiento es 8 cm. Debido a que $b = \frac{1}{3}\pi$, el periodo P está dado por

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{|b|} \\ &= \frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Por tanto, se requieren 6 s para una vibración completa del cuerpo. La frecuencia n está determinada por

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{P} \\ &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Así, se tiene $\frac{1}{6}$ de vibración por segundo. De (3) se obtienen valores de $f(t)$ para valores particulares de t, mostrados en la Tabla 1. A partir de estos valores se discutirá el movimiento del cuerpo.

Tabla 1

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6
$f(t)$	8	$4\sqrt{3} \approx 6.9$	4	0	-4	$-4\sqrt{3} \approx -6.9$	-8	-6.9	-4	0	4	6.9	8

Inicialmente el cuerpo se encuentra 8 cm por arriba del origen, la posición central. En el primer $\frac{1}{2}$ s el cuerpo se mueve hacia abajo

FIGURA

FIGURA 7.4

a un punto situado a 6.9 cm arriba del origen. Después, en el siguiente $\frac{1}{2}$ s el cuerpo desciende 2.9 cm a una posición 4 cm arriba del origen. En el tercer $\frac{1}{2}$ s, el cuerpo se mueve hacia abajo una distancia de 4 cm respecto a su posición central. De modo que la velocidad del cuerpo se incrementa en los primeros $\frac{3}{2}$ s. En los siguientes $\frac{3}{2}$ s, el movimiento del cuerpo continúa hacia abajo mientras que su velocidad disminuye hasta que, después de un total de 3 s, el cuerpo se encuentra a 8 cm por debajo de su posición central. Después, el cuerpo invierte su dirección y su velocidad aumenta hasta que alcanza su posición central, enseguida disminuye su velocidad hasta que regresa a su posición inicial después de un total de 6 s. Luego, el cuerpo invierte su dirección y el movimiento continúa bajando y subiendo, repitiéndose de manera indefinida. La gráfica de (3) se muestra en la Figura 7.48. ◄

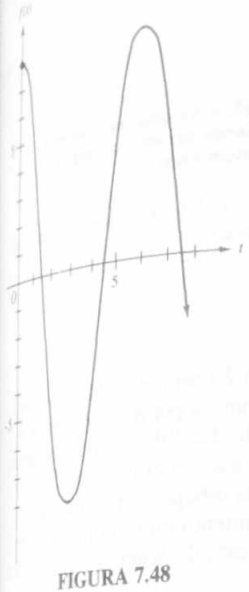


FIGURA 7.48

Hasta aquí no se ha considerado la fricción, la cual podría ocasionar que el cuerpo finalmente llegue a un estado de reposo. Se discutirá en la Sección 7.5 el *movimiento armónico amortiguado*, para el cual se toma en cuenta la fricción.

► EJEMPLO 1 *Solución del enunciado de un problema que implica movimiento armónico simple*

Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente. Suponga que el cuerpo pasa por su posición central, conforme asciende, cuando $t = 2.5$; enseguida efectúa un desplazamiento ascendente máximo de 4 cm, y pasa por su posición central conforme desciende cuando $t = 3.5$. El movimiento es armónico simple y está descrito por una ecuación de la forma

$$f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$$

donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central después de t segundos, y el sentido positivo es hacia arriba. Determine su ecuación.

Solución El movimiento desde $t = \frac{5}{2}$ hasta $t = \frac{7}{2}$ se representa en la Figura 7.49. Como el desplazamiento máximo hacia arriba es de 4 cm, la amplitud del movimiento es 4; así, $a = 4$. Se tiene medio ciclo del movimiento entre $t = \frac{5}{2}$ y $t = \frac{7}{2}$. Por tanto, si el periodo es P,

$$\frac{P}{2} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}$$

$$P = 2$$

Debido a que $P = 2\pi/|\ b\ |$, se tiene, si $b > 0$,

$$\frac{2\pi}{b} = 2$$

$$b = \pi.$$

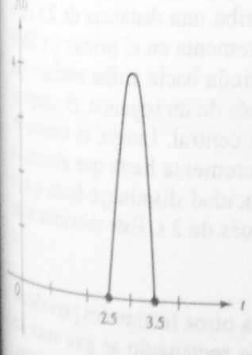


FIGURA 7.49

La gráfica de la función requerida puede considerarse como una onda senoidal desplazada $\frac{5}{2}$ de unidad hacia la derecha a partir del origen. De esto, $c = \frac{5}{2}$. En consecuencia, de la ecuación $f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$ con $a = 4$, $b = \pi$ y $c = \frac{5}{2}$, se obtiene

$$f(t) = 4 \operatorname{sen} \pi(t - \tfrac{5}{2})$$

► EJEMPLO 2 *Dibujo de la gráfica de una función que describe movimiento armónico simple y discusión del movimiento*

Dibuje la gráfica de la función del ejemplo 1 y verifíquela en la graficadora. Haga una discusión del movimiento.

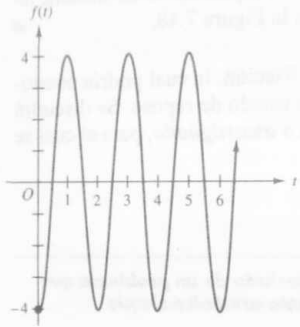


FIGURA 7.50

Solución La ecuación es

$$f(t) = 4 \operatorname{sen} \pi(t - \tfrac{5}{2})$$

El periodo es 2. De modo que se requieren 2 s para una vibración completa del cuerpo. La frecuencia n está determinada por $n = 1/P$; así, $n = \frac{1}{2}$. Por tanto, hay $\frac{1}{2}$ de vibración por segundo. La Tabla 2 presenta valores de $f(t)$ para cada $\frac{1}{4}$ de unidad cuando t está en el intervalo $[0, 2]$. La porción de la gráfica en este intervalo está dibujada a partir de estos valores, y la gráfica repite este comportamiento en cada intervalo de 2 unidades. *Véase* la Figura 7.50, la cual está de acuerdo con la gráfica obtenida en la graficadora.

Tabla 2

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
$f(t)$	-4	$-2\sqrt{2} \approx -2.8$	0	$2\sqrt{2} \approx 2.8$	4	2.8	0	-2.8	-4

Inicialmente el cuerpo está 4 cm abajo de su posición central. En el primer $\frac{1}{4}$ s el cuerpo se mueve hacia arriba una distancia de 1.2 cm a un punto situado a 2.8 cm debajo de su posición central. En el siguiente $\frac{1}{4}$ s el cuerpo se mueve hacia arriba una distancia de 2.8 cm a su posición central. La velocidad se incrementa en el primer $\frac{1}{2}$ s. En el tercer $\frac{1}{4}$ s el movimiento del cuerpo continúa hacia arriba mientras que su velocidad disminuye hasta que, después de un segundo, el cuerpo se encuentra a 4 cm arriba de su posición central. Luego, el cuerpo invierte su dirección y su velocidad se incrementa hasta que alcanza su posición central, posteriormente su velocidad disminuye hasta que el cuerpo retorna a su posición inicial después de 2 s. Este movimiento se repite indefinidamente cada 2 s.

Ahora se considerarán aplicaciones a otros fenómenos periódicos.

Si un alambre doblado en forma de rectángulo se gira entre los polos norte y sur de un imán, se genera una corriente eléctrica alterna

Conforme el alambre efectúa una rotación completa, la corriente fluye primero en un sentido y después en el opuesto, lo cual se repite durante cada rotación. La corriente es periódica y puede describirse mediante una ecuación de la forma

$$I(t) = a \operatorname{sen} b(t - c) \tag{4}$$

donde $I(t)$ amperes es la corriente a los t segundos, producida por un generador.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Suponga que una corriente eléctrica alterna está descrita por la ecuación

$$I(t) = 10 \operatorname{sen} 120\pi t$$

donde $I(t)$ amperes es la corriente a los t segundos. Se comparará esta ecuación con la (4). Como $a = 10$, la corriente máxima es 10 amperes. Debido a que $b = 120\pi$, la frecuencia n está determinada por

$$n = \frac{120\pi}{2\pi}$$
$$= 60$$

Por tanto, la frecuencia es 60 ciclos por segundo. ◄

Una corriente eléctrica es producida por una fuerza electromotriz medida en volts. Para un generador simple, si $E(t)$ volts es la fuerza electromotriz a los t segundos, una ecuación que describe a $E(t)$ es

$$E(t) = a \operatorname{sen} bt \tag{5}$$

Tal ecuación se presentó en el ejemplo 3 de la Sección 7.2.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Suponga que $E(t)$ volts es la fuerza electromotriz a los t segundos y se describe mediante una ecuación de la forma (5). Si la fuerza electromotriz máxima es 110 volts y la frecuencia es 60 ciclos por segundo, entonces $a = 110$ y

$$\frac{b}{2\pi} = 60$$
$$b = 120\pi$$

De modo que una ecuación que describe la fuerza electromotriz es

$$E(t) = 110 \operatorname{sen} 120\pi t$$ ◄

En un circuito eléctrico simple que contiene sólo una resisten... la fuerza electromotriz y la corriente están relacionadas por la si... ción

$$E(t) = RI(t)$$

donde R es una constante. Esta ecuación se conoce como la ley ... Ohm, llamada así en honor a **G. S. Ohm** (1789-1854), y la resisten... es R ohms.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Si las ecuaciones de los ejemplos ilustrativos 2 y 3 pertenecen al ... mo circuito eléctrico, entonces

$$E(t) = 11I(t)$$

y la ley de Ohm se satisface cuando la resistencia es 11 ohms.

Observe que en un circuito que satisface la ley de Ohm el ... máximo de $E(t)$ ocurre al mismo tiempo que el valor máximo de ... Es posible que estos valores máximos ocurran en tiempos diferentes ... tal caso, se dice que la corriente y fuerza electromotriz están *fuera ... fase*. Suponga, por ejemplo, que

$$E(t) = a \operatorname{sen} bt$$

y

$$I(t) = A \operatorname{sen} b(t - c)$$

La gráfica de $I(t)$ puede obtenerse al trasladar la gráfica de $f(t) = A \operatorname{sen} bt$, c unidades a la derecha si $c > 0$, y $|c|$ unidades a la izquier... da si $c < 0$. La corriente y la fuerza electromotriz están fuera de fase por c unidades. Si $c > 0$, se dice que la corriente se *retrasa* con res... pecto a la fuerza electromotriz en c unidades; y si $c < 0$, se dice que la corriente se *adelanta* con respecto a la fuerza electromotriz en ... unidades.

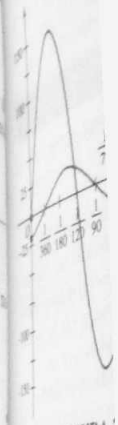
▶ EJEMPLO 3 *Dibujo de las gráficas de las funciones que definen la fuerza electromotriz y la corriente en un circuito eléctrico*

En determinado circuito eléctrico, a los t segundos, la fuerza electromotriz es $E(t)$ volts, donde

$$E(t) = 150 \operatorname{sen} 120\pi t$$

y la corriente es $I(t)$ amperes, donde

$$I(t) = 25 \operatorname{sen} 120\pi\left(t - \tfrac{1}{360}\right)$$



FIGURA

Dibuje las gráficas de E e I en el mismo sistema de ejes coordenados. Compruebe las gráficas en la graficadora. ¿Se retrasa o adelanta la corriente y por cuánto?

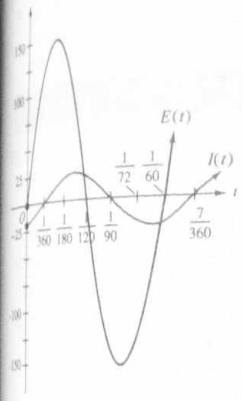


FIGURA 7.51

Solución Para cada una de las gráficas el periodo es P, donde

$$P = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$= \frac{2\pi}{120\pi}$$

$$= \frac{1}{60}$$

Se utilizan diferentes escalas en los dos ejes coordenados. En el eje t se toman marcas cada $\frac{1}{360}$ de unidad, y en el eje vertical las marcas están cada 25 unidades.

La amplitud de la gráfica E es 150. La gráfica de E se muestra en la Figura 7.51. La amplitud de la gráfica de I es 25. La gráfica de I, mostrada mediante la curva gris de la Figura 7.52, se obtiene al desplazar la gráfica de $f(t) = 25 \text{ sen } 120\pi t$ una distancia de $\frac{1}{360}$ de unidad a la derecha. Se obtienen las mismas gráficas en la graficadora.

Conclusión: La corriente se retrasa con respecto a la fuerza electromotriz $\frac{1}{360}$ de s. ◀

Cuando una onda sonora llega al oído, ocurre una vibración de las partículas de aire en el tímpano. Esta vibración puede describirse mediante la variación de la presión del aire. Un *sonido simple* es aquel que produce, en un osciloscopio, una onda que puede describirse por medio de una ecuación de la forma

$$F(t) = a \text{ sen } bt \tag{6}$$

donde $F(t)$ dinas por centímetro cuadrado es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los t segundos. Los valores positivos de $F(t)$ corresponden a la presión interna en el tímpano, y los valores negativos corresponden a la presión externa. La ecuación (6) es la de la onda sonora. La constante a determina la *amplitud de la presión*.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Un diapasón produce un sonido simple que tiene una amplitud de la presión de 0.02 din/cm^2 y vibra a 250 ciclos por segundo. La onda sonora producida tiene una ecuación de la forma (6). Como la amplitud de la presión es 0.02 din/cm^2, $a = 0.02$. Debido a que la frecuencia es 250 ciclos por segundo,

$$\frac{b}{2\pi} = 250$$

$$b = 500\pi$$

Por tanto, una ecuación de la onda sonora es

$$F(t) = 0.02 \operatorname{sen} 500\pi t$$

EJERCICIOS 7.4

En los ejercicios 1 a 6, la ecuación describe el movimiento armónico simple de un cuerpo suspendido de un resorte que vibra verticalmente, donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. Para cada movimiento determine (a) la amplitud; (b) el periodo; (c) la frecuencia y (d) la posición del cuerpo en t_1, t_2, t_3 y t_4 segundos.

1. $f(t) = 3 \cos \frac{1}{6}\pi t$; $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$, $t_4 = 6$
2. $f(t) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t$; $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$
3. $f(t) = 5 \operatorname{sen} 2t$; $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{4}\pi$, $t_3 = \frac{1}{2}\pi$, $t_4 = \frac{3}{4}\pi$
4. $f(t) = 6 \cos 3t$; $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{6}\pi$, $t_3 = \frac{1}{3}\pi$, $t_4 = \frac{1}{2}\pi$
5. $f(t) = 8 \cos \pi(2t - \frac{1}{3})$; $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{6}$, $t_3 = \frac{1}{3}$, $t_4 = \frac{1}{2}$
6. $f(t) = 3 \cos \pi(3t + \frac{1}{2})$; $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{6}$, $t_3 = \frac{1}{3}$, $t_4 = \frac{1}{2}$

En los ejercicios 7 a 10, dibuje la gráfica de la función del ejercicio indicado y verifíquela en la graficadora. Haga una discusión del movimiento.

7. Ejercicio 1
8. Ejercicio 2
9. Ejercicio 5
10. Ejercicio 6

En los ejercicios 11 a 14, la ecuación describe una corriente eléctrica alterna, donde $I(t)$ amperes es la corriente a los t segundos. En cada ejercicio, (a) trace la gráfica de I para $t_1 \le t \le t_4$; determine (b) la corriente máxima; (c) la frecuencia y (d) la corriente en t_1, t_2, t_3 y t_4 segundos.

11. $I(t) = 5 \operatorname{sen} 30\pi t$; $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.1$, $t_3 = 0.15$, $t_4 = 0.2$
12. $I(t) = 20 \operatorname{sen} 240\pi t$; $t_1 = 0.01$, $t_2 = 0.03$, $t_3 = 0.05$, $t_4 = 0.07$
13. $I(t) = 0.6 \operatorname{sen} 400t$; $t_1 = 1$, $t_2 = 3.5$, $t_3 = 8$, $t_4 = 10$
14. $I(t) = 0.3 \operatorname{sen} 650t$; $t_1 = 1$, $t_2 = 4$, $t_3 = 7$, $t_4 = 10$

En los ejercicios 15 a 18, $E(t)$ volts es la fuerza electromotriz a los t segundos. En cada ejercicio, (a) trace la gráfica de E para $t_1 \le t \le t_4$; determine (b) la fuerza electromotriz máxima; (c) la frecuencia y (d) la fuerza electromotriz a los t_1, t_2, t_3 y t_4 segundos.

15. $E(t) = 220 \operatorname{sen} 120\pi t$; $t_1 = 0.01$, $t_2 = 0.05$, $t_3 = 0.06$, $t_4 = 0.1$
16. $E(t) = 110 \operatorname{sen} 120\pi t$; $t_1 = 0.02$, $t_2 = 0.03$, $t_3 = 0.04$, $t_4 = 0.05$
17. $E(t) = 8 \operatorname{sen} 332t$; $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.15$, $t_3 = 0.25$, $t_4 = 0.35$
18. $E(t) = 40 \operatorname{sen} 510t$; $t_1 = 1.2$, $t_2 = 2$, $t_3 = 2.8$, $t_4 = 3.6$

En los ejercicios 19 a 22, la ecuación describe una onda producida por un sonido simple donde $F(t)$ dinas por centímetro cuadrado es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los t segundos. En cada ejercicio, (a) trace la gráfica de F para $t_1 \le t \le t_4$; determine (b) la amplitud de la presión; (c) la frecuencia y (d) la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los t_1, t_2, t_3 y t_4 segundos.

19. $F(t) = 0.005 \operatorname{sen} 880\pi t$; $t_1 = 0.0025$, $t_2 = 0.005$, $t_3 = 0.0075$, $t_4 = 0.01$
20. $F(t) = 0.04 \operatorname{sen} 200\pi t$; $t_1 = 0.001$, $t_2 = 0.002$, $t_3 = 0.003$, $t_4 = 0.004$
21. $F(t) = 0.02 \operatorname{sen} 600t$; $t_1 = 0.002$, $t_2 = 0.006$, $t_3 = 0.018$, $t_4 = 0.054$
22. $F(t) = 0.006 \operatorname{sen} 2400t$; $t_1 = 0.005$, $t_2 = 0.010$, $t_3 = 0.015$, $t_4 = 0.020$.
23. Un cuerpo suspendido de un resorte se levanta hasta un punto situado a 2 cm por arriba de su posición central y luego se libera. El cuerpo tarda $\frac{1}{2}$ s en completar una vibración. (a) Escriba una ecuación que defina $f(t)$, donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central

segundos después del inicio del movimiento y el sentido positivo es hacia arriba. (b) Trace la gráfica de f. Emplee la gráfica para estimar la posición del cuerpo (c) $\frac{1}{12}$ s después de iniciado el movimiento y (d) $\frac{1}{4}$ s después de iniciado el movimiento. Verifique las estimaciones de los incisos (c) y (d) calculando $f(\frac{1}{12})$ y $f(\frac{1}{4})$, respectivamente.

24. Un cuerpo suspendido de un resorte se pone en movimiento vibratorio tirando de él hacia abajo 4 cm de su posición central liberándolo enseguida. El cuerpo tarda 1.5 s en completar una vibración. **(a)** Escriba una ecuación que defina $f(t)$, donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central t segundos después del inicio del movimiento y el sentido positivo es hacia arriba. (b) Trace la gráfica de f. Emplee la gráfica para estimar la posición del cuerpo (c) 1 s después de iniciado el movimiento y (d) 2 s después de iniciado el movimiento. Verifique las estimaciones de los incisos (c) y (d) calculando $f(1)$ y $f(2)$, respectivamente.

25. Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente. El cuerpo pasa por su posición central, conforme asciende, cuando $t = 2$, y logra un desplazamiento máximo de 9 cm; después pasa por su posición central, conforme desciende, cuando $t = 3.2$. El movimiento es armónico simple descrito por una ecuación de la forma $f(t) = a \cos b(t - c)$ donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central después de t segundos, y el sentido positivo es hacia arriba. Encuentre esta ecuación y trace la gráfica de f.

26. Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente. Suponga que el cuerpo pasa por su posición central a los 3 s y 7 s. Entre estos tiempos el cuerpo alcanza dos veces un desplazamiento máximo de 10 cm sobre su posición central, y logra una vez un desplazamiento máximo de 10 cm por debajo de su posición central. El movimiento es armónico simple, descrito por una ecuación de la forma $f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$, donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central a los t segundos, y el sentido positivo es hacia arriba. Determine esta ecuación y trace la gráfica de f.

27. Una corriente alterna de 60 ciclos está descrita por una ecuación de la forma $I(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$, donde $I(t)$ amperes es la corriente a los t segundos. La corriente máxima es 20 ampere, y la corriente es 10 ampere para la primera vez cuando $t = \frac{1}{360}$. Escriba la ecuación y trace la gráfica de I.

28. Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 30 ciclos que alcanza un máximo de 50 ampere y está descrita por una ecuación de la forma $I(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$, donde $I(t)$ ampere es la corriente a los t segundos, y la corriente es 25 ampere por primera vez cuando $t = 0.01$. Escriba la ecuación y trace la gráfica de I.

29. En cierto circuito eléctrico la fuerza electromotriz es $E(t)$ volts, donde $E(t) = 110 \operatorname{sen} 120\pi t$, y la corriente es $I(t)$ amperes, donde $I(t) = 55 \operatorname{sen} 120\pi\,(t - \frac{1}{240})$. Dibuje las gráficas de E e I en el mismo sistema de ejes coordenados. Compruebe las gráficas en la graficadora trazándolas al mismo rectángulo de inspección. ¿Se atrasa o adelanta la corriente y por cuánto?

30. Haga el ejercicio 29 considerando $E(t) = 220 \operatorname{sen} 60\pi t$ e $I(t) = 44 \operatorname{sen} 60\pi\,(t + \frac{1}{180})$.

31. El número de dinas por centímetro cuadrado de la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano, a los t segundos, producida por una onda sonora particular, está descrita por la ecuación $F(t) = 5 \operatorname{sen} 100\pi\,(t - \frac{1}{400})$. **(a)** Trace la gráfica de F. Determine **(b)** la amplitud de la presión y **(c)** la frecuencia. Obtenga la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los **(d)** 0 s; **(e)** 0.01 s y **(f)** 0.015 s.

32. Resuelva el ejercicio 31 considerando $F(t) = 3 \operatorname{sen} 880\pi\,(t + \frac{1}{100})$.

33. $\iint \frac{dy}{dx}$ Suponga que el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta es armónico simple y está descrito por una ecuación de la forma $S(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$, donde $S(t)$ centímetros es el desplazamiento de la partícula desde un punto fijo (el origen) a los t segundos. En Cálculo se demuestra que si $V(t)$, centímetros por segundo, es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces $V(t) = ab \cos b(t - c)$; y si $A(t)$ centímetros por segundo por segundo es la aceleración de la partícula a los t segundos, entonces $A(t) = -ab^2 \operatorname{sen} b(t - c)$. Si una ecuación que describe el movimiento es $S(t) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi\,(t - 1)$, determine la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los **(a)** 0 s; **(b)** 1 s; **(c)** 2 s; **(d)** 3 s y **(e)** 4 s.

34. Haga el ejercicio 33 considerando $S(t) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi (t + 2)$.

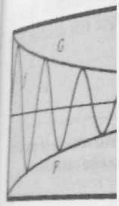
35. Realice una discusión del movimiento armónico simple de un cuerpo, descrito por la ecuación del ejercicio 1, como se hizo en el ejemplo ilustrativo 1.

36. Siga las instrucciones del ejercicio 35 para el movimiento de un cuerpo, descrito por la ecuación del ejercicio 2.

7.5 OTRAS GRÁFICAS QUE IMPLICAN A LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

OBJETIVOS

1. **Determinar propiedades de la gráfica de una función que describe movimiento armónico amortiguado.**
2. **Determinar propiedades de la gráfica de una función que describe resonancia.**
3. **Dibujar la gráfica de la función definida por** $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$.



$[0, 2\pi]$ por $[-1, 1]$
$F(t) = -e^{-t/4}$, $f(t) = e^{-t/4} \operatorname{sen} 4t$
y $G(t) = e^{-t/4}$
FIGURA 7.52

En la Sección 7.4 se estudió el movimiento armónico simple continuo indefinidamente, repitiendo un ciclo cada intervalo de longitud igual a un periodo. Tal es el caso del ejemplo 1 de dicha sección, en el cual un cuerpo suspendido de un resorte se mueve verticalmente hacia arriba y hacia abajo, y una oscilación completa ocurre cada intervalo de 2π. Sin embargo, en la práctica, la fricción podría ocasionar que la amplitud del movimiento disminuya hasta que el cuerpo llegue al estado de reposo. Éste es el caso del **movimiento armónico amortiguado**, el cual puede ser descrito por el producto de una función senoidal y una función no constante denominada **factor de amortiguamiento**. Este factor causa el decrecimiento de la amplitud. Un factor de amortiguamiento importante es una función exponencial cuyos valores se aproximan a cero conforme la variable independiente crece sin límite. El ejemplo siguiente ilustra el efecto de este factor.

► EJEMPLO 1 *Determinación de propiedades de la gráfica de una función que describe movimiento armónico amortiguado*

Las tres funciones F, f y G se definen por

$$F(t) = -e^{-t/4} \qquad f(t) = e^{-t/4} \operatorname{sen} 4t \qquad G(t) = e^{-t/4}$$

donde $t \geq 0$. La función f es un modelo matemático que describe un movimiento armónico amortiguado.

(a) Muestre que $F(t) \leq f(t) \leq G(t)$.

(b) Trace las gráficas de las tres funciones en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-1, 1]$.

(c) Determine algebraicamente los valores de t de todos los puntos de intersección de la gráfica de f con las gráficas de F y G. ¿Cuáles de estos valores están en el intervalo $[0, 2\pi]$?

(d) Determine todas las intercepciones t de la gráfica de f. ¿Cuáles de estas intercepciones están en el intervalo $[0, 2\pi]$?

Solución

(a) La función f es el producto de dos funciones. Como $|\operatorname{sen} 4t| \leq 1$ y $e^{-t/4} > 0$ para toda t,

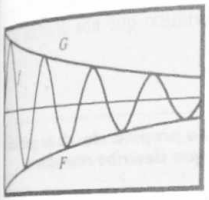
$$|f(t)| \leq e^{-t/4} \quad \text{para toda } t$$

Así,

$$-e^{-t/4} \leq f(t) \leq e^{-t/4} \quad \text{para toda } t$$

Esto es,

$$F(t) \leq f(t) \leq G(t)$$



$[0, 2\pi]$ por $[-1, 1]$
$F(t) = -e^{-t/4}$, $f(t) = e^{-t/4}\operatorname{sen} 4t$, y $G(t) = e^{-t/4}$
FIGURA 7.52

(b) La Figura 7.52 muestra las gráficas requeridas. Observe que la gráfica de f está entre las gráficas de F y G.

(c) La gráfica de f intersecta a la gráfica de G cuando $\operatorname{sen} 4t = 1$. Como $\operatorname{sen} x = 1$ cuando $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in Z$, entonces $\operatorname{sen} 4t = 1$ cuando

$$4t = \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi \quad k \in Z$$
$$t = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{2}k\pi \quad k \in Z$$

Para valores de t en $[0, 2\pi]$, sea k igual a 0, 1, 2 y 3, para obtener, respectivamente,

$$t = \tfrac{1}{8}\pi + 0\pi \quad t = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{2}\pi \quad t = \tfrac{1}{8}\pi + \pi \quad t = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{3}{2}\pi$$
$$= \tfrac{1}{8}\pi \qquad = \tfrac{5}{8}\pi \qquad = \tfrac{9}{8}\pi \qquad = \tfrac{13}{8}\pi$$

La gráfica de f intersecta a la gráfica de F cuando $\operatorname{sen} 4t = -1$. Como $\operatorname{sen} x = -1$ cuando $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in Z$, entonces $\operatorname{sen} 4t = -1$ cuando

$$4t = \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad k \in Z$$
$$t = \tfrac{3}{8}\pi + \tfrac{1}{2}k\pi \quad k \in Z$$

Para valores de t en $[0, 2\pi]$, sea k igual a 0, 1, 2 y 3, para obtener, respectivamente,

$$t = \tfrac{3}{8}\pi + 0\pi \quad t = \tfrac{3}{8}\pi + \tfrac{1}{2}\pi \quad t = \tfrac{3}{8}\pi + \pi \quad t = \tfrac{3}{8}\pi + \tfrac{3}{2}\pi$$
$$= \tfrac{3}{8}\pi \qquad = \tfrac{7}{8}\pi \qquad = \tfrac{11}{8}\pi \qquad = \tfrac{15}{8}\pi$$

(d) La gráfica de f intersecta al eje t cuando $\operatorname{sen} 4t = 0$. Como $\operatorname{sen} x = 0$ cuando $x = k\pi$, $k \in Z$, entonces $\operatorname{sen} 4t = 0$ cuando,

$$4t = k\pi \quad k \in Z$$
$$t = \tfrac{1}{4}k\pi \quad k \in Z$$

Para valores de t en $[0, 2\pi]$, considérense valores de k del 0 al fin de obtener, respectivamente, los valores siguientes de t: $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$ y 2π.

Observe que los valores de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ obtenidos en los incisos (c) y (d) son los mostrados en la gráfica del inciso (b).

El movimiento armónico amortiguado es importante en el diseño de edificaciones, puentes y automóviles. Por ejemplo, se emplean amortiguadores con el fin de atenuar las oscilaciones cuando un automóvil se encuentra con un obstáculo en el camino.

En el movimiento armónico amortiguado, la amplitud decrece a cero conforme pasa el tiempo. Si la amplitud crece sin límite a medida que transcurre el tiempo, entonces se presenta la **resonancia**. El ejemplo siguiente presenta un modelo matemático que nos describe la resonancia.

► EJEMPLO 2 *Determinación de propiedades de la gráfica de una función que describe resonancia*

Las tres funciones F, f y G están definidas por

$$F(t) = -2^t \qquad f(t) = 2^t \cos 4t \qquad G(t) = 2^t$$

donde $t \geq 0$. La función f es un modelo matemático que describe la resonancia.

(a) Muestre que $F(t) \leq f(t) \leq G(t)$.

(b) Trace las gráficas de las tres funciones en el rectángulo de inspección de $[0, \pi]$ por $[-10, 10]$.

(c) Determine algebraicamente los valores de t de todos los puntos de intersección de la gráfica de f con las gráficas de F y G. ¿Cuáles de estos valores están en el intervalo $[0, \pi]$?

(d) Determine algebraicamente todas las intercepciones t de la gráfica de f. ¿Cuáles de estas intercepciones están en el intervalo $[0, \pi]$?

Solución

(a) Como $|\cos 4t| \leq 1$ y $2^t > 0$ para toda t,

$$|f(t)| \leq 2^t \qquad \text{para toda } t$$

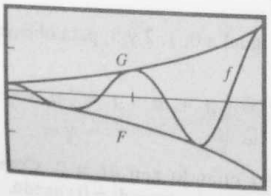
En consecuencia,

$$-2^t \leq f(t) \leq 2^t \qquad \text{para toda } t$$

Esto es,

$$F(t) \leq f(t) \leq G(t)$$

(b) La Figura 7.53 muestra las gráficas trazadas en la gráfica donde la gráfica de f se encuentra entre las gráficas de F y G.



$[0, \pi]$ por $[-10, 10]$
$F(t) = -2^t$, $f(t) = 2^t \cos 4t$,
y $G(t) = 2^t$
FIGURA 7.53

(c) La gráfica de f corta a la gráfica de G cuando $\cos 4t = 1$. Como $\cos x = 1$ cuando $x = 2k\pi$, $k \in Z$, entonces $\cos 4t = 1$ cuando

$$4t = 2k\pi \qquad k \in Z$$
$$t = \tfrac{1}{2}k\pi \qquad k \in Z$$

Para valores de t en $[0, \pi]$, sea k igual a 0, 1 y 2, a fin de obtener, respectivamente, los valores siguientes de t: $0, \frac{1}{2}\pi, \pi$. La gráfica de f intersecta a la gráfica de F cuando $\cos 4t = -1$. Debido a que $\cos x = -1$ cuando $x = (2k + 1)\pi$, $k \in Z$, entonces $\cos 4t = -1$ cuando

$$4t = (2k + 1)\pi \qquad k \in Z$$
$$t = (\tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{4})\pi \qquad k \in Z$$

Para valores de t en $[0, \pi]$, sea k igual a 0 y 1, para obtener, respectivamente, $t = \frac{1}{4}\pi$ y $t = \frac{3}{4}\pi$.

(d) La gráfica de f corta al eje t cuando $\cos 4t = 0$. Como $\cos x = 0$ cuando $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, $k \in Z$, entonces $\cos 4t = 0$ cuando

$$4t = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad k \in Z$$
$$t = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}k\pi \qquad k \in Z$$

Para valores de t en $[0, \pi]$, sea k igual a 0, 1. 2 y 3, a fin de obtener, respectivamente,

$$t = \tfrac{1}{8}\pi + 0\pi = \tfrac{1}{8}\pi \qquad t = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{3}{8}\pi \qquad t = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{5}{8}\pi \qquad t = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{3}{4}\pi = \tfrac{7}{8}\pi$$

Observe que los valores de t en el intervalo $[0, \pi]$, obtenidos en los incisos (c) y (d), se muestran en la gráfica del inciso (b). ◀

En el ejercicio 49 de la Sección 7.3 se presentó la función definida por

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

y se le pidió calcular valores de $f(t)$ para valores pequeños de t. Dichos valores de la función sugieren que $f(t)$ se aproxima a 1 conforme t se aproxima a 0, esto ocurre y tiene importantes consecuencias en Cálculo. En ese ejercicio también se le pidió que trazara la gráfica de f en la graficadora. En el ejemplo siguiente se muestra cómo dibujar, a mano, la gráfica de dicha función.

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$

► EJEMPLO 3 *Dibujo de la gráfica de una función importante en Cálculo*

Dibuje la gráfica de la función definida por

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

para $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

Solución Observe que $f(0)$ no existe. Así, la gráfica no corta al eje vertical. Además, como $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, se tiene,

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{\operatorname{sen}(-t)}{-t} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} t}{-t} \\ &= \frac{\operatorname{sen} t}{t} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Por esto, f es una función par; es decir, su gráfica es simétrica con respecto al eje vertical. Primero se obtendrá la porción de la gráfica para $t \in (0, \pi]$.

Si $t > 0$, y como $|\operatorname{sen} t| \leq 1$, entonces

$$-\frac{1}{t} \leq \frac{\operatorname{sen} t}{t} \leq \frac{1}{t}$$

Sea

$$F(t) = -\frac{1}{t} \qquad \text{y} \qquad G(t) = \frac{1}{t}$$

Entonces si $t > 0$,

$$F(t) \leq f(t) \leq G(t)$$

y para valores positivos de t, la gráfica de f está entre las gráficas de F y G. Como $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$, la gráfica de f corta a la gráfica de G en $t = \frac{1}{2}\pi$. Debido a que $\operatorname{sen} \pi = 0$, la gráfica de f intersecta al eje t en $t = \pi$. También, cuando $0 < t < \pi$, $\operatorname{sen} t > 0$. Por tanto, en el intervalo $(0, \pi)$ la gráfica está sobre el eje t. A partir de esta información, y al determinar algunos valores de $f(t)$ en $(0, \pi)$ y trazar sus puntos correspondientes, se dibuja la gráfica de f en el intervalo $(0, \pi]$ como se muestra en la Figura 7.54. La porción de la gráfica en $[-\pi, 0)$ se obtiene de propiedades de simetría. El punto abierto del eje vertical indica que $f(0)$ no está definido.

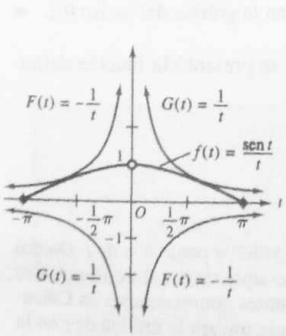


FIGURA 7.54

EJERCICIOS 7.5

En los ejercicios 1 a 8, la función f es un modelo matemático que describe movimiento armónico amortiguado. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) Muestre que $F(t) \le f(t) \le G(t)$. (b) Trace las gráficas de las tres funciones en el rectángulo de inspección $[0, 2\pi]$ por $[-1, 1]$. (c) Determine algebraicamente los valores de t de todos los puntos de intersección de la gráfica de f con las gráficas de F y G. ¿Cuáles de estos valores están en el intervalo $[0, 2\pi]$? (d) Determine algebraicamente todas las intercepciones t de la gráfica de f. ¿Cuáles de estas intercepciones están en el intervalo $[0, 2\pi]$?

1. $f(t) = e^{-t/2} \operatorname{sen} 2t$; $F(t) = -e^{-t/2}$; $G(t) = e^{-t/2}$
2. $f(t) = e^{-t/2} \cos 4t$; $F(t) = -e^{-t/2}$; $G(t) = e^{-t/2}$
3. $f(t) = 2^{-t/4} \cos 4t$; $F(t) = -2^{-t/4}$; $G(t) = 2^{-t/4}$
4. $f(t) = 2^{-t/4} \operatorname{sen} 2t$; $F(t) = -2^{-t/4}$; $G(t) = 2^{-t/4}$
5. $f(t) = e^{-t/8} \operatorname{sen} 3t$; $F(t) = -e^{-t/8}$; $G(t) = e^{-t/8}$
6. $f(t) = e^{-t/6} \cos 3t$; $F(t) = -e^{-t/6}$; $G(t) = e^{-t/6}$
7. $f(t) = e^{-t/4} \cos 8t$; $F(t) = -e^{-t/4}$; $G(t) = e^{-t/4}$
8. $f(t) = 3^{-t/3} \operatorname{sen} 6t$; $F(t) = -3^{-t/3}$; $G(t) = 3^{-t/3}$

En los ejercicios 9 a 16, la función f es un modelo matemático que describe resonancia. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) Muestre que $F(t) \le f(t) \le G(t)$. (b) Trace las gráficas de las tres funciones en el rectángulo de inspección indicado. (c) Determine algebraicamente los valores de t de todos los puntos de intersección de la gráfica de f con las gráficas de F y G. ¿Cuáles de estos valores proporcionan puntos de intersección que aparecen en la gráfica del inciso (b)? (d) Determine algebraicamente todas las intercepciones t de la gráfica de f. ¿Cuáles de estas intercepciones aparecen en la gráfica del inciso (b)?

9. $f(t) = 2^t \operatorname{sen} 4t$; $F(t) = -2^t$; $G(t) = 2^t$; $[0, \pi]$ por $[-10, 10]$
10. $f(t) = 2^t \cos 5t$; $F(t) = -2^t$; $G(t) = 2^t$; $[0, \pi]$ por $[-10, 10]$
11. $f(t) = e^t \cos 6t$; $F(t) = -e^t$; $G(t) = e^t$; $[0, \pi]$ por $[-30, 30]$
12. $f(t) = e^{t/2} \operatorname{sen} 6t$; $F(t) = -e^{t/2}$; $G(t) = e^{t/2}$; $[0, \pi]$ por $[-10, 10]$
13. $f(t) = t \operatorname{sen} 2t$; $F(t) = -t$; $G(t) = t$; $[0, 2\pi]$ por $[-10, 10]$
14. $f(t) = t \cos 3t$; $F(t) = -t$; $G(t) = t$; $[0, 2\pi]$ por $[-10, 10]$
15. $f(t) = 4^{t/6} \cos 6t$; $F(t) = -4^{t/6}$; $G(t) = 4^{t/6}$; $[0, 2\pi]$ por $[-5, 5]$
16. $f(t) = 3^{t/3} \operatorname{sen} 8t$; $F(t) = -3^{t/3}$; $G(t) = 3^{t/3}$; $[0, 2\pi]$ por $[-10, 10]$

17. $\left[\!\left[\frac{dy}{dx}\right]\!\right]$ La función definida por

$$f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$$

es importante en Cálculo. Observe que $f(0)$ no está definido. En el ejercicio 50 de la Sección 7.3, se le pidió que calculara valores de $f(t)$ para valores pequeños de t. Estos valores de la función sugieren que $f(t)$ se aproxima a 0 conforme t se aproxima a 0. También, en ese ejercicio, se le pidió que trazara la gráfica de f en la graficadora. Ahora dibuje a mano la gráfica de f para $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

$\left[\!\left[\frac{dy}{dx}\right]\!\right]$ *En los ejercicios 18 a 22, (a) trace la gráfica de la función para $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$. (b) La función no está definida en $t = 0$, pero ¿a qué valor parece aproximarse $f(t)$ conforme t se aproxima a 0? Determine los valores siguientes en la calculadora: (c) $f(0.1)$ y $f(-0.1)$; (d) $f(0.01)$ y $f(-0.01)$; (e) $f(0.001)$ y $f(-0.001)$. (f) ¿Son acordes los valores de los incisos (c)-(e) con la respuesta del inciso (b)?*

18. $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$

19. $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$

20. $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}$

21. $f(t) = \dfrac{2 \operatorname{sen} t}{t \cos t}$

22. $f(t) = \dfrac{1 - \cos 4t}{t^2}$

23. Sea $f(t) = \cos^2 t$ y $g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$. (a) Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$ y describa lo que ve. (b) Trace la gráfica de g en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$ y describa lo que observa. (c) ¿En qué se asemejan las gráficas de los incisos (a) y (b)? Verifique la respuesta trazando las gráficas de f y g en el mismo rectángulo de inspección.

24. Siga las instrucciones del ejercicio 23 considerando $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$ y $g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$.

7.6 FUNCIONES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

OBJETIVOS

1. Definir la función tangente.
2. Definir la función cotangente.
3. Definir las funciones secante y cosecante.
4. Calcular los valores exactos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante de los números cuadrantales cuando están definidos.
5. Calcular los valores exactos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante para $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ y $\frac{1}{3}\pi$.
6. Aproximar valores de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante en una calculadora.
7. Determinar el cuadrante que contiene al punto terminal de un arco a partir de los signos de las funciones trigonométricas de la longitud del arco.
8. Aprender las ocho identidades trigonométricas fundamentales.
9. Encontrar los valores de las otras cinco funciones trigonométricas de un número cuando se ha dado el valor de una función del número.
10. Escribir una expresión trigonométrica en términos de las funciones seno y coseno.

Las otras cuatro funciones trigonométricas (o circulares) están definidas en términos de las funciones seno y coseno. La primera de ésta es la *tangente* (se abrevia *tan*), expresada como el cociente del seno y el seno.

DEFINICIÓN **Función tangente**

Si t es un número real y $\cos t \neq 0$, entonces

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

Los valores de t para los que $\cos t = 0$ son $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde $k \in$ En particular, cuando $k = 0$, $\frac{1}{2}\pi + k\pi = \frac{1}{2}\pi$; $k = 1$, $\frac{1}{2}\pi + k\pi =$ $k = -1$, $\frac{1}{2}\pi + k\pi = -\frac{1}{2}\pi$; $k = 2$, $\frac{1}{2}\pi + k\pi = \frac{5}{2}\pi$; y así sucesivamente. Estos números se excluyen del dominio de la función tangente porque cero no puede emplearse como un divisor. Así,

el dominio de la tangente es $\{t \mid t \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in Z\}$

Tabla 1

t	sen t	cos t
0	0	1
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π		

Tabla 2

t	ta
0	
$\frac{1}{6}\pi$	
$\frac{1}{4}\pi$	
$\frac{1}{3}\pi$	
$\frac{1}{2}\pi$	indefi

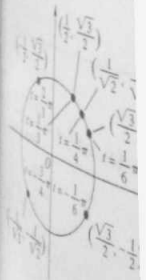


FIGURA 7.55

Como $-1 \leq \cos t \leq 1$ y $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$, $|\tan t|$ puede hacerse tan grande como se desee al tomar valores de t, tales que $\cos t$ se aproxime lo suficiente a cero. En particular, si t está próximo a $\frac{1}{2}\pi$, sen t está próximo a 1 y $|\cos t|$ está próximo a cero. En consecuencia, $|\tan t|$ es grande. Cuando t está próximo a $\frac{1}{2}\pi$ y es menor que $\frac{1}{2}\pi$, entonces tanto sen t como cos t son positivos, y así, tan t es positivo. Cuando t está próximo a $\frac{1}{2}\pi$ y es mayor que $\frac{1}{2}\pi$, entonces sen t es positivo y cos t es negativo y, en consecuencia, tan t es negativo. De esto se deduce que el contradominio de la función tangente es el conjunto de números reales.

Tabla 1

t	sen t	cos t	tan t
0	0	1	0
$\frac{1}{2}\pi$	1	0	indefinido
π	0	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	indefinido

Al emplear la definición de tan t y los valores de sen t y cos t dados en la Tabla 1 de la Sección 7.1, se obtiene tan t en los números cuadrantales 0, $\frac{1}{2}\pi$, π y $\frac{3}{2}\pi$. Se tiene

$$\tan 0 = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan \pi = \frac{\operatorname{sen} \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

Como $\cos \frac{1}{2}\pi$ y $\cos \frac{3}{2}\pi$ son cero, entonces $\tan \frac{1}{2}\pi$ y $\tan \frac{3}{2}\pi$ no están definidos. Estos resultados se resumen en la Tabla 1.

Tabla 2

t	tan t
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	indefinido

Se puede determinar tan t cuando t es igual a $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$ y $\frac{1}{3}\pi$ a partir del seno y coseno de estos números dados en la Tabla 2 de la Sección 7.1. Por tanto,

$$\tan \tfrac{1}{6}\pi = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi}{\cos \frac{1}{6}\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan \tfrac{1}{4}\pi = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi}{\cos \frac{1}{4}\pi} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \qquad \tan \tfrac{1}{3}\pi = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi}{\cos \frac{1}{3}\pi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Estos valores, así como los de tan 0 y tan $\frac{1}{2}\pi$, se resumen en la Tabla 2.

Como (cos t, sen t) es un punto (x, y) de U,

$$\tan t = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

De esta manera, el valor de tan t puede encontrarse determinando las coordenadas del punto terminal del arco que tiene longitud t.

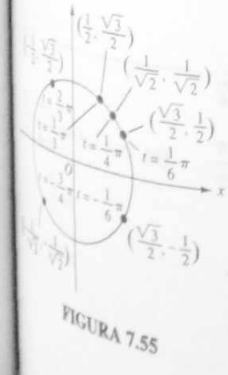


FIGURA 7.55

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La Figura 7.55 muestra tres puntos de U para los cuales $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = -\frac{1}{6}\pi$ y $t = -\frac{3}{4}\pi$. Estos puntos son simétricos de los puntos del primer cua-

drante para los cuales $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \frac{1}{6}\pi$ y $t = \frac{1}{4}\pi$, respectivamente. A pa
tir de las coordenadas de estos puntos se obtiene

$$\tan\frac{2}{3}\pi = \frac{y}{x} \qquad \tan\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{y}{x} \qquad \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \qquad = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad =$$

$$= -\sqrt{3} \qquad = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad = 1$$

La función *cotangente* (se abrevia *cot*) se define como el cocien
del coseno y el seno.

DEFINICIÓN **Función cotangente**

Si t es número real y sen $t \neq 0$, entonces

$$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Los valores de t para los cuales sen $t = 0$ son $k\pi$, donde $k \in Z$; estos números se excluyen del dominio de la función cotangente. En consecuencia,

el dominio de la cotangente es $\{t \mid t \neq k\pi, k \in Z\}$

Como en el caso de la tangente, el contradominio de la cotangente es el conjunto de números reales.

Los valores de función para la cotangente cuando t es igual a $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, y $\frac{3}{2}\pi$ pueden determinarse empleando la definición de cot t y los valores de función para seno y coseno dados en las tablas 1 y 2 de la Sección 7.1.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) $\cot\frac{1}{6}\pi = \dfrac{\cos\frac{1}{6}\pi}{\operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

(b) $\cot\frac{1}{4}\pi = \dfrac{\cos\frac{1}{4}\pi}{\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$

(c) $\cot\frac{1}{2}\pi = \dfrac{\cos\frac{1}{2}\pi}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi} = \dfrac{0}{1} = 0$

Como sen 0 y sen π son cero, entonces cot 0 y cot π no están definidos. ◀

Cuando sen t y cos t son diferentes de cero, entonces

$$\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}$$

Por tanto,

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \text{si } t \neq \tfrac{1}{2}k\pi, k \in Z$$

Esta ecuación es una definición optativa de la cotangente, y debido a esta relación, la tangente y la cotangente son **funciones recíprocas.** El seno y el coseno también tienen funciones recíprocas, y ellas son la *cosecante* (se abrevia *csc*) y la *secante* (se abrevia *sec*), respectivamente.

DEFINICIÓN **Funciones secante y cosecante**

Si t es número real, entonces

(i) $\sec t = \dfrac{1}{\cos t} \qquad \text{si } t \neq \tfrac{1}{2}\pi + k\pi, k \in Z$

(ii) $\csc t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \text{si } t \neq k\pi, k \in Z$

Observe de la definición que

el dominio de la secante es $\{t \mid t \neq \tfrac{1}{2}\pi + k\pi, k \in Z\}$

y

el dominio de la cosecante es $\{t \mid t \neq k\pi, k \in Z\}$

Como $|\cos t| \leq 1$ para todo número real t, entonces $|\sec t| \geq 1$ para todo t en el dominio de la secante. De modo que el contradominio de la secante es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. De igual manera, como $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ para todo número real t, entonces, $|\csc t| \geq 1$ para todo t en el dominio de la cosecante y así, el contradominio de la cosecante es también $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) $\sec 0 = \dfrac{1}{\cos 0}$

$= \dfrac{1}{1}$

$= 1$

(b) $\sec \frac{1}{3}\pi = \dfrac{1}{\cos \frac{1}{3}\pi}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{2}}$

$= 2$

(c) $\csc \frac{3}{2}\pi = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi}$

$= \dfrac{1}{-1}$

$= -1$

(d) $\csc(-\frac{5}{4}\pi) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-\frac{5}{4}\pi)}$

$= \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \sqrt{2}$

(e) $\sec(-\frac{1}{6}\pi) = \dfrac{1}{\cos(-\frac{1}{6}\pi)}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(f) $\csc(-\frac{1}{3}\pi) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-\frac{1}{3}\pi)}$

$= \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Como $\cos \frac{1}{2}\pi$ y $\cos \frac{3}{2}\pi$ son cero, entonces $\sec \frac{1}{2}\pi$ y $\sec \frac{3}{2}\pi$ no están definidos. Además, como sen 0 y sen π son cero, entonces csc 0 y csc π no están definidos.

De nuevo, aplicando el hecho de que $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ es un par (x, y) de U,

$$\cot t = \frac{x}{y} \quad \text{si } y \neq 0 \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \qquad \csc t = \frac{1}{y} \quad \text{si } y \neq$$

Por tanto, los valores de estas funciones pueden hallarse determinando las coordenadas del punto terminal del arco cuya longitud es t.

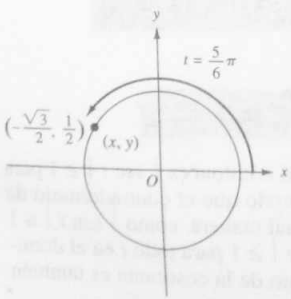


FIGURA 7.56

► EJEMPLO 1 *Determinación de los valores exactos de las funciones trigonométricas a partir de las coordenadas de un punto de U*

Encuentre la tangente, cotangente, secante y cosecante de $\frac{5}{6}\pi$ determinando las coordenadas del punto terminal del arco de longitud $\frac{5}{6}\pi$

Solución La Figura 7.56 muestra el punto de U para el cual $t = \frac{5}{6}\pi$, y para este punto $(x, y) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Por tanto,

$$\tan\frac{5}{6}\pi = \frac{y}{x} \qquad \cot\frac{5}{6}\pi = \frac{x}{y} \qquad \sec\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{x} \qquad \csc\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{y}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \qquad = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad = -\sqrt{3} \qquad = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad = 2$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

A fin de evaluar tan 1.205 en una calculadora en el modo de radianes, se presiona la tecla [tan] y se lee

$$\tan 1.205 \approx 2.610727883$$

Al redondear a cuatro dígitos significativos se tiene

$$\tan 1.205 \approx 2.611$$ ◀

Las calculadoras, generalmente, no tiene teclas para cotangente, secante y cosecante. Para obtener valores de cot t, sec t y csc t se emplean las identidades

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

A fin de determinar csc 0.562, se aplica la identidad

$$\csc 0.562 = \frac{1}{\operatorname{sen} 0.562}$$

y de la calculadora, en el modo de radianes, se tiene

$$\csc 0.562 \approx 1.876596357$$

Al redondear a cuatro dígitos significativos se obtiene

$$\csc 0.562 \approx 1.877$$ ◀

► EJEMPLO 2 *Aproximación de valores de funciones trigonométricas en una calculadora*

Aproxime a cuatro dígitos significativos cada una de las siguientes expresiones: **(a)** tan 2; **(b)** cot $\frac{2}{7}\pi$; **(c)** sec 4.391; **(d)** csc(−3.672).

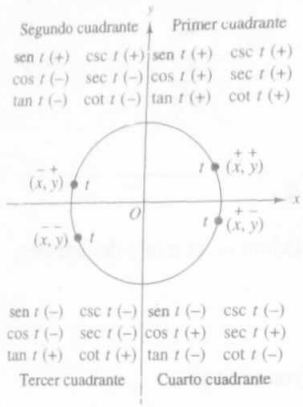


FIGURA 7.57

Solución Asegúrese de que la calculadora esté en el modo de dianes. Redondee cada entrada a cuatro dígitos significativos.

(a) $\tan 2 \approx -2.185$

(b) $\cot \frac{2}{5}\pi = \dfrac{1}{\tan \frac{2}{5}\pi}$

≈ 0.7975

(c) $\sec 4.391 = \dfrac{1}{\cos 4.391}$

≈ -3.166

(d) $\csc(-3.672) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-3.67}$

≈ 1.977

El signo (+ o −) de cada una de las seis funciones trigonométr del número t está determinado por el cuadrante que contiene al pu terminal del arco de longitud t. La Figura 7.57 muestra un punto de en cada uno de los cuatro cuadrantes. Sobre los símbolos de las var bles x y y están sus signos, determinados por el cuadrante en el cual encuentra el punto. También en la figura se indica el signo de las fu ciones en cada uno de los cuadrantes. La Tabla 3 resume los resulta para los signos, presentados en la figura. Observe que cuando el sig de una función es determinado por un cuadrante específico, su funci recíproca tendrá el mismo signo en ese cuadrante.

Tabla 3

Cuadrante	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc
Primero	+	+	+	+	+	+
Segundo	+	−	−	−	−	+
Tercero	−	−	+	+	−	−
Cuarto	−	+	−	−	+	−

► EJEMPLO 3 *Determinación del cuadrante que contiene el punto terminal de un arco*

A partir del signo indicado de la función trigonométrica de t, determine el cuadrante que contiene al punto terminal del arco de longitud t. **(a)** sen $t < 0$ y tan $t > 0$; **(b)** cos $t > 0$ y csc $t < 0$.

Solución

(a) De la Tabla 3, sen $t < 0$ en los cuadrantes tercero y cuarto, y tan $t > 0$ en los cuadrantes primero y tercero. A fin de que ambas condiciones se cumplan, el punto debe estar en el tercer cuadrante.

(b) De la tabla, cos $t > 0$ para los cuadrantes primero y cuarto, y csc $t < 0$ en los cuadrantes tercero y cuarto. De modo que el punto está en el cuarto cuadrante.

En la Sección 7.1 se presentó la identidad pitagórica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Si $\cos t \neq 0$, se puede dividir cada miembro de esta identidad entre $\cos^2 t$ y obtener

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Se puede dividir cada lado de la identidad pitagórica fundamental entre $\operatorname{sen}^2 t$ siempre y cuando $\operatorname{sen} t \neq 0$. Al hacerlo se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$$

$$1 + \left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} t}\right)^2$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Por tanto, se tienen las dos siguientes identidades que son válidas cuando las funciones están definidas:

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$
$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Estas identidades también se denominan identidades pitagóricas.

Las relaciones determinadas por identidades pitagóricas e identidades de las definiciones de esta sección, constituyen las ocho identidades trigonométricas fundamentales. Dichas identidades se emplean frecuentemente para escribir una expresión que implica funciones trigonométricas de una forma equivalente. Debido a su importancia, se presentan juntas en la siguiente lista. Estas identidades deben memorizarse y reconocerse en cualquiera de sus formas.

Las ocho identidades trigonométricas fundamentales

I $\operatorname{sen} t \csc t = 1 \leftrightarrow \csc t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t} \leftrightarrow \operatorname{sen} t = \dfrac{1}{\csc t}$

II $\cos t \sec t = 1 \leftrightarrow \sec t = \dfrac{1}{\cos t} \leftrightarrow \cos t = \dfrac{1}{\sec t}$

III $\tan t \cot t = 1 \leftrightarrow \cot t = \dfrac{1}{\tan t} \leftrightarrow \tan t = \dfrac{1}{\cot t}$

IV $\operatorname{sen} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$

V $\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$

VI $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \leftrightarrow \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \leftrightarrow \cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$

VII $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t \leftrightarrow \tan^2 t = \sec^2 t - 1 \leftrightarrow \sec^2 t - \tan^2 t = 1$

VIII $1 + \cot^2 t = \csc^2 t \leftrightarrow \cot^2 t = \csc^2 t - 1 \leftrightarrow \csc^2 t - \cot^2 t = 1$

▶ EJEMPLO 4 *Determinación de las otras funciones trigonométricas de un número cuando una de las funciones se proporciona*

Si $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{5}$ y $\cos t > 0$, encontrar $\cos t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$.

Solución Como $\operatorname{sen} t < 0$ y $\cos t > 0$, el punto terminal del arco de longitud t se encuentra en el cuarto cuadrante.

De la identidad fundamental VI y como $\cos t > 0$,

$$\begin{aligned} \cos t &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \\ &= \sqrt{1 - (-\tfrac{3}{5})^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{16}{25}} \\ &= \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

De la identidad fundamental IV,

$$\begin{aligned} \tan t &= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \\ &= \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \\ &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

De las identidades fundamentales I y III,

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$
$$= -\tfrac{4}{3} \qquad = \tfrac{5}{4} \qquad = -\tfrac{5}{3}$$

Observe que en las ocho identidades fundamentales, las funciones seno y coseno aparecen con mayor frecuencia que las otras cuatro. Las identidades I, II, IV y V nos habilitan para expresar las otras cuatro funciones en términos del seno, del coseno o ambas.

▶ EJEMPLO 5 *Escribir una expresión trigonométrica en términos de seno y coseno*

Escriba la expresión **(a)** en términos de $\operatorname{sen} t$ y la expresión **(b)** en términos de $\cos t$ y simplifique: **(a)** $\tan^2 t \csc t$; **(b)** $\dfrac{\sec^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t}$.

EJERCICIOS 7.4

En los ejercicios 1 a 10, encuentre (a) tan t, (b) cot t, (c) sec t y (d) csc t, con la información proporcionada.

1. $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos t = \frac{1}{2}$

2. $\operatorname{sen} t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\operatorname{sen} t = \frac{2}{3}$ y $\cos t = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{5}$ y $\cos t \frac{4}{5}$

5. $\operatorname{sen} t = -\frac{12}{13}$ y $\cos t = -\frac{5}{13}$

6. $\operatorname{sen} t = -\frac{8}{17}$ y $\cos t = -\frac{15}{17}$

7. $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{\sqrt{34}}$ y $\cos t = -\frac{5}{\sqrt{34}}$

8. $\operatorname{sen} t = \frac{3}{\sqrt{13}}$ y $\cos t = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

9. $\operatorname{sen} t = -1$ y $\cos t = 0$

10. $\operatorname{sen} t = 0$ y $\cos t = -1$

En los ejercicios 11 a 16, encuentre las seis funciones trigonométricas del número, determine el cuadrante del punto terminal del arco de longitud dado y cuyo punto inicial es (1, 0).

11. $\frac{1}{3}\pi$

12. $\frac{11}{6}\pi$

14. $\frac{1}{3}\pi$

15. $\frac{2}{3}\pi$

Solución

(a) $\tan^2 t \csc t = \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} t}$

$= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t \operatorname{sen} t}$

$= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}$

$= \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

(b) $\frac{\sec^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{\tan^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}$

$= \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2}{\operatorname{sen}^2 t}$

$= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$

$= \frac{1}{\cos^2 t}$

EJERCICIOS 7.6

En los ejercicios 1 a 10, encuentre los valores exactos de (a) tan t, (b) cot t, (c) sec t y (d) csc t, a partir de la información proporcionada.

1. $\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos t = \frac{1}{2}$

2. $\operatorname{sen} t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\operatorname{sen} t = \frac{2}{3}$ y $\cos t = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{5}$ y $\cos t \frac{4}{5}$

5. $\operatorname{sen} t = -\frac{12}{13}$ y $\cos t = -\frac{5}{13}$

6. $\operatorname{sen} t = -\frac{8}{17}$ y $\cos t = -\frac{15}{17}$

7. $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{\sqrt{34}}$ y $\cos t = \frac{5}{\sqrt{34}}$

8. $\operatorname{sen} t = \frac{3}{\sqrt{13}}$ y $\cos t = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

9. $\operatorname{sen} t = -1$ y $\cos t = 0$

10. $\operatorname{sen} t = 0$ y $\cos t = -1$

En los ejercicios 11 a 16, encuentre las seis funciones trigonométricas del número, determinando las coordenadas del punto terminal del arco cuya longitud es el número dado y cuyo punto inicial es (1, 0).

11. $\frac{1}{3}\pi$

12. $\frac{11}{6}\pi$

13. $-\frac{1}{4}\pi$

14. $\frac{1}{2}\pi$

15. $\frac{2}{3}\pi$

16. $-\frac{2}{3}\pi$

En los ejercicios 17 a 24, encuentre el valor exacto de la función.

17. (a) $\tan \frac{7}{4}\pi$ (b) $\cot(-\frac{3}{4}\pi)$

18. (a) $\tan \frac{5}{4}\pi$ (b) $\cot(-\frac{7}{4}\pi)$

19. (a) $\csc \frac{4}{3}\pi$ (b) $\sec(-\frac{7}{6}\pi)$

20. (a) $\sec(-\frac{1}{3}\pi)$ (b) $\csc \frac{7}{6}\pi$

21. (a) $\tan \frac{13}{6}\pi$ (b) $\sec(-\frac{7}{3}\pi)$

22. (a) $\cot \frac{7}{3}\pi$ (b) $\csc(-\frac{13}{6}\pi)$

23. (a) $\csc \frac{3}{2}\pi$ (b) $\cot(-\frac{7}{2}\pi)$

24. (a) $\sec(-\pi)$ (b) $\tan 3\pi$

En los ejercicios 25 a 34, utilice una calculadora para determinar el valor de la función con cuatro dígitos significativos.

25. (a) tan 1.26 (b) cot 1.26 (c) sec 0.34 (d) csc 0.34

26. (a) tan 0.57 (b) cot 0.57 (c) sec 1.42 (d) csc 1.42

27. (a) tan 1.05 (b) cot 1.05 (c) sec 0.21 (d) csc 0.21

28. (a) tan 0.18 (b) cot 0.18 (c) sec 1.33 (d) csc 1.33

29. (a) tan 1.84 (b) csc 1.84 (c) cot 3.62 (d) sec 3.62

30. (a) tan 4.06 (b) sec 4.06 (c) cot 2.75 (d) csc 2.75

31. (a) $\tan \frac{5}{11}\pi$ (b) $\sec(-\frac{1}{8}\pi)$ (c) $\csc(-\frac{1}{8}\pi)$

32. (a) $\tan(-\frac{3}{8}\pi)$ (b) $\sec(-\frac{3}{5}\pi)$
(c) $\csc\frac{7}{5}\pi$

33. (a) $\cot\frac{4}{5}\pi$ (b) $\sec(-\frac{4}{7}\pi)$
(c) $\csc\frac{17}{10}\pi$

34. (a) $\cot\frac{5}{12}\pi$ (b) $\sec\frac{23}{14}\pi$
(c) $\csc(-\frac{6}{5}\pi)$

En los ejercicios 35 a 38, determine el cuadrante que contiene al punto terminal del arco de longitud t, si el punto inicial está en (1, 0).

35. (a) $\cos t > 0$ y $\tan t < 0$
(b) $\operatorname{sen} t < 0$ y $\cot t > 0$

36. (a) $\cos t < 0$ y $\tan t > 0$
(b) $\operatorname{sen} t > 0$ y $\cot t > 0$

37. (a) $\tan t < 0$ y $\csc t > 0$
(b) $\cot t > 0$ y $\sec t < 0$

38. (a) $\tan t > 0$ y $\csc t < 0$
(b) $\cot t < 0$ y $\sec t > 0$

39. Si $\cos t = -\frac{4}{5}$ y $\operatorname{sen} t > 0$, encuentre los valores exactos de sen t, tan t, cot t, sec t y csc t.

40. Si $\operatorname{sen} t = -\frac{12}{13}$ y $\cos t > 0$, encuentre los valores exactos de cos t, tan t, cot t, sec t y csc t.

41. Si $\tan t = \frac{15}{8}$ y $\sec t < 0$, encuentre los valores exactos de sen t, cos t, cot t, sec t y csc t.

42. Si $\cot t = \frac{4}{3}$ y $\csc t < 0$, encuentre los valores exactos de sen t, cos t, tan t, sec t y csc t.

43. Si $\cot t = -\frac{5}{12}$ y $\csc t < 0$, encuentre los valores exactos de sen t, cos t, tan t, sec t y csc t.

44. Si $\tan t = -\frac{8}{15}$ y $\sec t < 0$, encuentre los valores exactos de sen t, cos t, cot t, sec t y csc t.

En los ejercicios 45 a 50, escriba la expresión (a) en términos de sen t *y la expresión (b) en términos de* cos t.

45. (a) $\cot^2 t \csc t$ (b) $\tan t \csc t$

46. (a) $\cot t \sec t$ (b) $\cot^2 t \sec t$

47. (a) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{\tan^2 t}$ (b) $\dfrac{1-\csc^2 t}{\csc^2 t}$

48. (a) $\dfrac{1-\sec^2 t}{\sec^2 t}$ (b) $\dfrac{\cos^3 t}{\cot^2 t}$

49. (a) $\dfrac{\csc^2 t - 1}{\cos t \cot t}$ (b) $\dfrac{\cot^2 t + 1}{\operatorname{sen} t}$

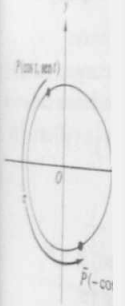
50. (a) $\dfrac{\tan^2 t + 1}{\cos t}$ (b) $\dfrac{\sec^2 t - 1}{\operatorname{sen} t \tan t}$

51. Exprese $\dfrac{\tan^2 t - \csc^2 t}{\sec^2 t}$ en términos de sen t.

52. Exprese $\dfrac{\sec^2 t - \cot^2 t}{\csc^2 t}$ en términos de cos t.

53. En la Sección 2.1 se definió una identidad como una ecuación en la que el conjunto solución es el mismo que el dominio de la incógnita. Consecuentemente, una identidad trigonométrica en la variable t es válida para todo t, para el cual las funciones están definidas. Establezca cada una de las ocho identidades trigonométricas fundamentales, y para cada identidad indique todos los valores de t para los que la identidad es válida.

(a)



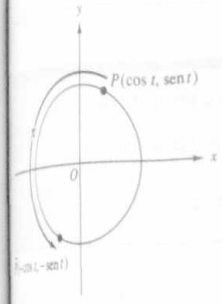
(b)

7.7 PERIODICIDAD Y GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

OBJETIVOS

1. **Aprender que las funciones tangente y cotangente son periódicas de periodo π.**
2. **Aprender que las funciones secante y cosecante son periódicas de periodo 2π.**
3. **Determinar valores de funciones trigonométricas utilizando la periodicidad de las funciones.**
4. **Obtener la gráfica de la función tangente.**
5. **Obtener la gráfica de la función cotangente.**

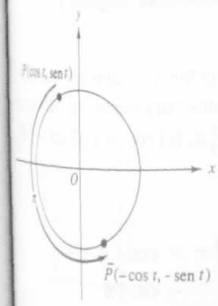
6. **Aprender que el periodo de una función de la forma tan bt o cot bt es $\dfrac{\pi}{|b|}$.**
7. **Dibujar las gráficas de las funciones tangente y cotangente.**
8. **Obtener la gráfica de la función secante.**
9. **Obtener la gráfica de la función cosecante.**
10. **Aprender que el periodo de una función de la forma sec bt o csc bt es $\dfrac{2\pi}{|b|}$.**
11. **Dibujar las gráficas de las funciones secante y cosecante.**



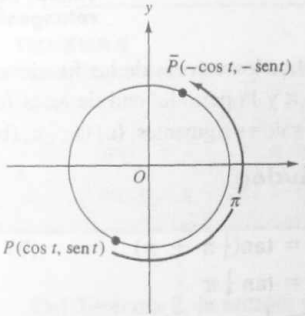
(a)

Antes de discutir las gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, se mostrará que estas funciones son periódicas. El concepto de periodicidad nos ayudará a obtener las gráficas.

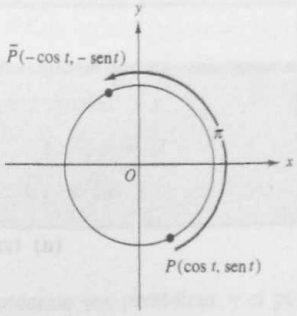
Considere los puntos $P(\cos t, \text{sen } t)$ y $\bar{P}(-\cos t, -\text{sen } t)$ de la circunferencia unitaria U. Estos puntos son los extremos de un diámetro, *véase* la Figura 7.58, la cual muestra el punto P en cada uno de los cuatro cuadrantes.



(b)



(c)



(d)

FIGURA 7.58

De las definiciones de tangente y cotangente

$$\tan t = \frac{\text{sen } t}{\cos t} \quad \text{si } \cos t \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\text{sen } t} \quad \text{si sen } t \neq 0$$

Como $\bar{P}(-\cos t, -\text{sen } t)$ es el punto terminal de un arco de longitud $t + \pi$, entonces

$$\tan (t + \pi) = \frac{-\text{sen } t}{-\cos t} \qquad \cot(t + \pi) = \frac{-\cos t}{-\text{sen } t}$$

$$= \frac{\text{sen } t}{\cos t} \quad \text{si } \cos t \neq 0 \qquad = \frac{\cos t}{\text{sen } t} \quad \text{si sen } t \neq 0$$

Así,

$$\tan(t + \pi) = \tan t \quad \text{si } \cos t \neq 0 \quad \text{y} \quad \cot(t + \pi) = \cot t \quad \text{si } \operatorname{sen} t \neq$$

De estas fórmulas, la tangente y la cotangente son periódicas, y el riodo es π. Al aplicar repetidamente las fórmulas, se puede prob teorema siguiente.

TEOREMA 1

Si t es cualquier número real y k es cualquier entero,

$$\tan(t + k\pi) = \tan t \qquad \text{si } t \neq \tfrac{1}{2}\pi + k\pi$$

$$\cot(t + k\pi) = \cot t \qquad \text{si } t \neq k\pi$$

▶ EJEMPLO 1 *Aplicación de la periodicidad para encontr valores de las funciones tangente y cotangente*

Utilice los valores de las funciones tangente y cotangente cuando $t < \pi$ y la periodicidad de estas funciones para encontrar cada un los valores siguientes: **(a)** $\tan \frac{5}{4}\pi$; **(b)** $\cot \frac{5}{3}\pi$; **(c)** $\cot \frac{7}{2}\pi$ y **(d)** $\tan(-\frac{19}{6}\pi$

Solución

(a) $\tan \frac{5}{4}\pi = \tan(\frac{1}{4}\pi + \pi)$
$= \tan \frac{1}{4}\pi$
$= 1$

(b) $\cot \frac{5}{3}\pi = \cot(\frac{2}{3}\pi + \pi)$
$= \cot \frac{2}{3}\pi$
$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\cot \frac{7}{2}\pi = \cot(\frac{1}{2}\pi + 3\pi)$
$= \cot \frac{1}{2}\pi$
$= 0$

(d) $\tan(-\frac{19}{6}\pi) = \tan(\frac{5}{6}\pi + (-$
$= \tan \frac{5}{6}\pi$
$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

La periodicidad de la secante y de la cosecante están relacion con la periodicidad del coseno y del seno. Como

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \quad \text{si } \cos t \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \quad \text{si sen}$$

entonces

$$\sec(t + k \cdot 2\pi) = \frac{1}{\cos(t + k \cdot 2\pi)} \quad \text{si } \cos(t + k \cdot 2\pi) \neq 0$$

y

$$\csc(t + k \cdot 2\pi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(t + k \cdot 2\pi)} \quad \text{si } \operatorname{sen}(t + k \cdot 2\pi) \neq 0$$

Pero $\cos(t + k \cdot 2\pi) = \cos t$ y $\operatorname{sen}(t + k \cdot 2\pi) = \operatorname{sen} t$. De donde

$$\sec(t + k \cdot 2\pi) = \frac{1}{\cos t} \quad \text{si } \cos t \neq 0$$

y

$$\csc(t + k \cdot 2\pi) = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \quad \text{si } \operatorname{sen} t \neq 0$$

Al sustituir $1/(\cos t)$ por $\sec t$ y $1/(\operatorname{sen} t)$ por $\csc t$, se tiene el teorema siguiente.

TEOREMA 2

Si t es un número real y k es cualquier entero,

$$\sec(t + k \cdot 2\pi) = \sec t \quad \text{si } t \neq \tfrac{1}{2}\pi + k\pi$$

$$\csc(t + k \cdot 2\pi) = \csc t \quad \text{si } t \neq k\pi$$

Del Teorema 2, la secante y la cosecante son periódicas, y el periodo es 2π.

Ahora nos concentraremos en las gráficas. El procedimiento para obtener la gráfica de la función tangente es semejante al que se empleó para el seno y el coseno. Debido a que el periodo de la tangente es π, primero se determinará la porción de la gráfica en el intervalo $[0, \pi]$. Para conseguir algunos puntos específicos de la gráfica, se emplean algunos valores especiales de tan t presentados en la Tabla 1. La Figura 7.59 muestra los puntos que tienen como coordenadas los pares de números $(t, \tan t)$ dados en la tabla, donde se consideró $\sqrt{3} \approx 1.7$ y $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.6$.

Tabla 1

t	$\tan t$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	indefinido
$\frac{2}{3}\pi$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
π	0

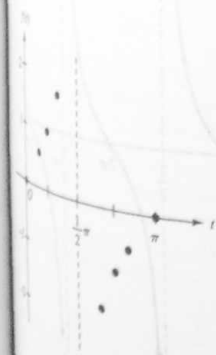


FIGURA 7.59

Como $\tan \frac{1}{2}\pi$ no está definido, no hay punto en la gráfica para $t = \frac{1}{2}\pi$. Pero ¿qué ocurre cuando t se aproxima a $\frac{1}{2}\pi$? Para responder esta pregunta, se emplea la identidad

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

Conforme t se aproxima a $\frac{1}{2}\pi$, sen t se aproxima a 1 y cos t a cero. Más detalladamente, conforme t se aproxima a $\frac{1}{2}\pi$ a través de valores menores que $\frac{1}{2}\pi$ (esto es, $t \to \frac{1}{2}\pi^-$), cos t se aproxima a cero por medio de valores positivos; de modo que tan t crece sin límite. Esto se escribe como

$$\tan t \to +\infty \qquad \text{conforme } t \to \tfrac{1}{2}\pi^-$$

Conforme t se aproxima a $\frac{1}{2}\pi$ a través de valores mayores que $\frac{1}{2}\pi$ (esto es, $t \to \frac{1}{2}\pi^+$), cos t se aproxima a cero a través de valores negativos; en consecuencia, tan t decrece sin límite. Esto se denota como

$$\tan t \to -\infty \qquad \text{conforme } t \to \tfrac{1}{2}\pi^+$$

Por tanto, la recta $t = \frac{1}{2}\pi$ es una asíntota vertical de la gráfica. Con esta información, se unen los puntos de la Figura 7.59 con una curva y se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 7.60. Como ayuda para dibujar la gráfica, se pueden localizar puntos adicionales de los valores de tan t obtenidos mediante la calculadora.

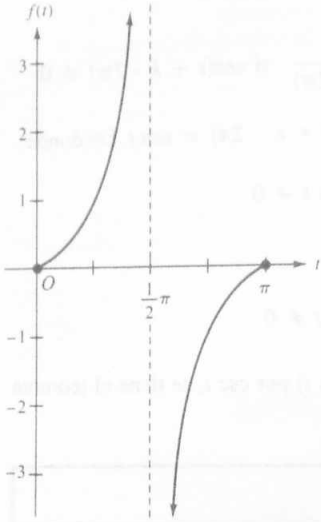


FIGURA 7.60

La porción de la curva en el intervalo $[0, \pi]$ se repite para cada intervalo del eje t de longitud π: $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, $[-\pi, 0]$, $[-2\pi, -\pi]$ y así sucesivamente. La Figura 7.61 muestra la gráfica completa. Las asíntotas verticales son las rectas que tienen las ecuaciones

$$t = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad t = (2k + 1)\tfrac{1}{2}\pi$$

donde $k \in Z$. Los valores de t en los que la gráfica corta al eje t son los ceros de la función tangente. Ellos son $t = k\pi$, donde $k \in Z$

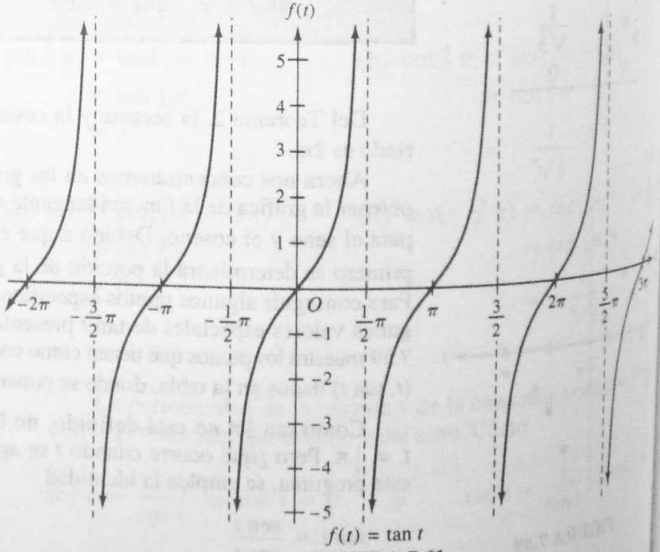


FIGURA 7.61

Observe que la gráfica de la función tangente es simétrica con respecto al origen debido a que la tangente es una función impar; esto es,

$$\tan(-t) = -\tan t$$

Esta identidad puede obtenerse a partir de las identidades (1) y (2) de la Sección 7.3 como sigue:

$$\begin{aligned}\tan(-t) &= \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\cos(-t)} \\ &= \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} \\ &= -\tan t\end{aligned}$$

La gráfica de la función cotangente puede obtenerse localizando puntos como se hizo para la tangente. Sin embargo, un método más fácil es el que emplea la identidad

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}$$

si $t \neq \frac{1}{2}k\pi$, donde $k \in Z$. Para un valor de t en los dominios de ambas funciones, una ordenada de la gráfica de la cotangente puede encontrarse tomando el recíproco de la ordenada correspondiente de la gráfica de la tangente.

Si $t = \frac{1}{2}k\pi$, donde k es un entero par, entonces $\tan t = 0$, y $\cot t$ no está definido. Por tanto, no hay punto en la gráfica de la cotangente para estos valores de t. Cuando $t = \frac{1}{2}k\pi$, donde k es un entero impar, $\cot t = 0$. Así, la gráfica de la cotangente corta al eje t para estos valores de t. Se utiliza la gráfica de la tangente como ayuda, primero se dibuja ésta, en color gris, como se indica en la Figura 7.62. Después, se

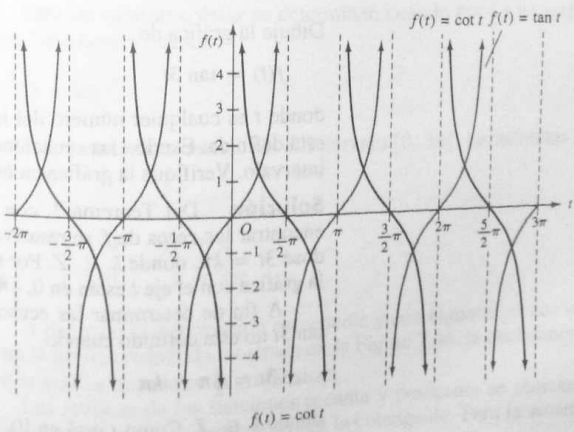


FIGURA 7.62

toman los recíprocos de las ordenadas, obteniéndose los puntos de la gráfica de la cotangente, mostrada en la figura. Observe que las asíntotas verticales de la gráfica de la cotangente son las rectas que tienen las ecuaciones $t = k\pi$, donde $k \in Z$, y los ceros de la función cotangente son $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde $k \in Z$.

A partir de sus gráficas, es evidente que el contradominio de las funciones tangente y cotangente es el conjunto R de los números reales.

El Teorema 1 de la Sección 7.3 establece que una función definida mediante una de las ecuaciones $f(t) = \operatorname{sen} bt$ o $f(t) = \cos bt$, donde $b \neq 0$, tiene periodo $2\pi / |\ b\ |$. La prueba se basó en el hecho de que el seno y el coseno tienen periodo 2π. Una demostración semejante puede darse para el teorema siguiente. El periodo de una función definida por $f(t) = \tan bt$ o $f(t) = \cot bt$ es $\pi / |\ b\ |$ debido a que el periodo de la tangente y de la cotangente es π.

TEOREMA 3

El periodo P de una función definida por

$$f(t) = \tan bt \quad \text{o} \quad f(t) = \cot bt$$

donde $b \neq 0$, está dado por

$$P = \frac{\pi}{|\ b\ |}$$

► EJEMPLO 2 *Dibujo de la gráfica de una función tangente*

Dibuje la gráfica de

$$f(t) = \tan 3t$$

donde t es cualquier número del intervalo $[0, \pi]$ en el cual la función está definida. Escriba las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica en el intervalo. Verifique la gráfica en una graficadora.

Solución Del Teorema 3, con $b = 3$, el periodo de f es $\frac{1}{3}\pi$. Para encontrar los ceros de f, se resuelve la ecuación $\tan 3t = 0$, obteniéndose $3t = k\pi$, donde $k \in Z$. Por tanto, en $[0, \pi]$ las intersecciones de la gráfica con el eje t están en $0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$ y π.

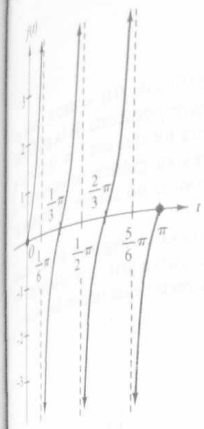
A fin de determinar las ecuaciones de las asíntotas, observe que $\tan 3t$ no está definido cuando

$$3t = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi$$

donde $k \in Z$. Como t está en $[0, \pi]$ entonces $3t$ está en $[0, 3\pi]$. Así las ecuaciones de las asíntotas en $[0, \pi]$ están dadas por

$$3t = \tfrac{1}{2}\pi \qquad 3t = \tfrac{3}{2}\pi \qquad 3t = \tfrac{5}{2}\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \tfrac{1}{6}\pi \qquad t = \tfrac{1}{2}\pi \qquad t = \tfrac{5}{6}\pi$$

Con esta información y la localización de algunos puntos, se obtiene la gráfica de la Figura 7.63. Para esta gráfica en el intervalo $[0, \pi]$ del eje t se han hecho marcas cada $\frac{1}{6}\pi$ de unidad. En la graficadora se obtiene la misma gráfica. ◀



$f(t) = \tan 3t$

FIGURA 7.63

▶ EJEMPLO 3 *Dibujo de la gráfica de una función cotangente*

Dibuje la gráfica de

$$f(t) = 2 \cot \tfrac{1}{3}t$$

en el intervalo cuya longitud es el periodo. Compruebe la gráfica en la graficadora.

Solución Del Teorema 3, con $b = \frac{1}{3}$, el periodo de f es $\dfrac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$. Por tanto, se obtendrá la gráfica en el intervalo $[0, 3\pi]$.

La gráfica intersecta al eje t cuando $\cot \frac{1}{3}t = 0$, esto es, cuando

$$\tfrac{1}{3}t = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi$$

donde $k \in Z$. Como $\frac{1}{3}t$ está en $[0, \pi]$, entonces el único punto de intersección con el eje t está dado por

$$\tfrac{1}{3}t = \tfrac{1}{2}\pi$$
$$t = \tfrac{3}{2}\pi$$

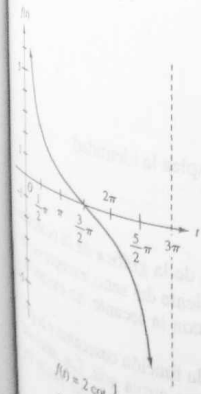
Para las asíntotas, éstas se determinan cuando $\cot \frac{1}{3}t$ no está definido. Esto ocurre cuando

$$\tfrac{1}{3}t = k\pi$$

donde k es cualquier entero. En el intervalo $[0, 3\pi]$, las asíntotas están dadas por

$$\tfrac{1}{3}t = 0 \qquad \tfrac{1}{3}t = \pi$$
$$\Leftrightarrow \quad t = 0 \qquad t = 3\pi$$

A partir de la información precedente y con algunos puntos se obtiene la gráfica requerida mostrada en la Figura 7.64, la cual concuerda con la gráfica trazada en la graficadora. ◀



$f(t) = 2 \cot \frac{1}{3}t$

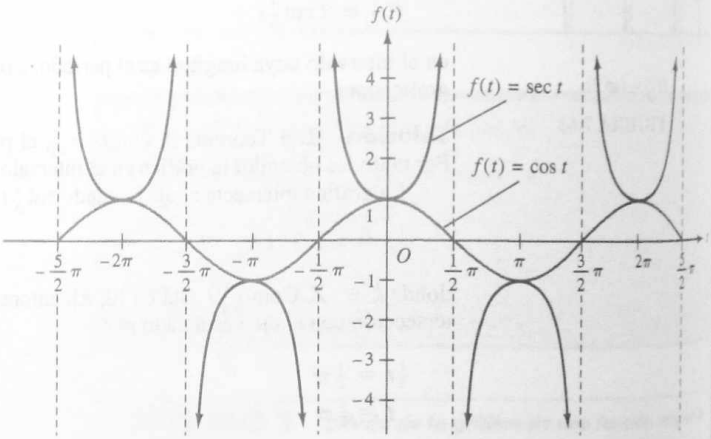
FIGURA 7.64

Las gráficas de las funciones secante y cosecante se obtienen de manera semejante a la empleada para la cotangente. Para la secante se emplea la identidad

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

si $t \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde $k \in Z$. En la gráfica de $f(t) = \sec t$, cada ordenada es el recíproco de la ordenada correspondiente de la gráfica de $f(t) = \cos t$, excepto para valores de t para los que $\cos t = 0$. Como la función secante no tiene ceros, entonces su gráfica no intersecta al eje t. De hecho, ya que $|\sec t| \geq 1$, entonces no existen ordenadas de la gráfica entre -1 y 1.

La gráfica de $f(t) = \sec t$ se presenta en la Figura 7.65 en la que la gráfica de $f(t) = \cos t$ se indica con la curva gris. Las asíntotas verticales de la gráfica de la secante son las rectas que tienen las ecuaciones $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde $k \in Z$.



$f(t) = \sec t$

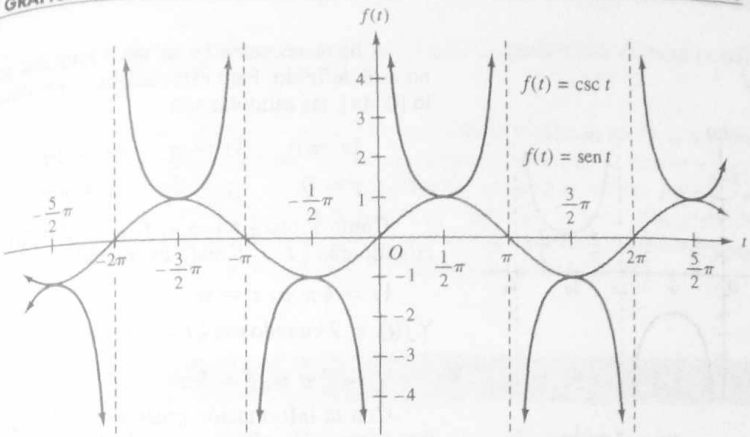
FIGURA 7.65

Para la gráfica de la cosecante, se emplea la identidad

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

si $t \neq k\pi$, donde $k \in Z$. Cada ordenada de la gráfica de la cosecante es el recíproco de la ordenada correspondiente del seno, excepto en valores de t para los que $\operatorname{sen} t = 0$. Como con la secante, no existen ordenadas de la gráfica entre -1 y 1.

La Figura 7.66 muestra la gráfica de la función cosecante y la gráfica del seno, la cual se representa por una curva gris. Las asíntotas verticales de la gráfica de la cosecante son las rectas que tienen las ecuaciones $t = k\pi$, donde $k \in Z$.



$f(t) = \csc t$

FIGURA 7.66

Debido a que la secante y la cosecante son recíprocos del seno y coseno, respectivamente, se tiene el teorema siguiente, correspondiente al Teorema 1 de la Sección 7.3.

TEOREMA 4

El periodo P de una función periódica definida por

$$f(t) = \sec bt \quad \text{o} \quad f(t) = \csc bt$$

donde $b \neq 0$, está dado por

$$P = \frac{2\pi}{|b|}$$

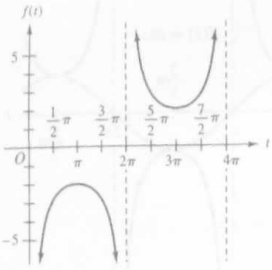
▶ EJEMPLO 4 *Dibujo de la gráfica de una función cosecante*

Dibuje la gráfica de

$$f(t) = -2 \csc \tfrac{1}{2}t$$

en un intervalo cuya longitud es el periodo. Verifique la gráfica en la graficadora.

Solución Del Teorema 4, con $b = \frac{1}{2}$, el periodo de f es $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Así, se obtendrá la gráfica en el intervalo $[0, 4\pi]$.



$f(t) = -2 \csc \frac{1}{2}t$

FIGURA 7.67

A fin de encontrar las asíntotas verticales, se determinará donde csc $\frac{1}{2}t$ no está definido. Para esto, sea $\frac{1}{2}t = k\pi$, donde $k \in Z$. En el intervalo $[0, 4\pi]$, las asíntotas son

$$\begin{array}{lllll} & \frac{1}{2}t = 0 & \frac{1}{2}t = \pi & \frac{1}{2}t = 2\pi & \\ \Leftrightarrow & t = 0 & t = 2\pi & t = 4\pi & \end{array}$$

Como $|\csc \frac{1}{2}t| \geq 1$, $f(t) \leq -2$ o $f(t) \geq 2$. Además, $f(t) = -2$ cuando $\csc \frac{1}{2}t = 1$, esto es, cuando

$$\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow t = \pi$$

Y $f(t) = 2$ cuando $\csc \frac{1}{2}t = -1$, esto es, cuando

$$\frac{1}{2}t = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow t = 3\pi$$

Con la información precedente y la localización de algunos puntos, se tiene la gráfica requerida, la cual se muestra en la Figura 7.67. En la graficadora se obtiene la misma gráfica.

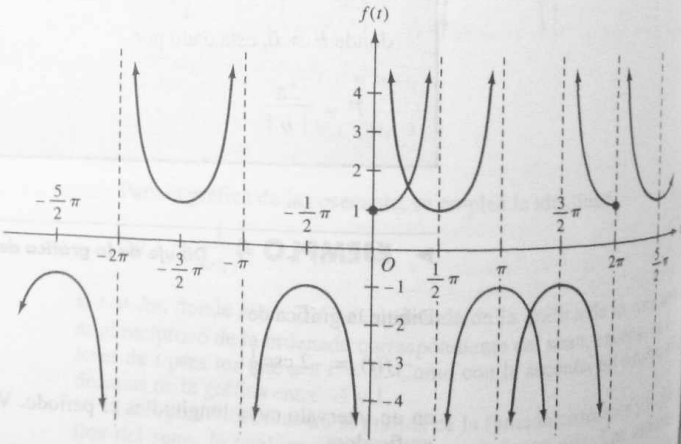
▶ EJEMPLO 5 *Dibujo de la gráfica de una función secante*

Dibuje la gráfica de

$$f(t) = \sec(t - \tfrac{1}{2}\pi)$$

Compruebe la gráfica en la graficadora.

Solución La gráfica de la función dada puede obtenerse a partir de la gráfica de la función $g(t) = \sec t$, mediante una traslación horizontal de $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la derecha, la gráfica requerida aparece en la Figura 7.68, la cual incluye la gráfica de $g(t) = \sec t$ en el intervalo



$f(t) = \sec\left(t - \frac{1}{2}\pi\right)$

FIGURA 7.68

[0, 2π] representada con la curva gris. La graficadora muestra la misma gráfica. ◀

Como se hizo con las curvas del seno y del coseno en la Sección 7.3, se pueden utilizar las curvas tangente, cotangente, secante y cosecante trazadas en una graficadora para aproximar valores particulares de estas funciones trigonométricas. También pueden emplearse las curvas para aproximar valores de t si una de estas funciones trigonométricas de t se proporciona. *Véase* los ejercicios 21 a 24.

EJERCICIOS 7.7

En los ejercicios 1 a 8, utilice la periodicidad de las funciones tangente y cotangente así como los valores de tan t *y* cot t *cuando* $0 \le t < \pi$, *para encontrar los valores de la función.*

1. (a) $\tan \frac{7}{4}\pi$ (b) $\cot \frac{7}{4}\pi$ (c) $\tan(-\frac{1}{4}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{1}{4}\pi)$

2. (a) $\tan \frac{4}{3}\pi$ (b) $\cot \frac{4}{3}\pi$ (c) $\tan(-\frac{2}{3}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{2}{3}\pi)$

3. (a) $\tan \frac{7}{6}\pi$ (b) $\cot \frac{7}{6}\pi$ (c) $\tan(-\frac{5}{6}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{5}{6}\pi)$

4. (a) $\tan \frac{11}{6}\pi$ (b) $\cot \frac{11}{6}\pi$ (c) $\tan(-\frac{1}{6}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{1}{6}\pi)$

5. (a) $\tan \frac{11}{3}\pi$ (b) $\cot \frac{11}{3}\pi$ (c) $\tan(-\frac{7}{3}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{7}{3}\pi)$

6. (a) $\tan \frac{13}{4}\pi$ (b) $\cot \frac{13}{4}\pi$ (c) $\tan(-\frac{11}{4}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{11}{4}\pi)$

7. (a) $\tan 5\pi$ (b) $\cot 6\pi$ (c) $\tan(-\frac{11}{2}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{9}{2}\pi)$

8. (a) $\tan \frac{11}{2}\pi$ (b) $\cot \frac{9}{2}\pi$ (c) $\tan(-5\pi)$ (d) $\cot(-6\pi)$

En los ejercicios 9 a 14, emplee la periodicidad de las funciones secante y cosecante así como los valores de sec t *y* csc t *cuando* $0 \le t < 2\pi$, *para encontrar los valores de la función.*

9. (a) $\sec \frac{9}{4}\pi$ (b) $\csc \frac{9}{4}\pi$ (c) $\sec \frac{10}{3}\pi$ (d) $\csc \frac{10}{3}\pi$

10. (a) $\sec \frac{17}{6}\pi$ (b) $\csc \frac{17}{6}\pi$ (c) $\sec \frac{15}{4}\pi$ (d) $\csc \frac{15}{4}\pi$

11. (a) $\sec(-\frac{1}{6}\pi)$ (b) $\csc(-\frac{1}{6}\pi)$ (c) $\sec(-\frac{5}{4}\pi)$ (d) $\csc(-\frac{5}{4}\pi)$

12. (a) $\sec(-\frac{2}{3}\pi)$ (b) $\csc(-\frac{2}{3}\pi)$ (c) $\sec(-\frac{11}{6}\pi)$ (d) $\csc(-\frac{11}{6}\pi)$

13. (a) $\sec 7\pi$ (b) $\csc 9\pi$ (c) $\sec(-\frac{11}{2}\pi)$ (d) $\csc(-\frac{9}{2}\pi)$

14. (a) $\sec \frac{11}{2}\pi$ (b) $\csc \frac{9}{2}\pi$ (c) $\sec(-7\pi)$ (d) $\csc(-9\pi)$

En los ejercicios 15 a 20, determine el periodo de la función.

15. (a) $2 \tan 3t$ (b) $\cot 6t$ (c) $\tan \frac{1}{5}t$ (d) $\frac{1}{3}\cot \frac{1}{4}t$

16. (a) $3 \cot 5t$ (b) $\tan 4t$ (c) $\tan \frac{2}{3}t$ (d) $5 \cot \frac{1}{6}t$

17. (a) $4 \sec 7t$ (b) $\csc \frac{4}{7}t$ (c) $\frac{1}{4}\tan 7t$ (d) $\cot \frac{7}{4}t$

18. (a) $3 \csc 8t$ (b) $\sec \frac{3}{8}t$ (c) $\frac{1}{3}\tan 8t$ (d) $3 \cot \frac{1}{8}t$

19. (a) $\sec 5\pi t$ (b) $\frac{1}{3}\csc \frac{1}{2}\pi t$ (c) $\tan 5\pi t$ (d) $\cot \frac{3}{4}\pi t$

20. (a) $3 \sec 4\pi t$ (b) $\csc \frac{3}{2}\pi t$ (c) $\tan \frac{5}{4}\pi t$ (d) $\cot 10\pi t$

En los ejercicios 21 y 22, utilice la gráfica de la función dada, trazada en la graficadora, a fin de aproximar el valor de la función a tres dígitos significativos. Después verifique la aproximación al calcular el valor de la función mediante la tecla o teclas apropiadas de la calculadora.

21. (a) tan 0.894 (b) cot 2.53 (c) tan 5.67 (d) cot(−1.98) (e) sec 1.84 (f) csc(−4.65)

22. (a) tan 1.35 (b) cot 4.06 (c) tan(−2.29) (d) cot 0.374 (e) sec(−3.07) (f) csc 6.16

En los ejercicios 23 y 24, utilice la gráfica de la función dada, trazada en la graficadora, a fin de aproximar los valores de t con tres dígitos significativos, tales que $0 \le t < 2\pi$ para los cuales la ecuación se satisface.

23. (a) $\tan t = 0.775$ (b) $\cot t = -0.775$
(c) $\tan t = -3.60$ (d) $\cot t = 4.07$
(e) $\sec t = -12.4$ (f) $\csc t = 2.79$

24. (a) $\tan t = -1.67$ (b) $\cot t = 1.67$
(c) $\tan t = 0.690$ (d) $\cot t = -0.484$
(e) $\sec t = 1.39$ (f) $\csc t = -3.92$

En los ejercicios 25 a 40, (a) dibuje la gráfica de la función donde t es cualquier número del intervalo indicado en el que la función se define. (b) Escriba las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica en el intervalo. (c) Verifique la gráfica en la graficadora.

25. $f(t) = 2 \tan t$; $[0, 2\pi]$
26. $f(t) = 3 \cot t$; $(0, 2\pi)$
27. $f(t) = \cot 2t$; $(0, \pi)$
28. $f(t) = \tan 3t$; $[0, \pi]$
29. $f(t) = \tan \frac{1}{2}t$; $[-2\pi, 2\pi]$
30. $f(t) = \frac{1}{2} \cot 4t$; $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
31. $f(t) = -2 \cot 3t$; $(0, \pi)$
32. $f(t) = -3 \tan \frac{1}{3}t$; $[0, 3\pi]$
33. $f(t) = 3 \sec t$; $[0, 2\pi]$
34. $f(t) = 2 \csc t$; $(0, 2\pi)$
35. $f(t) = \csc 3t$; $(0, 2\pi)$
36. $f(t) = \sec 2t$; $[-\pi, \pi]$
37. $f(t) = \frac{1}{2} \cot \pi t$; $(0, 2)$
38. $f(t) = \tan \frac{1}{2}\pi t$; $[0, 4]$
39. $f(t) = 2 \sec \frac{1}{2}\pi t$; $[0, 2]$
40. $f(t) = 3 \csc \frac{1}{3}\pi t$; $(-3, 3)$

En los ejercicios 41 a 48, dibuje la gráfica de la función en el intervalo cuya longitud es el periodo. Compruebe la gráfica en la graficadora.

41. $f(t) = 3 \tan 2t$
42. $f(t) = 2 \cot 3t$
43. $f(t) = 2 \cot \frac{1}{2}t$
44. $f(t) = -\tan \frac{1}{3}t$
45. $f(t) = -\sec 4t$
46. $f(t) = 3 \csc \frac{1}{3}t$
47. $f(t) = \frac{1}{2} \tan \frac{1}{4}\pi t$
48. $f(t) = \frac{1}{2} \sec 3\pi t$

En los ejercicios 49 a 58, dibuje la gráfica de la función. Verifique la gráfica en la graficadora.

49. $f(t) = \tan(t + \frac{1}{4}\pi)$
50. $f(t) = \tan(t - \frac{1}{4}\pi)$
51. $f(t) = \cot(t - \frac{1}{6}\pi)$
52. $f(t) = \cot(t + \frac{1}{3}\pi)$
53. $f(t) = 2 \sec(t - \pi)$
54. $f(t) = \frac{1}{2} \csc(t - \frac{1}{2}\pi)$
55. $f(t) = \frac{1}{3} \csc(t + \frac{1}{2}\pi)$
56. $f(t) = 3 \sec(t + \frac{1}{6}\pi)$
57. $f(t) = \frac{1}{4} \tan(\frac{1}{4}\pi - t)$
58. $f(t) = 2 \cot(\frac{1}{2}\pi - t)$

59. El ejemplo 3 implicó la gráfica de una función definida por una ecuación de la forma $f(t) = a \cos bt$. Si g es la función definida por $g(t) = \cot bt$, ¿cómo podría obtenerse la gráfica de f a partir de la de g? ¿Tiene la gráfica de f una amplitud? Explique.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 7

▸ VISIÓN RETROSPECTIVA

7.1 Se inició el estudio de la trigonometría con funciones trigonométricas de números reales debido a que ellas son esenciales para el Cálculo. La discusión de conceptos geométricos implicó a la circunferencia unitaria y a la recta numérica real, "enrollada alrededor" de esta circunferencia, considerados como fundamentos para las definiciones del seno y del coseno, de un número real como coordenadas del punto terminal de un arco de longitud t de la circunferencia unitaria. Se utilizaron estas definiciones para calcular valores exactos de las funciones seno y coseno de múlti-

ros cuadra
identidad
el seno o
uno de est

7.2 Después d
seno y cos
periodicida
estas funci
propiedad
lores de fu
de la func
bién se res
nes periódi

7.3 La periodi
en la obten
coseno y o
se dibujan
cómo utili
dora para a
y coseno,
tienen asoc

7.4 Las aplicac
fenómenos
ron el movi
suspendido
corriente al
cuito eléctri
das por soni

7.5 El movimie
mediante ur

▸ EJERCICI

*En los ejercicios 1
función. No emple*

1. (a) $\cos 0$
(d) $\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi$
2. (a) $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi$
(d) $\tan \frac{1}{4}\pi$
3. (a) $\operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi$
(d) $\cot \frac{2}{6}\pi$

nos cuadrantales y $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ y $\frac{1}{3}\pi$. Se introdujo la identidad pitagórica fundamental para determinar el seno o coseno de un número cuando se conoce uno de estos números.

Después de calcular los valores de las funciones seno y coseno en una calculadora, se demostró la periodicidad del seno y coseno al comprobar que estas funciones tienen periodo 2π. Se empleó esta propiedad de periodicidad para determinar los valores de función de otros números a partir del valor de la función de un número determinado. También se resolvieron problemas que tienen funciones periódicas como modelos matemáticos.

La periodicidad desempeñó un papel importante en la obtención de gráficas de las funciones seno, coseno y otras ondas senoidales. Se mostró cómo se dibujan estas gráficas. También se mostró cómo utilizar las gráficas trazadas en la graficadora para aproximar valores de las funciones seno y coseno, así como para aproximar números que tienen asociados valores dados de estas funciones.

Las aplicaciones de las funciones seno y coseno a fenómenos periódicos presentados aquí, incluyeron el movimiento armónico simple de un cuerpo suspendido de un resorte que vibra verticalmente, corriente alterna y fuerza electromotriz en un circuito eléctrico, así como ondas sonoras producidas por sonidos simples.

El movimiento armónico amortiguado se ilustró mediante un modelo matemático que implica el producto de una función senoidal y una función exponencial de t, cuyos valores se aproximan a cero conforme t se incrementa sin límite. Se ilustró la resonancia mediante un modelo matemático que implica el producto de una función cosenoidal y una función exponencial de t, cuyos valores crecen sin límite conforme t se incrementa sin límite. Se dio un ejemplo donde se dibujó la gráfica de la función, importante en Cálculo, definida por $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$, que se aproxima a 1 conforme t se acerca a cero.

7.6 Se definieron las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante como cocientes de las funciones seno y coseno, después se calcularon los valores exactos de estas funciones para números cuadrantales y $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ y $\frac{1}{3}\pi$. También se discutieron los signos de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes. Luego, se presentaron las otras siete identidades trigonométricas fundamentales, y se les aplicó para escribir una expresión trigonométrica en términos de las funciones seno y coseno, y para encontrar cinco funciones trigonométricas de un número cuando se conoce la sexta función de tal número.

7.7 Se utilizó la periodicidad de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante para determinar valores particulares de estas funciones. Después, justo como se hizo en la Sección 7.3 con las funciones seno y coseno, se aplicó la periodicidad de las otras cuatro funciones trigonométricas para obtener sus gráficas.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 4, determine el valor exacto de la expresión. No emplee la calculadora.

1. (a) $\cos 0$ (b) $\tan \pi$ (c) $\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi$
   (d) $\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi$ (e) $\cos \frac{2}{3}\pi$ (f) $\tan \frac{3}{4}\pi$
2. (a) $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi$ (b) $\cos \pi$ (c) $\cot \frac{3}{2}\pi$
   (d) $\tan \frac{1}{4}\pi$ (e) $\operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi$ (f) $\cos \frac{4}{3}\pi$
3. (a) $\operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi$ (b) $\cos \frac{3}{4}\pi$ (c) $\tan \frac{1}{3}\pi$
   (d) $\cot \frac{7}{6}\pi$ (e) $\sec(-\frac{1}{3}\pi)$ (f) $\csc(-\frac{5}{6}\pi)$
4. (a) $\operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi$ (b) $\cos \frac{5}{4}\pi$ (c) $\tan \frac{5}{6}\pi$
   (d) $\cot(-\frac{2}{3}\pi)$ (e) $\sec(-\frac{7}{6}\pi)$ (f) $\csc(-\frac{5}{4}\pi)$

En los ejercicios 5 a 14, se proporcionan sen t, cos t, tan t, cot t, sec t *o* csc t. *Determine los valores exactos de las otras cinco funciones sin utilizar la calculadora.*

5. $\operatorname{sen} t = \frac{5}{13}$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$
6. $\cos t = -\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$
7. $\tan t = -\frac{15}{8}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$

8. $\cot t = \frac{5}{12}$ y $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$

9. $\sec t = -\frac{5}{4}$ y $-\pi < t < -\frac{1}{2}\pi$

10. $\csc t = -\frac{17}{15}$ y $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$

11. $\cos t = \frac{12}{13}$ y $\operatorname{sen} t < 0$

12. $\tan t = \frac{4}{3}$ y $\cos t > 0$

13. $\csc t = -\frac{17}{8}$ y $\tan t > 0$

14. $\operatorname{sen} t = -\frac{5}{13}$ y $\cot t < 0$

En los ejercicios 15 a 20, escriba la expresión (a) en términos de sen *t, y la (b) en términos de* cos *t.*

15. (a) $\tan t \csc t$ (b) $\cot t \csc t$

16. (a) $\cot t \sec t$ (b) $\tan t \sec t$

17. (a) $\dfrac{1 - \tan^2 t}{\cot^2 t}$ (b) $\dfrac{1 - \sec^2 t}{1 + \cot^2 t}$

18. (a) $\dfrac{1 - \csc^2 t}{1 + \tan^2 t}$ (b) $\dfrac{1 - \cot^2 t}{\tan^2 t}$

19. (a) $\dfrac{\cos t}{\sec t - \tan t}$ (b) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} t} + \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} t}$

20. (a) $\dfrac{1}{1 + \cos t} + \dfrac{1}{1 - \cos t}$ (b) $\dfrac{\operatorname{sen} t}{\csc t - \cot t}$

En los ejercicios 21 a 26, utilice una calculadora para evaluar con cuatro dígitos significativos el valor de la función.

21. (a) sen 2.42 (b) cos 2.42 (c) tan 3.57
(d) sec 3.57 (e) cot 5.38 (f) csc 5.38

22. (a) sen 4.26 (b) cos 4.26 (c) tan 5.84
(d) sec 5.84 (e) cot 1.97 (f) csc 1.97

23. (a) cos 18.31 (b) sen(−14.86) (c) tan 56.00

24. (a) cos(−11.43) (b) sen 33.00 (c) tan(−10.53)

25. (a) cos 3.49 (b) sec 3.49 (c) $\tan \frac{12}{5}\pi$
(d) $\cot(-\frac{8}{3}\pi)$

26. (a) $\operatorname{sen} \frac{7}{8}\pi$ (b) $\csc \frac{7}{8}\pi$ (c) cos(−7.32)
(d) tan 12.28

En los ejercicios 27 a 30, determine el periodo de la función.

27. (a) sen 5*t* (b) $\cos \frac{1}{5}t$
(c) $3 \tan \frac{5}{4}t$ (d) $5 \sec \frac{3}{4}t$

28. (a) sen 4*t* (b) $\operatorname{sen} \frac{1}{4}t$
(c) $7 \cot \frac{2}{3}t$ (d) $2 \csc \frac{7}{3}t$

29. (a) $2 \cos 6\pi t$ (b) $\operatorname{sen} \frac{3}{5}\pi t$
(c) $5 \tan 2\pi t$ (d) $\frac{1}{2}\cot \frac{1}{3}\pi t$

30. (a) $4 \operatorname{sen} 5\pi t$ (b) $\frac{2}{3}\cos \frac{3}{2}\pi t$
(c) $\frac{1}{4}\tan \pi t$ (d) $3 \cot \frac{3}{4}\pi t$

En los ejercicios 31 y 32, emplee la periodicidad de las funciones seno, coseno, secante y cosecante, así como los valores sen *t*, cos *t*, sec *t* y csc *t, cuando* $0 \le t < 2\pi$, *a fin de determinar el valor de la función.*

31. (a) $\operatorname{sen} \frac{21}{4}\pi$ (b) $\cos \frac{14}{3}\pi$
(c) $\sec(-\frac{11}{6}\pi)$ (d) sen(−5π)
(e) $\cos \frac{11}{2}\pi$ (f) $\csc \frac{13}{2}\pi$

32. (a) $\operatorname{sen} \frac{8}{3}\pi$ (b) $\cos \frac{13}{6}\pi$
(c) $\csc(-\frac{17}{4}\pi)$ (d) sen 7π
(e) $\cos(-\frac{9}{2}\pi)$ (f) sec(−4π)

En los ejercicios 33 y 34, utilice la periodicidad de las funciones tangente y cotangente así como los valores de tan *t y* cot *t, cuando* $0 \le t < \pi$, *a fin de determinar el valor de la función.*

33. (a) $\tan \frac{5}{4}\pi$ (b) $\cot \frac{5}{3}\pi$
(c) $\tan(-\frac{1}{2}\pi)$ (d) $\tan \frac{14}{3}\pi$
(e) $\cot(-\frac{11}{6}\pi)$ (f) cot(−6π)

34. (a) $\tan \frac{13}{6}\pi$ (b) $\cot(-\frac{1}{4}\pi)$
(c) cot(−π) (d) $\tan(-\frac{4}{3}\pi)$
(e) $\cot \frac{17}{4}\pi$ (f) $\tan(-\frac{7}{2}\pi)$

En los ejercicios 35 a 38, emplee la gráfica de la función dada, trazada en la graficadora, a fin de aproximar el valor de la función con tres dígitos significativos. Después verifique la aproximación calculando el valor de la función mediante la tecla o teclas apropiadas de la calculadora.

35. (a) sen 1.27 (b) cos(−0.703)

36. (a) sen(−0.384) (b) cos 2.39

37. (a) tan 1.65 (b) cot 4.11

38. (a) sec 0.602 (b) csc 4.85

En los ejercicios 39 a 42, emplee la gráfica de la función dada, trazada en la graficadora, a fin de aproxi-

... valores de t, con tres dígitos significativos, ta... que $0 \le t < 2\pi$, para los cuales se satisface la ...

... (a) $\operatorname{sen} t = 0.542$ (b) $\cos t = -0.287$

... (a) $\operatorname{sen} t = -0.964$ (b) $\cos t = 0.750$

... (a) $\tan t = 8.99$ (b) $\csc t = -1.03$

... (a) $\tan t = -0.389$ (b) $\sec t = 5.56$

... Un cuerpo suspendido de un resorte está vibrando verticalmente, y $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos con el sentido positivo hacia arriba. Si $f(t) = 2 \operatorname{sen} 3t$, **(a)** determine el periodo de f. (b) Dibuje la gráfica de f y compruébela en la graficadora. Utilice la gráfica de la graficadora para estimar la posición del cuerpo a los (c) 0 s; (d) 1 s; (e) 2 s y (f) 6 s. Verifique las estimaciones calculando $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(6)$.

... Haga el ejercicio 43 considerando $f(t) = 3 \cos 4t$.

... ejercicios 45 a 68, dibuje la gráfica de la fun... Compruebe la gráfica en la graficadora.

... $= \cos 2t$

46. $f(t) = \operatorname{sen} 3t$

... $= 2 \cos t$

48. $g(t) = 3 \operatorname{sen} t$

... $= \operatorname{sen} 2\pi t$

50. $f(t) = \cos \frac{1}{2}\pi t$

... $= 2 \operatorname{sen} \pi t$

52. $g(t) = \frac{1}{2} \cos \pi t$

... $= \operatorname{sen}(t - \frac{1}{2}\pi t)$

54. $f(t) = \cos(t - \pi)$

... $= \cos(t + \frac{1}{3}\pi)$

56. $g(t) = \operatorname{sen}(t + \frac{1}{6}\pi)$

... $= \tan 2t$

58. $f(t) = \cot \frac{1}{2} t$

... $= \frac{1}{2} \cot t$

60. $g(t) = 2 \tan t$

... $= \tan 3\pi t$

62. $f(t) = \cot 2\pi t$

... $= 3 \csc t$

64. $f(t) = 2 \sec t$

... $= 2 \sec \frac{1}{3}\pi t$

66. $g(t) = 3 \csc \frac{1}{2}\pi t$

... $= \cot(t + \frac{1}{3}\pi)$

68. $f(t) = \frac{1}{2} \tan(t - \frac{1}{4}\pi)$

... ejercicios 69 y 70, la función f es un modelo ma... que describe movimiento armónico amorti... En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) ... que $F(t) \le f(t) \le G(t)$. (b) Trace las gráficas ... tres funciones en el rectángulo de inspección de ... por [−1, 1]. (c) Determine algebraicamente los ... de t en todos los puntos de intersección de la gráfica de f con las gráficas de F y G. ¿Cuáles de estos valores están en el intervalo [0, 2π]? (d) Determine algebraicamente todas las intercepciones t de la gráfica de f. ¿Cuáles de estas intercepciones están en el intervalo [0, 2π]?

69. $f(t) = e^{-t/4} \operatorname{sen} 6t$; $F(t) = -e^{-t/4}$; $G(t) = e^{-t/4}$

70. $f(t) = 2^{-t/8} \cos 3t$; $F(t) = -2^{-t/8}$; $G(t) = 2^{-t/8}$

En los ejercicios 71 y 72, la función f es un modelo matemático que describe resonancia. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) Muestre que $F(t) \le f(t) \le G(t)$. (b) Trace las gráficas de las tres funciones en el rectángulo de inspección de [0, π] por [−10, 10]. (c) Determine algebraicamente los valores de t en todos los puntos de intersección de la gráfica de f con las gráficas de F y G. ¿Cuáles de estos valores están en el intervalo [0, π]? (d) Determine algebraicamente todas las intercepciones t de la gráfica de f. ¿Cuáles de estas intercepciones están en el intervalo [0, π]?

71. $f(t) = 3^{t/2} \cos 4t$; $F(t) = -3^{t/2}$; $G(t) = 3^{t/2}$

72. $f(t) = e^{t/2} \operatorname{sen} 6t$; $F(t) = -e^{t/2}$; $G(t) = e^{t/2}$

73. Un cuerpo suspendido de un resorte se pone en movimiento vibratorio al tirar del mismo hacia abajo 6 cm desde su posición central y liberándolo después. El cuerpo tarda 11.8 s en completar una vibración. **(a)** Escriba una ecuación que defina $f(t)$, donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central t segundos después de iniciarse el movimiento y el sentido positivo es hacia arriba. **(b)** Trace la gráfica de f para estimar la posición del cuerpo cuando ha estado en movimiento: **(c)** 1 s y **(d)** 4 s. Compruebe las estimaciones de (c) y (d) calculando $f(1)$ y $f(4)$, respectivamente.

74. Un cuerpo suspendido de un resorte está vibrando verticalmente. Suponga que el cuerpo pasa por su posición central a los 4 s y 8 s. Entre estos tiempos el cuerpo alcanza un desplazamiento máximo de 12 cm abajo de su posición central. El movimiento es armónico simple y está descrito por una ecuación de la forma $f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$ donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. Determine esta ecuación y trace la gráfica de f.

75. En un circuito eléctrico la fuerza electromotriz es $E(t)$ volts a los t segundos, donde $E(t) = 4 \cos 100\pi t$. (a) Trace la gráfica de E para $0.01 \leq t \leq 0.08$. Determine (b) la fuerza electromotriz máxima; (c) el periodo de E y (d) la frecuencia del movimiento. Determine la fuerza electromotriz a los (e) 0.01 s, (f) 0.02 s, (g) 0.05 s y (h) 0.08 s.

76. Realice el ejercicio anterior considerando $E(t) = 6 \operatorname{sen} 50\pi t$.

77. Una onda producida por un sonido simple está descrita por la ecuación $F(t) = 0.04 \operatorname{sen} 1\,000t$ donde $F(t)$, dinas por centímetro cuadrado, es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los t segundos. (a) Trace la gráfica de F para $0.001 \leq t \leq 0.05$. Determine (b) la amplitud de la presión y (c) la frecuencia. Calcule la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los (d) 0.001 s, (e) 0.01 s, (f) 0.02 s y (g) 0.05 s.

78. Resuelva el ejercicio precedente considerando $F(t) = 0.008 \operatorname{sen} 600t$.

79. Una corriente alterna de 30 ciclos está descrita por una ecuación de la forma $I(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$, donde $I(t)$ amperes es la corriente a los t segundos. La corriente máxima es de 40 ampere, y a los 0.2 s es de 20 ampere. Escriba la ecuación y trace la gráfica de I.

80. En cierto circuito eléctrico la fuerza electromotriz a los t segundos es $E(t)$ volts, donde $E(t) = 200 \operatorname{sen} 120\pi t$, y la corriente es $I(t)$ amperes, donde $I(t) = 50 \operatorname{sen} 120\pi\,(t - \frac{1}{180})$. Dibuje las gráficas de E e I en el mismo sistema de ejes coordenados. Compruebe las gráficas en la graficadora trazándolas en el mismo rectángulo de inspección. ¿La corriente se atrasa o adelanta con respecto a la fuerza electromotriz y por cuánto?

En los ejercicios 81 y 82, utilice el polinomio de Taylor (2) o (3) de la Sección 7.2 para encontrar el valor de la función con cuatro dígitos significativos.

81. (a) $\operatorname{sen} 0.49$ (b) $\cos 2.63$

82. (a) $\operatorname{sen} 3.58$ (b) $\cos(-1.07)$

En los ejercicios 83 y 84, (a) trace la gráfica de la función para $t \in [-\frac{1}{4}\pi, 0) \cup (0, \frac{1}{4}\pi]$. (b) La función no está definida en cero, pero ¿a qué valor parece que se aproxima $f(t)$ cuando t se aproxima a cero? Determine los valores siguientes en una calculadora. (c) $f(0.1)$ y $f(-0.1)$; (d) $f(0.01)$ y $f(-0.01)$; (e) $f(0.001)$ y $f(-0.001)$. (f) ¿Están de acuerdo los valores de la función de los incisos (c) al (e) con la respuesta del inciso (b)?

83. $f(t) = \dfrac{t^2 + 3t}{\operatorname{sen} t}$ 84. $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} 6t}{\operatorname{sen} 3t}$

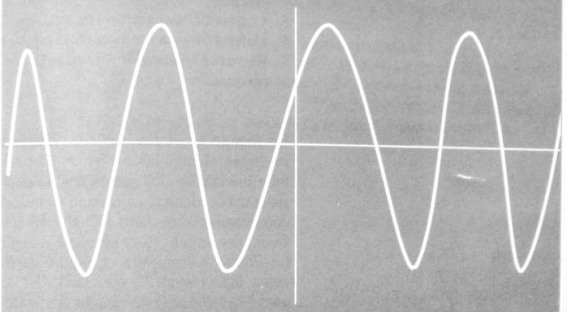
En los ejercicios 85 y 86, (a) trace la gráfica de la función para $t \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi]$. (b) La función no está definida en $\frac{1}{2}\pi$, pero ¿a qué valor parece aproximarse $f(t)$ cuando t se aproxima a $\frac{1}{2}\pi$? Determine los siguientes valores en una calculadora: (c) $f(1.56)$ y $f(1.58)$; (d) $f(1.569)$ y $f(1.571)$; (e) $f(1.5707)$ y $f(1.5709)$. (f) ¿Están de acuerdo los valores de la función de los incisos (c) al (e) con la respuesta del inciso (b)?

85. $f(t) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{\frac{1}{2}\pi - t}$ 86. $f(t) = \dfrac{\frac{1}{2}\pi - t}{\cos t}$

Capítulo

8

Funciones trigonométricas de ángulos



VISIÓN PRELIMINAR

En geometría se considera un ángulo como la unión de dos rayos, denominados lados, que tienen en común su origen llamado vértice. En la Sección 8.1 se define un ángulo como una rotación. Y en la siguiente sección se definen las funciones trigonométricas de modo que sus dominios están constituidos por medidas de ángulos. Se introducen estas funciones para resolver triángulos rectángulos por medidas de los oblicuángulos, estos últimos no contienen ángulos rectos. Este enfoque tradicional de la trigonometría permite su aplicación en muchos campos, entre ellos la topografía, la navegación, la astronomía y la física.

SUMARIO

8.1 Ángulos y su medición
8.2 Funciones trigonométricas de medidas angulares
8.3 Solución de triángulos rectángulos
8.4 Ley de los senos
8.5 Ley de los cosenos

8.1 ÁNGULOS Y SU MEDICIÓN

OBJETIVOS

1. **Definir radián.**
2. **Determinar la medida en radianes de un ángulo coterminal con un ángulo dado.**
3. **Aprender la fórmula para calcular la longitud de un arco de circunferencia.**
4. **Aprender la fórmula para calcular el área de un sector de un círculo.**
5. **Convertir una medida en radianes en una medida en grados.**
6. **Convertir una medida en grados en una medida en radianes.**
7. **Resolver enunciados de problemas que implican la longitud de un arco.**

Un **ángulo** en el plano puede obtenerse al rotar un rayo alrededor de su origen, denominado **vértice.** La posición original del rayo se llama **lado inicial.** Se dice que un ángulo está en la **posición estándar,** en un sistema coordenado cartesiano rectangular, si su vértice es el origen de coordenadas y su lado inicial está sobre el lado positivo del eje x. Cualquier ángulo es congruente a algún ángulo en posición estándar. La Figura 8.1 muestra el ángulo AOB en posición estándar con OA como lado inicial. El otro lado, OB, se denomina **lado terminal.** El ángulo AOB puede generarse mediante la rotación del lado OA hasta el lado OB, y bajo tal rotación el punto A se mueve al punto B sobre la circunferencia de centro O y radio $|\overline{OA}|$. El ángulo es **positivo** si OA se rota en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj hasta OB, y **negativo** si se rota en el mismo sentido del giro de las manecillas del reloj.

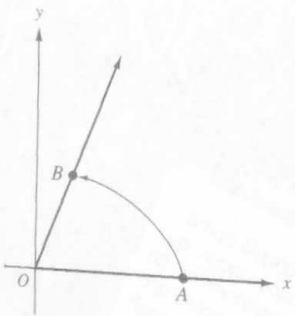


FIGURA 8.1

A menudo se emplean letras griegas para representar ángulos, y el sentido de la rotación se indica mediante un arco con una flecha en un extremo. La Figura 8.2 muestra un ángulo positivo α y un ángulo negativo β; la Figura 8.3 presenta un ángulo positivo γ y uno negativo θ.

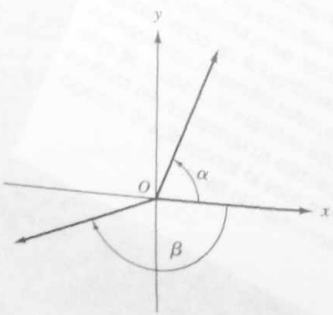


FIGURA 8.2

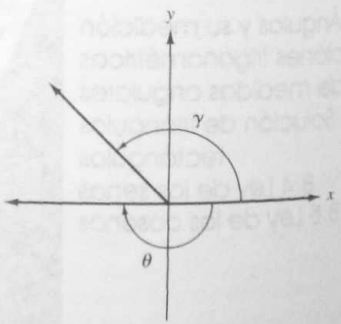


FIGURA 8.3

Se considera que un ángulo está en el cuadrante que contiene a su lado terminal. Sin embargo, si el lado terminal está sobre un eje, se dice que es un ángulo **cuadrantal.** En la Figura 8.2, α está en el primer cuadrante y β en el tercer cuadrante. En la Figura 8.3, γ está en el segundo cuadrante y θ es un ángulo cuadrantal.

Considere un ángulo θ en posición estándar y cuyo lado terminal corta a la circunferencia unitaria U en P, el punto terminal del arco de U de longitud t, medido desde el punto $(1, 0)$. *Véase* la Figura 8.4. Debido a que t es un número real, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto R de los números reales y todos los ángulos θ en posición estándar. La Figura 8.5 muestra los ángulos cuando t es igual a $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$ y $-\frac{3}{2}\pi$. El número t que corresponde al ángulo θ es una medida de la magnitud del ángulo. Además, cuando t es positivo, el ángulo θ tiene una rotación contraria al giro de las manecillas del reloj, y cuando t es negativo, la rotación del ángulo es en el sentido del giro de las manecillas del reloj. El ángulo para el cual $t = 1$ es la unidad de medición angular y se denomina *radián. Véase* la Figura 8. 6.

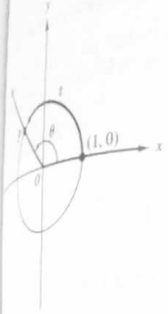


FIGURA 8.4

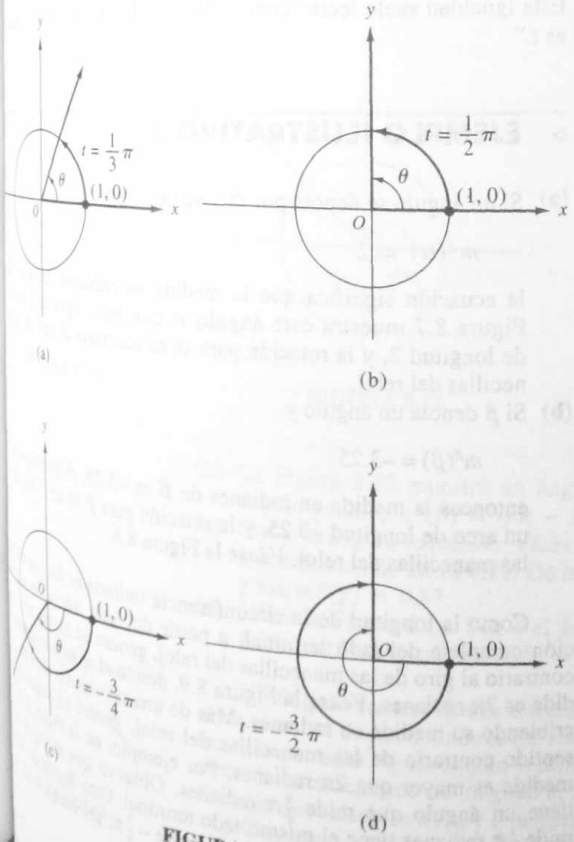


FIGURA 8.5

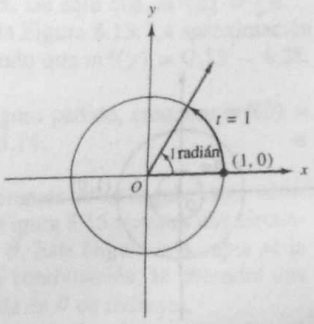
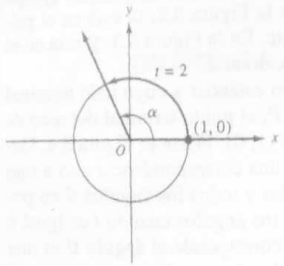


FIGURA 8.6



$m^R(\alpha) = 2$

FIGURA 8.7

DEFINICIÓN Radián

Si un ángulo tiene su vértice en el centro de la circunferencia unitaria U e intercepta sobre U un arco de longitud 1, tiene el valor de 1 **radián.**

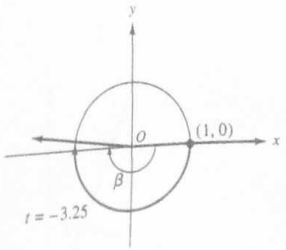
▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La medida en radianes de los ángulos de la Figura 8.5 son $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$ y $-\frac{3}{2}\pi$.

Si la medición de un ángulo θ es t radianes, se escribe

$$m^R(\theta) = t$$

Esta igualdad suele leerse como: "la medida en radianes del ángulo θ es t."



$m^R(\beta) = -3.25$

FIGURA 8.8

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) Si un ángulo se denota por α y se tiene que

$$m^R(\alpha) = 2$$

la ecuación significa que la medida en radianes de α es 2. La Figura 8.7 muestra este ángulo α que intercepta en U un arco de longitud 2, y la rotación para α es contraria al giro de las manecillas del reloj.

(b) Si β denota un ángulo y

$$m^R(\beta) = -3.25$$

entonces la medida en radianes de β es -3.25, β intercepta en U un arco de longitud -3.25, y la rotación para β es en el sentido de las manecillas del reloj. *Véase* la Figura 8.8.

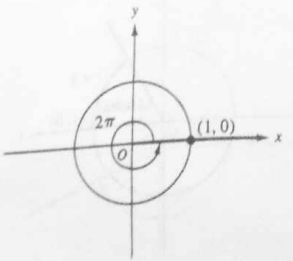


FIGURA 8.9

Como la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, una revolución completa del lado terminal, a partir del lado inicial, en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, genera un ángulo cuya medida es 2π radianes. *Véase* la Figura 8.9, donde el ángulo se indica escribiendo su medida en radianes. Más de una revolución completa, en sentido contrario de las manecillas del reloj, genera un ángulo cuya medida es mayor que 2π radianes. Por ejemplo, en la Figura 8.10 se tiene un ángulo que mide $\frac{9}{4}\pi$ radianes. Observe que el ángulo que mide $\frac{1}{4}\pi$ radianes tiene el mismo lado terminal. Otro ángulo que tiene el mismo lado terminal es aquel que mide $-\frac{7}{4}\pi$. De hecho, existe un

número ilimitado de ángulos que tienen este lado terminal. Estos ángulos se denominan *coterminales*.

En general, los ángulos **coterminales** son los ángulos en posición estándar que tienen el mismo lado terminal.

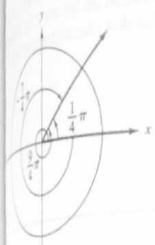


FIGURA 8.10

▸ EJEMPLO 1 *Encuentre la medida en radianes de un ángulo coterminal con un ángulo dado*

Encuentre la medida en radianes del menor ángulo positivo que sea coterminal con el ángulo que tiene su medida indicada en radianes y dibuje ambos ángulos: **(a)** $-\frac{2}{3}\pi$; **(b)** $\frac{11}{4}\pi$; **(c)** 7.15; **(d)** −0.54.

Solución

(a) En la Figura 8.11 se presenta un ángulo de $-\frac{2}{3}\pi$ radianes, el cual se indica por su medida. En la figura, el ángulo requerido se designa por α, y $m^R(\alpha) = 2\pi - \frac{2}{3}\pi$. Por tanto, $m^R(\alpha) = \frac{4}{3}\pi$.

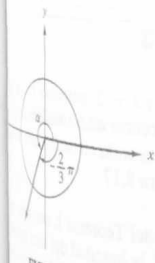


FIGURA 8.11

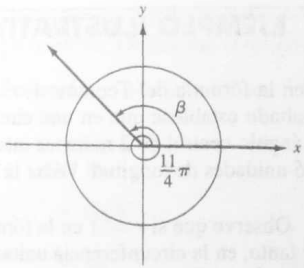


FIGURA 8.12

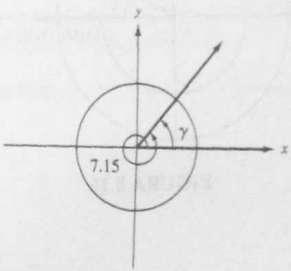


FIGURA 8.13

(b) La Figura 8.12 muestra un ángulo de $\frac{11}{4}\pi$ radianes. Si β es el ángulo pedido, $m^R(\beta) = \frac{11}{4}\pi - 2\pi$. De aquí que, $m^R(\beta) = \frac{3}{4}\pi$.

(c) Sea γ el ángulo requerido. *Véase* la Figura 8.13. La aproximación a centésimos de 2π es 6.28. De modo que $m^R(\gamma) = 7.15 - 6.28$, y así, $m^R(\gamma) = 0.87$.

(d) *Véase* la Figura 8.14. Sea δ el ángulo pedido, entonces $m^R(\delta) = 6.28 - 0.54$. Por tanto, $m^R(\delta) = 5.74$. ◂

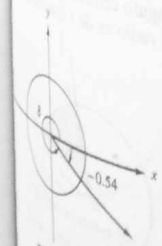


FIGURA 8.14

Un **ángulo central** de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia. La Figura 8.15 muestra una circunferencia de radio r y un ángulo central θ. Este ángulo intercepta en la circunferencia un arco de longitud s. A continuación, se obtendrá una fórmula que relaciona a r, s y t, la medida de θ en radianes.

Construya un sistema cartesiano rectangular de coordenadas tal que θ esté en la posición estándar. Suponga que $r > 1$, en consecuen-

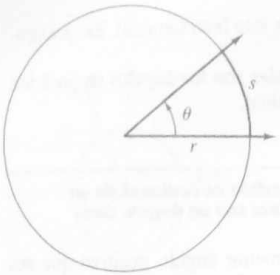


FIGURA 8.15

cia, la circunferencia unitaria U está dentro de la circunferencia de radio r. *Véase* la Figura 8.16. La longitud del arco interceptado por θ en U es t. De un teorema de geometría, la razón de los arcos de longitud s y t es igual a la razón de los radios de las dos circunferencias. Así

$$\frac{t}{s} = \frac{1}{r}$$

$$rt = s$$

Se ha probado el teorema siguiente.

TEOREMA 1

Si r es el radio de una circunferencia y t la medida en radianes de un ángulo central que intercepta en la circunferencia un arco de longitud s, entonces

$$s = rt$$

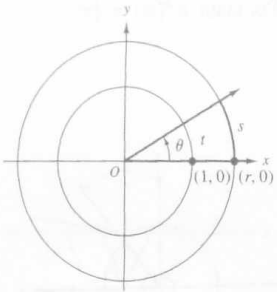


FIGURA 8.16

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Si en la fórmula del Teorema 1, $r = 3$ y $t = 2$, entonces $s = 6$. Este resultado establece que en una circunferencia de 3 unidades de radio un ángulo central de 2 radianes intercepta en la circunferencia un arco de 6 unidades de longitud. *Véase* la Figura 8.17.

Observe que si $r = 1$ en la fórmula del Teorema 1, entonces $s = t$. Por tanto, en la circunferencia unitaria U, la longitud del arco interceptado es la medida en radianes del ángulo central. También observe que si $t = 1$, la fórmula se convierte en $s = r$. Esta ecuación expresa que en una circunferencia un arco de longitud igual al radio subtiende un ángulo central de 1 radián. *Véase* la Figura 8.18.

Un **sector** de un círculo es la región limitada por un arco de la circunferencia del círculo y los lados del ángulo central subtendido por el arco. Para el círculo de la Figura 8.19, el radio es de r unidades, la me-

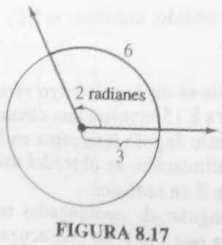


FIGURA 8.17

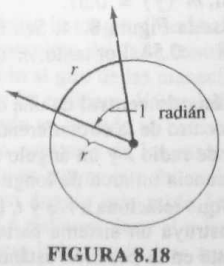


FIGURA 8.18

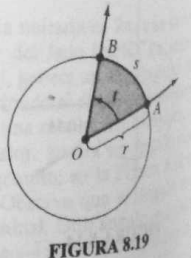


FIGURA 8.19

dida del ángulo central es t radianes, la longitud del arco interceptado es s unidades y la región sombreada es el sector AOB. De geometría, la razón del área del sector y el área del círculo (dada por πr^2) es igual a la razón de la longitud del arco interceptado y la longitud de la circunferencia del círculo (dada por $2\pi r$). Así, si K unidades cuadradas es el área del sector, entonces

$$\frac{K}{\pi r^2} = \frac{s}{2\pi r}$$

$$K = \tfrac{1}{2} rs$$

Si se sustituye s por rt (del Teorema 1), se obtiene

$$K = \tfrac{1}{2} r^2 t$$

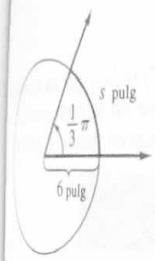


FIGURA 8.20

▸ **EJEMPLO 2** ***Determinación de la longitud de un arco y el área de un sector de un círculo***

Un círculo de 6 pulg de radio tiene un sector cuyo ángulo central mide $\frac{1}{3}\pi$ radianes. Determine la longitud del arco y el área del sector.

Solución *Véase* la Figura 8.20. Se tiene $r = 6$ y $t = \frac{1}{3}\pi$. Con estos valores

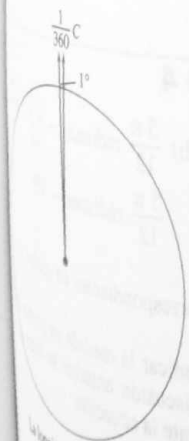
$$s = rt$$
$$= 6(\tfrac{1}{3}\pi)$$
$$= 2\pi$$

Así, la longitud del arco es 2π pulg.

Si K pulgadas cuadradas es el área del sector, entonces con los valores dados de r y t

$$K = \tfrac{1}{2} r^2 t$$
$$= \tfrac{1}{2}(6)^2(\tfrac{1}{3}\pi)$$
$$= 6\pi$$

Por tanto, el área del sector es 6π pulg^2. ◂



La longitud del arco es $\frac{1}{360}C$ donde C es la circunferencia del círculo
FIGURA 8.21

El *grado* es otra unidad de medición de ángulos. Si una circunferencia tiene un ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es $\frac{1}{360}$ de la longitud de la circunferencia, se dice que el ángulo **mide** 1 **grado.** Una medición de 1 grado se escribe 1°. *Véase* la Figura 8.21. Observe que la definición de grado es independiente del radio de la

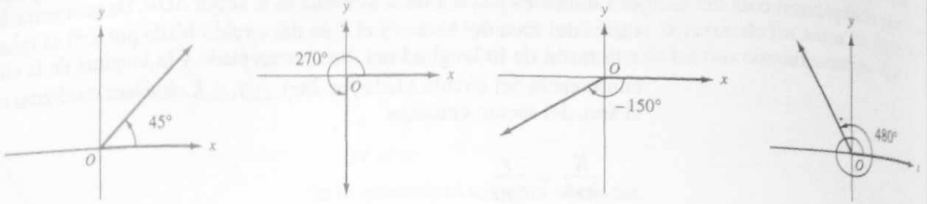


FIGURA 8.22

circunferencia. La Figura 8.22 muestra algunos ángulos en posición estándar y sus medidas correspondientes en grados.

Un ángulo formado por una revolución completa, de modo que el lado terminal coincida con el lado inicial, tiene una medida de 360° y de 2π radianes. De esto se deduce que

$$180° \sim \pi \text{ radianes}$$

donde el símbolo ~ (léase "corresponde a") indica que las medidas dadas son para ángulos congruentes. Se tiene así la correspondencia siguiente entre las medidas de un ángulo dadas en grados y radianes:

$$1° \sim \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ radián} \sim \frac{180°}{\pi}$$

Si 3.1416 se considera como una aproximación para π, se obtiene

$$1° \sim 0.017453 \text{ radianes} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ radián} \sim 57.296°$$

De esta correspondencia entre grados y radianes, la medida de un ángulo puede convertirse de un sistema de unidades en otro.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) $162° \sim 162 \cdot \dfrac{\pi}{180}$ radianes

$162° \sim \dfrac{9\pi}{10}$ radianes

(b) $\dfrac{5\pi}{12}$ radianes $\sim \dfrac{5\pi}{12} \cdot \dfrac{180°}{\pi}$

$\dfrac{5\pi}{12}$ radianes $\sim 75°$ ◁

La Tabla 1 muestra las medidas correspondientes en grados y radianes de algunos ángulos.

Tabla 1

Medida en grados	*Medida en radianes*
30	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{1}{4}\pi$
60	$\frac{1}{3}\pi$
90	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{3}{4}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

Se utiliza la notación $m°(\theta)$ para indicar la medida en grados del ángulo θ. Como consecuencia de la discusión anterior se tiene que $m°(\theta)$ y $m^R(\theta)$ están relacionados mediante la ecuación

$$m°(\theta) = \frac{180}{\pi} m^R(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad m^R(\theta) = \frac{\pi}{180} m°(\theta)$$

▸ EJEMPLO 3 *Conversión de una medida en radianes a una medida en grados*

Determine la medida en grados, con aproximación de centésimos de grado, para el ángulo que se indica en radianes (considere $\pi \approx 3.1416$):

(a) $m^R(\alpha) = \frac{5}{7}\pi$ (b) $m^R(\beta) = 0.3826$

Solución

(a) $m^\circ(\alpha) = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{7}$

≈ 128.57

(b) $m^\circ(\beta) = \frac{180}{\pi}(0.3826)$

≈ 21.92

Por tanto, el ángulo α mide 128.57° y el ángulo β mide 21.92°. ◂

En el ejemplo 3 se han empleado decimales para representar las partes fraccionarias (menores que un grado) en las medidas de los ángulos. Otra manera de representar tales medidas es empleando minutos y segundos. Un minuto es $\frac{1}{60}$ de un grado; es decir, 60 minutos equivalen a 1 grado. También un segundo es $\frac{1}{60}$ de un minuto; así, 60 s equivalen a un minuto. Obviamente, un segundo es $\frac{1}{3\,600}$ de un grado, y 3 600 s equivalen a un grado. El símbolo para minutos es $'$, y para los segundos $''$. De este modo, $26°14'46''$ indica una medida de 26 grados, 14 minutos y 46 segundos.

Se expresarán las partes fraccionarias (menores que un grado) por medio de decimales. Si se tiene una medida de un ángulo en minutos y segundos, se puede convertir fácilmente a una forma que utilice decimales. Por ejemplo, para la aproximación a centésimos de grado,

$$\begin{aligned} 26°14'46'' &= (26 + \tfrac{14}{60} + \tfrac{46}{3\,600})° \\ &= (26 + 0.233 + 0.013)° \\ &= 26.25° \end{aligned}$$

En ocasiones se escriben ecuaciones tales como

$$\theta = 45°$$

donde el símbolo para el ángulo, θ, es igualado a la medida del ángulo, 45°. Se entiende que tal ecuación indica que la medida en grados del ángulo es 45. También se escriben desigualdades tales como

$$0° \leq \theta < 360°$$

la cual indica que el intervalo que contiene a la medida en grados de θ es $[0, 360)$.

▸ EJEMPLO 4 *Solución de un enunciado de un problema que implica la longitud de un arco*

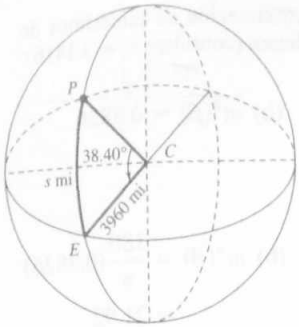


FIGURA 8.23

Determine la distancia, sobre la superficie de la Tierra, de un punto que tiene latitud 38.40° N al punto más cercano del Ecuador. Suponga que la Tierra es una esfera de 3 960 millas de radio.

Solución *Véase* la Figura 8.23, donde C es el centro de la Tierra, P es el punto dado y E el punto del Ecuador más cercano a P. Se desea determinar la longitud del arco de E a P de la circunferencia con centro C y radio igual a 3 960 millas. Sea s millas esta longitud. Del Teorema 1, $s = rt$, donde $r = 3\,960$ y t es la medida en radianes del ángulo ECP. Primero se calcula t convirtiendo 38.40° a radianes.

$$38.40° \sim 38.40\left(\frac{\pi}{180}\right)$$
$$\approx 0.6702$$

Así,

$$s = rt$$
$$= 3\,960(0.6702)$$
$$= 2\,654$$

Conclusión: La distancia requerida es 2 654 mi.

EJERCICIOS 8.1

En los ejercicios 1 a 6, muestre mediante un diagrama el ángulo que tiene la medida indicada en radianes.

1. (a) $\frac{1}{6}\pi$ (b) $\frac{2}{3}\pi$ (c) π (d) $\frac{5}{4}\pi$ (e) $\frac{11}{6}\pi$
2. (a) $\frac{1}{4}\pi$ (b) $\frac{5}{6}\pi$ (c) $\frac{4}{3}\pi$ (d) $\frac{3}{2}\pi$ (e) $\frac{7}{4}\pi$
3. (a) $-\frac{1}{4}\pi$ (b) $-\frac{1}{2}\pi$ (c) $-\frac{5}{6}\pi$ (d) $-\frac{5}{4}\pi$ (e) $-\frac{5}{3}\pi$
4. (a) $-\frac{1}{6}\pi$ (b) $-\frac{3}{4}\pi$ (c) $-\pi$ (d) $-\frac{4}{3}\pi$ (e) $-\frac{11}{6}\pi$
5. (a) 0.78 (b) 3 (c) −2 (d) 5.20 (e) −4.35
6. (a) 2.35 (b) −1 (c) 4 (d) −1.80 (e) −6.18

En los ejercicios 7 a 10, determine la medida en radianes del menor ángulo positivo que sea coterminal con el ángulo que tiene la medida indicada en radianes y dibuje ambos ángulos.

7. (a) $-\frac{3}{4}\pi$ (b) $\frac{19}{6}\pi$ (c) $\frac{7}{2}\pi$ (d) $-\frac{7}{3}\pi$
8. (a) $-\frac{7}{6}\pi$ (b) $\frac{8}{3}\pi$ (c) $\frac{11}{4}\pi$ (d) $-\frac{7}{2}\pi$
9. (a) 7.28 (b) 9 (c) −4.25 (d) −11
10. (a) 8.28 (b) −2.63 (c) −14 (d) 10

En los ejercicios 11 a 14, encuentre la medida equivalente en radianes del ángulo que tiene la medida indicada en grados.

11. (a) 60° (b) 135° (c) 210° (d) −150°
12. (a) 45° (b) 120° (c) 240° (d) −225°
13. (a) 20° (b) 450° (c) −75° (d) 100°
14. (a) 15° (b) 540° (c) −48° (d) 2°

En los ejercicios 15 a 18, halle la medida equivalente en grados del ángulo que tiene la medida indicada en radianes.

15. (a) $\frac{1}{4}\pi$ (b) $\frac{2}{3}\pi$ (c) $\frac{11}{6}\pi$ (d) $-\frac{1}{2}\pi$
16. (a) $\frac{1}{6}\pi$ (b) $\frac{4}{3}\pi$ (c) $\frac{3}{4}\pi$ (d) -5π
17. (a) $\frac{1}{2}$ (b) -2 (c) 4.78 (d) 0.23
18. (a) $\frac{1}{3}$ (b) 0.2 (c) -2.75 (d) 5.66

En los ejercicios 19 y 20, convierta la medida indicada del ángulo a una forma que utilice decimales con una aproximación de centésimos de grado y después determine la medida equivalente en radianes.

19. (a) 35°22′12″ (b) 102°31′27″
20. (a) 68°53′48″ (b) 251°8′14″

En los ejercicios 21 a 24, encuentre la medida en grados del menor ángulo positivo que sea coterminal con el ángulo que tiene la medida indicada en grados y dibuje ambos ángulos.

21. (a) −45° (b) 510°
(c) −540° (d) −120°

22. (a) −30° (b) 585°
(c) −240° (d) −630°

23. (a) 382.56° (b) −118.24°
(c) −253.85° (d) 302.36°

24. (a) 496.58° (b) −28.16°
(c) −342.15° (d) 197.74°

En los ejercicios 25 a 30, determine (a) la longitud del arco y (b) el área del sector del círculo que tiene el radio y la medida del ángulo central α indicados.

25. el radio es 9 pulg; $m^R(\alpha) = \frac{2}{3}\pi$
26. el radio es 8 cm; $m^R(\alpha) = \frac{1}{4}\pi$
27. el radio es 6 cm; $m^\circ(\alpha) = 135$
28. el radio es 12 pulg; $m^\circ(\alpha) = 120$
29. el radio es 4.72 pulg; $m^\circ(\alpha) = 22.14$
30. el radio es 8.53 cm; $m^\circ(\alpha) = 80.35$

En los ejercicios 31 a 33, suponga que el radio de la Tierra es 3 960 mi.

31. Un punto P sobre la superficie de la Tierra está 1 500 mi al norte del punto sobre el Ecuador más cercano. Encuentre la latitud del punto P en grados.

32. Una milla náutica (nmi) puede definirse como la distancia sobre la superficie de la Tierra desde un punto que tiene latitud 1′ N al punto más cercano sobre el Ecuador. Muestre que 1 nmi es aproximadamente 1.15 mi ordinarias.

33. Dos puntos A y B sobre la superficie de la Tierra se encuentran en la misma circunferencia, que corresponde a un meridiano, con centro en C, donde C es el centro de la Tierra. Si la latitud de A es 10° N y la de B es 4.6° S, halle la distancia entre A y B.

34. El extremo de un péndulo de 40 cm de longitud recorre un arco de 5 cm conforme oscila describiendo un ángulo α. Determine **(a)** $m^R(\alpha)$ y **(b)** $m^\circ(\alpha)$.

35. Un neumático tiene un diámetro de 36 pulg. ¿Cuántas revoluciones efectuará la rueda cuando el automóvil recorra una milla (5 280 pie)?

36. Si el minutero de un reloj mide 6 pulg, ¿qué distancia recorrerá su extremo en 18 min?

37. Si el horario de un reloj mide 4 pulg, ¿qué distancia recorrerá su extremo en 1 h y 20 min?

38. Una polea con diámetro de 36 cm gira con una banda que se desplaza a una velocidad de 5 m/s. ¿Cuántas revoluciones por segundo efectúa la polea?

39. Un *mil* es la medida de un ángulo central que intercepta en la circunferencia un arco de longitud igual a $\frac{1}{6\,400}$ de la longitud de la circunferencia. Determine el número de mils del ángulo α si **(a)** $m^\circ(\alpha) = 34.4$ y **(b)** $m^R(\alpha) = 2.3$.

40. Si la medida del ángulo α es 34 mils (*véase* el ejercicio 39), halle **(a)** $m^\circ(\alpha)$ y **(b)** $m^R(\alpha)$.

41. Las dos unidades más comunes para la medición de ángulos son radianes y grados. Defina estas unidades de medición y explique su relación.

8.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE MEDIDAS ANGULARES

OBJETIVOS

1. **Definir las seis funciones trigonométricas de ángulos.**
2. **Determinar valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos.**
3. **Determinar valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cuando se conoce el extremo de su lado terminal.**
4. **Aprender el teorema que expresa las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como razones de las longitudes de sus lados.**
5. **Aprender los valores exactos de las funciones trigonométricas de números cuadrantales.**
6. **Aprender los valores exactos de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.**
7. **Aproximar valores de las funciones trigonométricas de ángulos mediante una calculadora.**
8. **Definir un ángulo de referencia.**
9. **Expresar el valor de una función trigonométrica de cualquier ángulo θ en términos del valor de la función correspondiente del ángulo de referencia asociado con θ.**
10. **Determinar un valor exacto o aproximado de una función trigonométrica empleando un ángulo de referencia.**
11. **Determinar un ángulo cuando se conoce un valor de una función trigonométrica del ángulo.**

En el Capítulo 7 se definieron las funciones trigonométricas con dominios de números reales. Ahora se considerarán funciones trigonométricas cuyos dominios son conjuntos de medidas angulares. Una función trigonométrica de un ángulo θ es la función correspondiente del número real t, cuando t es la medida en radianes de θ.

DEFINICIÓN Las funciones trigonométricas de ángulos

Si θ es un ángulo cuya medida en radianes es t, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos\theta = \cos t \qquad \tan\theta = \tan t$$

$$\cot\theta = \cot t \qquad \sec\theta = \sec t \qquad \csc\theta = \csc t$$

Cuando se considera una función trigonométrica de un ángulo θ suele utilizarse la medida del ángulo en lugar de θ. Por ejemplo, si $m^\circ(\theta) = 60$ o, equivalentemente, $m^R(\theta) = \frac{1}{3}\pi$, entonces en lugar de sen θ podría escribirse sen 60° o sen $\frac{1}{3}\pi$. Note que cuando la medida

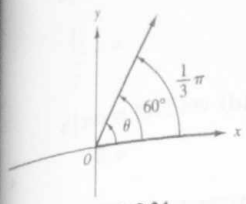


FIGURA 8.24

del ángulo está en grados, se escribe el símbolo de grados. Sin embargo, cuando no se anota el símbolo, la medida del ángulo es en radianes. Por ejemplo, cos 2° significa el coseno del ángulo cuya medida es 2 grados, mientras que cos 2 significa el coseno del ángulo cuya medida es 2 radianes. Esto es consistente con la discusión hecha en la Sección 7.1, donde cos 2 se refiere al coseno del número real 2 porque, por definición, el coseno de un ángulo cuya medida es 2 radianes es igual al coseno del número real 2.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La Figura 8.24 muestra un ángulo θ para el que $m^\circ(\theta) = 60$ y $m^R(\theta) = \frac{1}{3}\pi$. El ángulo puede designarse mediante el símbolo θ o por su medida en grados o radianes. Por definición, $\cos\theta = \cos\frac{1}{3}\pi$. De modo que puede escribirse

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}$$

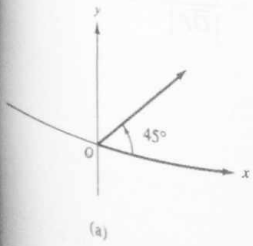
También podría expresarse como

$$\cos 60^\circ = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}$$ ◀

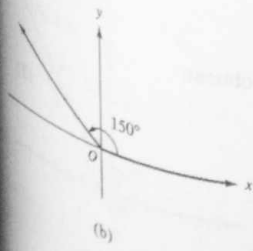
▶ EJEMPLO 1 *Determinación de los valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos*

Dibuje el ángulo y determine el valor de la función para cada una de las expresiones siguientes:
(a) sen 45°; **(b)** cos 150°; **(c)** tan(−135°); **(d)** cot 270°.

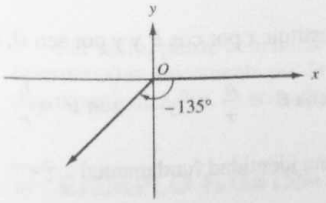
Solución Los ángulos se muestran en la Figura 8.25. De la definición y los resultados del Capítulo 7, se calculan los valores de las funciones:



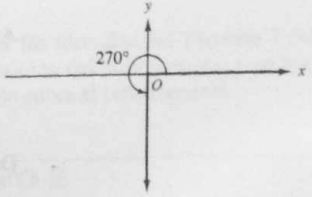
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 8.25

(a) $\operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\cos 150° = \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\tan(-135°) = \tan(-\frac{3}{4}\pi) = 1$

(d) $\cot 270° = \cot \frac{3}{2}\pi = 0$

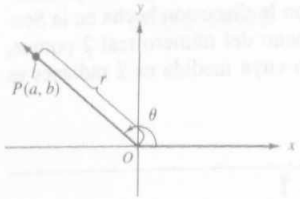


FIGURA 8.26

Ahora se mostrará cómo pueden expresarse las funciones trigonométricas como razones de números reales. La Figura 8.26 muestra un ángulo θ cuyo lado terminal está en el segundo cuadrante. El punto $P(a, b)$ es cualquier punto diferente del origen del lado terminal de θ y el número r es la distancia $|\overline{OP}|$; por tanto,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Suponga que el punto P no está sobre la circunferencia unitaria U. Por esto, $r \neq 1$. En la Figura 8.27, donde $r > 1$, $Q(x, y)$ es el punto sobre el lado terminal de θ que está sobre U. Así, $|\overline{OQ}| = 1$. En la Figura 8.27 los segmentos de recta verticales desde P y Q cortan al eje x en los puntos $M(a, 0)$ y $N(x, 0)$, respectivamente. Los dos triángulos rectángulos ONQ y OMP son semejantes. Como en triángulos semejantes las razones de las longitudes de los lados correspondientes son iguales, se tiene

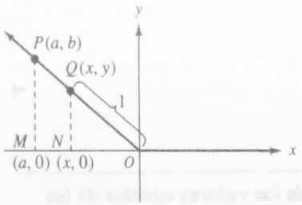


FIGURA 8.27

$$\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OQ}|} = \frac{|\overline{OM}|}{|\overline{OP}|} \quad \text{y} \quad \frac{|\overline{NQ}|}{|\overline{OQ}|} = \frac{|\overline{MP}|}{|\overline{OP}|}$$

Por tanto,

$$\frac{|x|}{1} = \frac{|a|}{r} \quad \text{y} \quad \frac{y}{1} = \frac{b}{r}$$

Como $x < 0$ y $a < 0$,

$$x = \frac{a}{r} \quad \text{y} \quad y = \frac{b}{r}$$

Al sustituir x por $\cos\theta$ y y por $\operatorname{sen}\theta$, se obtiene

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

De una identidad fundamental

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \text{si } \cos\theta \neq 0$$

Por tanto,

$$\tan\theta = \frac{\frac{b}{r}}{\frac{a}{r}}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \text{si } a \neq 0 \tag{2}$$

Se obtienen los mismos resultados que en (1) y (2) sin importar cuál cuadrante contiene al lado terminal de θ. De (1) y (2), y como la cotangente, secante y cosecante son recíprocos de la tangente, coseno y seno, respectivamente, se tiene el teorema siguiente.

TEOREMA 1

Si θ es un ángulo en posición estándar, $P(a, b)$ es un punto diferente del origen sobre el lado terminal de θ, y $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b} \qquad \text{si } b \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} \qquad \text{si } a \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad \text{si } a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} \quad \text{si } b \neq 0$$

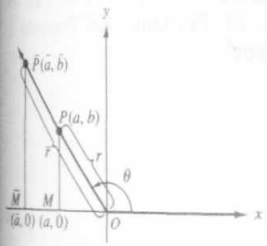


FIGURA 8.28

Suponga que en la discusión precedente al Teorema 1 se ha seleccionado el punto $\bar{P}(\bar{a}, \bar{b})$ sobre el lado terminal de θ en lugar del punto $P(a, b)$. *Véase* la Figura 8.28. Como los triángulos OMP y $O\bar{M}\bar{P}$ son semejantes, se deduce que

$$\frac{b}{r} = \frac{\bar{b}}{\bar{r}} \quad \frac{a}{r} = \frac{\bar{a}}{\bar{r}} \quad \frac{b}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \quad \frac{r}{b} = \frac{\bar{r}}{\bar{b}} \quad \frac{r}{a} = \frac{\bar{r}}{\bar{a}} \quad \frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

Por tanto, puede concluirse que las fórmulas del Teorema 1 están determinadas únicamente por la posición del lado terminal y no por el punto particular $P(a, b)$ seleccionado sobre el lado terminal.

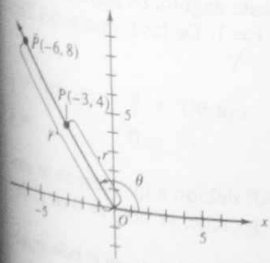


FIGURA 8.29

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Sea $P(-3, 4)$ y $\bar{P}(-6, 8)$ dos puntos sobre el lado terminal del ángulo θ. *Véase* la Figura 8.29. Si el punto P se elige para calcular las funcio-

nes trigonométricas de θ, entonces $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$; de donde $r =$ del Teorema 1, sen $\theta = \frac{4}{5}$, cos $\theta = -\frac{3}{5}$, tan $\theta = -\frac{4}{3}$, cot $\theta = -\frac{3}{4}$, sec $\theta =$ $-\frac{5}{3}$ y csc $\theta = \frac{5}{4}$. Si $\overline{P}$ es elegido, entonces $\overline{r} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$; es decir, $\overline{r} =$ y del Teorema 1, sen $\theta = \frac{8}{10}$, cos $\theta = -\frac{6}{10}$, tan $\theta = -\frac{8}{6}$, cot $\theta = -\frac{6}{8}$, sec $\theta =$ $-\frac{10}{6}$ y csc $\theta = \frac{10}{8}$, los cuales son los mismos valores.

▸ EJEMPLO 2 *Determinación de los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cuando se conoce un punto de su lado terminal*

Si θ es un ángulo en posición estándar y el punto $P(5, -12)$ está sobre el lado terminal de θ, determine los valores de las funciones trigonométricas de θ.

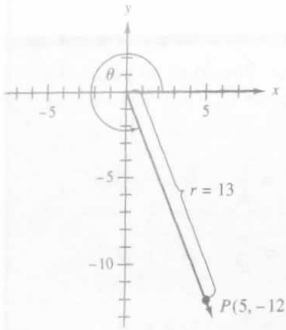


FIGURA 8.30

Solución La Figura 8.30 muestra el ángulo θ con el punto $P(5, -12)$ en su lado terminal. La distancia $|\overline{OP}|$ es r, la cual es $\sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169}$; de donde $r = 13$. Por tanto, del Teorema 1 con $a = 5$, $b = -12$ y $r = 13$ se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{12}{13} \qquad \csc\theta = -\frac{13}{12}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{13} \qquad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\tan\theta = -\frac{12}{5} \qquad \cot\theta = -\frac{5}{12}$$

Cuando se discutió el Teorema 1, no se consideró la posibilidad de que el lado terminal de θ estuviera sobre el eje x o el eje y, en tal caso θ sería un ángulo cuadrantal. Las fórmulas del Teorema 1 también son válidas para estos ángulos, como se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▹ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) Suponga que se tiene un ángulo de 90°. Se puede elegir cualquier punto P sobre el lado terminal de este ángulo; en particular se elige $P(0, 1)$. De esto, $a = 0$, $b = 1$ y $r = 1$. De las fórmulas del Teorema 1

$$\operatorname{sen} 90° = \frac{1}{1} \qquad \cos 90° = \frac{0}{1} \qquad \cot 90° = \frac{0}{1} \qquad \csc 90° =$$
$$= 1 \qquad = 0 \qquad = 0$$

No están definidos tan 90° y sec 90° debido a que cuando se emplean las fórmulas para tangente y secante, se obtiene 0 en el denominador.

(b) Si se tiene un ángulo de 180°, elija el punto $P(-1, 0)$ en el lado terminal. De donde $a = -1$, $b = 0$ y $r = 1$. De las fórmulas del Teorema 1

$$\operatorname{sen} 180° = \frac{0}{1} \quad \cos 180° = \frac{-1}{1} \quad \tan 180° = \frac{0}{-1} \quad \sec 180° = \frac{1}{-1}$$
$$= 0 \qquad = -1 \qquad = 0 \qquad = -1$$

Como $b = 0$, no está definido cot 180° ni csc 180°. ◀

En la Sección 7.6 se determinó el signo de las funciones trigonométricas de un número real t considerando el cuadrante que contiene al punto terminal del arco sobre U de longitud t. Los signos de las funciones trigonométricas para los cuatro cuadrantes están en la Tabla 3 de esa sección. Esta tabla también puede utilizarse para determinar el signo de una función trigonométrica de un ángulo porque el signo depende del cuadrante que contiene al lado terminal del ángulo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Suponga que θ es un ángulo en posición estándar, sen $\theta > 0$ y cos $\theta < 0$. Se desea determinar el cuadrante que contiene al lado terminal de θ. Como sen $\theta > 0$, el lado terminal de θ está en el primer cuadrante o en el segundo. Debido a que cos $\theta < 0$, el lado terminal de θ está en el segundo cuadrante o en el tercero. Para que ambas condiciones se cumplan, el lado terminal de θ debe estar en el segundo cuadrante. ◀

Debido a que un ángulo agudo es un ángulo positivo de medida, en grados, menor que 90, puede ser un ángulo de un triángulo rectángulo, y las funciones trigonométricas de un ángulo agudo pueden expresarse como razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. La Figura 8.31 muestra un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ y un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares ubicado de modo que el ángulo θ está en posición estándar. El teorema siguiente es el resultado de aplicar el Teorema 1 donde

a es la longitud del lado adyacente a θ (abreviado *ad*)
b es la longitud del lado opuesto a θ (abreviado *op*)
r es la longitud de la hipotenusa (abreviada *hip*)

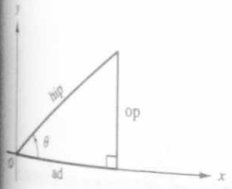


FIGURA 8.31

TEOREMA 2

Si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{ad}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ad}}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ad}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ad}}{\text{op}}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

La Figura 8.32 muestra un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ. La longitud de la hipotenusa es 8 unidades y la del lado adyacente a θ es 5 unidades. Se pueden determinar los valores de las seis funciones trigonométricas de θ mediante las fórmulas del Teorema 2, calculando antes la longitud del lado opuesto a θ. Si z representa esta longitud, del teorema de Pitágoras se tiene

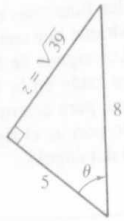


FIGURA 8.32

$$z^2 + 5^2 = 8^2$$
$$z^2 + 25 = 64$$
$$z^2 = 39$$
$$z = \sqrt{39}$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} = \frac{8}{\sqrt{39}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ad}}{\text{hip}} = \frac{5}{8} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ad}} = \frac{8}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ad}} = \frac{\sqrt{39}}{5} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ad}}{\text{op}} = \frac{5}{\sqrt{39}}$$

Las fórmulas del Teorema 2 se utilizan en aplicaciones trigonométricas que implican triángulos rectángulos. Este tema se discute en la Sección 8.3. Las fórmulas también pueden emplearse para determinar funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° como se muestra en los dos ejemplos ilustrativos siguientes.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

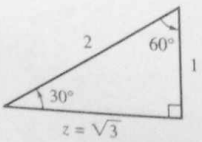


FIGURA 8.33

Un teorema de geometría establece que en un triángulo rectángulo con ángulos agudos de 30° y 60°, la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° es la mitad de la longitud de la hipotenusa. La Figura 8.33 muestra dicho triángulo rectángulo con una hipotenusa de 2 unidades de longitud. Por lo que la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° es 1 unidad. Para calcular la longitud del otro lado, sea ésta de z unidades, determine z aplicando el teorema de Pitágoras. Las operaciones son:

$$z^2 + 1^2 = 2^2$$
$$z^2 + 1 = 4$$
$$z^2 = 3$$
$$z = \sqrt{3}$$

Del triángulo se obtiene

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = 2$$
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30° = \sqrt{3}$$

y

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = 2$$
$$\tan 60° = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

A fin de obtener las funciones trigonométricas del ángulo de 45°, se considera un triángulo rectángulo isósceles con dos lados que miden 1 unidad. *Véase* la Figura 8.34. Si z unidades es la longitud de la hipotenusa,

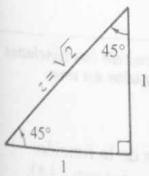


FIGURA 8.34

$$z^2 = 1^2 + 1^2$$
$$z^2 = 2$$
$$z = \sqrt{2}$$

Así, del triángulo se tiene

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \csc 45° = \sqrt{2}$$
$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45° = \sqrt{2}$$
$$\tan 45° = 1 \qquad \cot 45° = 1$$ ◀

Los ejemplos ilustrativos 6 y 7 proporcionan un método práctico para obtener los valores de las funciones trigonométricas de 30°, 60° y

45° o, de forma equivalente, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ y $\frac{1}{4}\pi$, respectivamente. La Tabla 1 resume estos valores así como los de 0 y $\frac{1}{2}\pi$. Estos valores ocurren con frecuencia y son exactos. Conviene saber los valores exactos para no tener que emplear las tablas o la calculadora. No es necesario memorizarlos si se recuerdan los métodos para obtenerlos a partir de los triángulos rectángulos y puntos en los ejes coordenados.

Tabla 1

t (Radianes)	θ (Grados)	sen t y sen θ	cos t y cos θ	tan t y tan θ	cot t y cot θ	sec t y sec θ	csc t y csc θ
0	0°	0	1	0	indefinido	1	indefinido
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	indefinido	0	indefinido	1

Los valores de las funciones trigonométricas pueden determinarse en una calculadora de modo correcto, radianes o grados, dependiendo de cómo se mide el ángulo.

▸ EJEMPLO 3 *Aproximación de valores de las funciones trigonométricas de ángulos en una calculadora*

Utilice una calculadora para aproximar el valor de la función:
(a) sen 16.72°; **(b)** cos 154.38°; **(c)** $\tan(-\frac{3}{5}\pi)$;
(d) sen 5.27; **(e)** sec(−1.26); **(f)** cot 319.4°.

Solución En los incisos (a), (b) y (f) se activa el modo de grados; en (c), (d) y (e), el de radianes.

(a) sen 16.72° = 0.2877

(b) cos 154.38° = −0.9017

(c) $\tan(-\frac{3}{5}\pi) = 3.0777$

(d) sen 5.27 = −0.8485

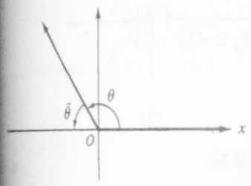
(e) $\sec(-1.26) = \dfrac{1}{\cos(-1.26)} = 3.270$

(f) $\cot 319.4° = \dfrac{1}{\tan 319.4°} = -1.1667$

Los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo pueden determinarse conociendo los valores de las funciones de ángulos agudos (un ángulo cuya medida positiva en radianes menor que $\frac{1}{2}\pi$). El procedimiento implica el concepto de *ángulo de referencia.*

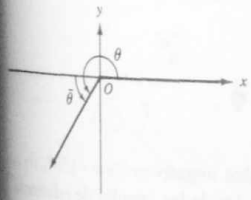
DEFINICIÓN **Ángulo de referencia**

El **ángulo de referencia** asociado con un ángulo θ, no cuadrantal en posición estándar es el ángulo $\overline{\theta}$ formado por el lado terminal de θ y el eje x.

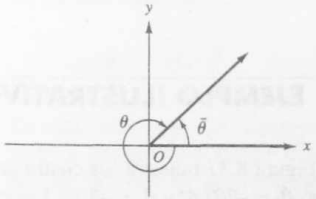


(a)

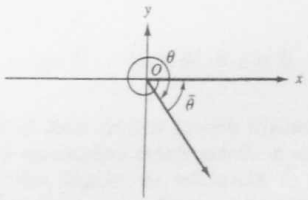
En la Figura 8.35 se muestran cuatro ángulos en posición estándar, los cuales tienen su lado terminal en un cuadrante diferente. El ángulo de referencia $\overline{\theta}$ asociado con el ángulo θ se indica en la figura.



(b)



(c)



(d)

FIGURA 8.35

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

La Figura 8.36 muestra cuatro ángulos en posición estándar con $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$, $\theta_2 = 225°$, $\theta_3 = 5.25$ y $\theta_4 = 432°$, y sus ángulos de referencia asociados $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$, $\overline{\theta}_3$ y $\overline{\theta}_4$, respectivamente. Los cálculos de las medidas de estos ángulos de referencia son los siguientes:

(a) $\overline{\theta}_1 = \pi - \frac{2}{3}\pi$
$= \frac{1}{3}\pi$

(b) $\overline{\theta}_2 = 225° - 180°$
$= 45°$

(c) $\overline{\theta}_3 \approx 2(3.14) - 5.25$
≈ 1.03

(d) $\overline{\theta}_4 = 432° - 360°$
$= 72°$

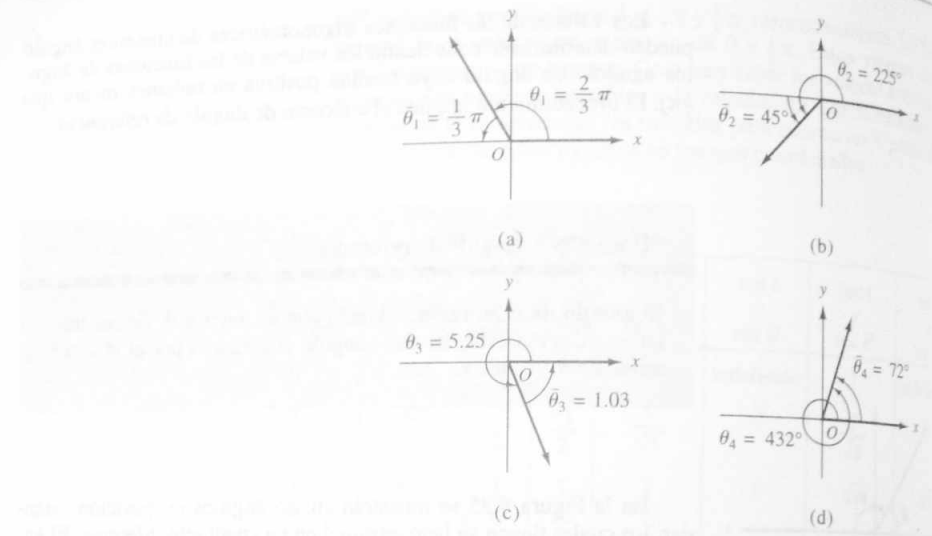


FIGURA 8.36

El ejemplo ilustrativo que sigue muestra cómo se obtiene el ángulo de referencia asociado con un ángulo negativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

La Figura 8.37 muestra los cuatro ángulos negativos $\theta_1 = -150°$, $\theta_2 = -\frac{5}{3}\pi$, $\theta_3 = -202.4°$ y $\theta_4 = -7.36$. Los cálculos de los ángulos de referencia respectivos son los siguientes:

(a) $\bar{\theta}_1 = 180° - 150°$
$= 30°$

(b) $\bar{\theta}_2 = 2\pi - \frac{5}{3}\pi$
$= \frac{1}{3}\pi$

(c) $\bar{\theta}_3 = 202.4° - 180°$
$= 22.4°$

(d) $\bar{\theta}_4 \approx 7.36 - 2(3.14)$
≈ 1.08

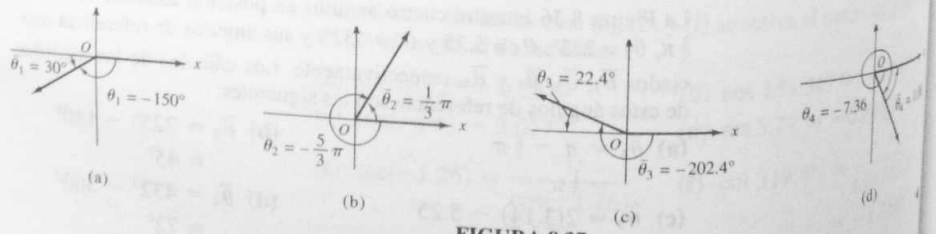


FIGURA 8.37

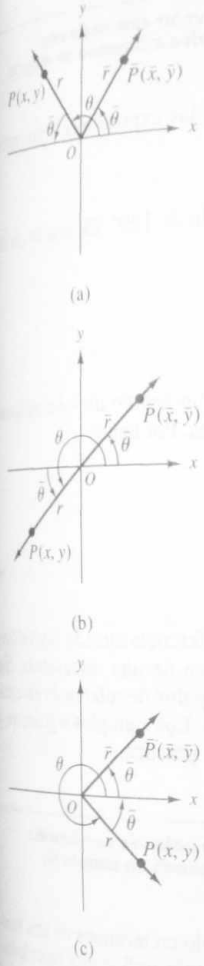


FIGURA 8.38

Ahora se mostrará cómo se utilizan los ángulos de referencia para determinar valores de las funciones trigonométricas. Considere un ángulo θ en posición estándar y elija, en el lado terminal de θ, el punto $P(x, y)$ donde $r = |\overline{OP}|$. El ángulo de referencia asociado es $\overline{\theta}$. Construya el ángulo $\overline{\theta}$ en posición estándar; éste es un ángulo en el primer cuadrante. Seleccione sobre el lado terminal de $\overline{\theta}$ el punto $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y})$ tal que $\overline{r} = r$. La Figura 8.38 muestra el ángulo θ en los cuadrantes segundo, tercero y cuarto. Debido a la simetría de los puntos P y $\overline{P}$ con respecto al origen o a alguno de los ejes coordenados, se tiene para cada posición de $P(x, y)$

$$|x| = \overline{x} \qquad \text{y} \qquad |y| = \overline{y}$$

Por tanto,

$$|\operatorname{sen}\theta| = \frac{|y|}{r} = \frac{\overline{y}}{\overline{r}} = \operatorname{sen}\overline{\theta}$$

$$|\cos\theta| = \frac{|x|}{r} = \frac{\overline{x}}{\overline{r}} = \cos\overline{\theta}$$

$$|\tan\theta| = \frac{|y|}{|x|} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \tan\overline{\theta}$$

De manera semejante

$$|\csc\theta| = \csc\overline{\theta} \qquad |\sec\theta| = \sec\overline{\theta} \qquad |\cot\theta| = \cot\overline{\theta}$$

De estas relaciones, se concluye que el valor de una función trigonométrica de cualquier ángulo θ puede encontrarse determinando el valor de la función correspondiente del ángulo de referencia $\overline{\theta}$ y prefijando el signo algebraico apropiado (+ o −). El procedimiento puede resumirse como sigue:

Empleo de los ángulos de referencia para determinar el valor de una función trigonométrica de un ángulo no agudo θ

1. Determine el ángulo de referencia $\overline{\theta}$ asociado con θ.
2. Encuentre el valor de la función trigonométrica correspondiente de $\overline{\theta}$. Éste puede ser un valor exacto si $\overline{\theta}$ es igual a 45°, 30° o 60°; o puede ser uno aproximado obtenido mediante una calculadora.
3. Anteponga el signo algebraico conveniente para la función particular considerando el cuadrante que contiene a θ.

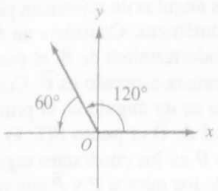


FIGURA 8.39

▸ EJEMPLO 4 *Determinación del valor exacto de una función trigonométrica utilizando un ángulo de referencia*

Determine el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes: (a) $\cos 120°$; (b) $\cot(-\frac{2}{3}\pi)$.

Solución

(a) En la Figura 8.39 se muestra un ángulo de 120°. El ángulo de referencia mide 60°. Por tanto,

$$\begin{aligned}\cos 120° &= -\cos 60° \\ &= -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

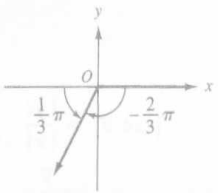


FIGURA 8.40

(b) *Véase* la Figura 8.40, la cual muestra un ángulo de $-\frac{2}{3}\pi$ radianes y su ángulo de referencia de $\frac{1}{3}\pi$ radianes. Por tanto,

$$\begin{aligned}\cot(-\tfrac{2}{3}\pi) &= \cot \tfrac{1}{3}\pi \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

No es necesario emplear ángulos de referencia cuando los valores de las funciones trigonométricas se obtienen de una calculadora. Sin embargo, debido a la importancia de los ángulos de referencia en estudios posteriores, deberá practicar su empleo. Los ejemplos siguientes y los ejercicios 33 a 38 le proporcionarán esta práctica.

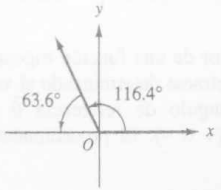


FIGURA 8.41

▸ EJEMPLO 5 *Aproximación de un valor de una función trigonométrica utilizando un ángulo de referencia*

Aproxime el valor de la función expresándolo en términos de una función del ángulo de referencia asociado, después utilice una calculadora: (a) sen 116.4°; (b) tan(−16.8°).

Solución Active el modo de grados de la calculadora.

(a) La Figura 8.41 muestra un ángulo de 116.4°. El ángulo de referencia mide $180° - 116.4° = 63.6°$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 116.4° &= \operatorname{sen} 63.6° \\ &= 0.8957\end{aligned}$$

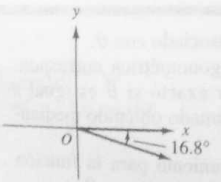


FIGURA 8.42

(b) En la Figura 8.42 se muestra un ángulo de −16.8°. El ángulo de referencia mide 16.8°.

$$\begin{aligned}\tan(-16.8°) &= -\tan 16.8° \\ &= -0.3019\end{aligned}$$

El problema de determinar un ángulo a partir de un valor de una función trigonométrica del ángulo es el *inverso* de determinar el valor de la función de un ángulo dado. Cuando se utiliza una calculadora, el proceso inverso se realiza empleando las teclas $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$. Estas teclas se refieren a las *funciones trigonométricas inversas*, discutidas en la Sección 9.5.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

A fin de determinar el ángulo positivo θ menor que $90°$ para el cual

$$\cos\theta = 0.8367$$

se activa el modo de grados en la calculadora, se introduce 0.8367 y después se presiona la tecla $\boxed{\cos^{-1}}$, y se obtiene

$$\theta = 33.21° \quad \blacktriangleleft$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 11

Suponga que se desea hallar el ángulo positivo θ menor que $90°$ para el cual

$$\cot\theta = 2.906$$

Para utilizar la calculadora y la tecla $\boxed{\tan^{-1}}$ se escribe la ecuación como

$$\tan\theta = \frac{1}{2.906}$$

Después, con la calculadora en modo de grados, se introduce $\frac{1}{2.906}$ y se oprime la tecla $\boxed{\tan^{-1}}$ y se obtiene

$$\theta = 18.99° \quad \blacktriangleleft$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 12

Se desea determinar todos los ángulos θ tales que $0° \le \theta < 360°$ para los cuales

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como sen $\theta > 0$, θ puede estar en el primer cuadrante o en el segundo. Por tanto, existe θ_1 tal que

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 0° < \theta_1 < 90°$$

y θ_2 tal que

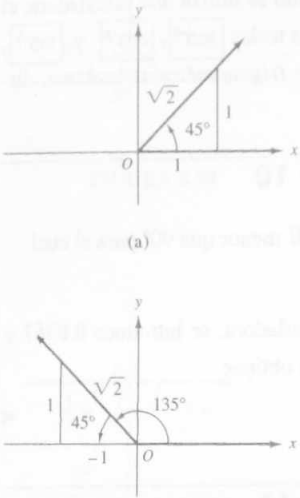
$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 90° < \theta_2 < 180°$$

La Figura 8.43(a) muestra que

$$\theta_1 = 45°$$

El ángulo θ_2 es un ángulo del segundo cuadrante que tiene un ángulo de referencia de 45°. *Véase* la Figura 8.43(b), la cual muestra que

$$\theta_2 = 180° - 45°$$
$$= 135°$$



(a) (b)

FIGURA 8.43

▸ EJEMPLO 6 *Determinación de ángulos que tienen un valor de función trigonométrica dado*

Halle todos los ángulos θ tales que $0° \le \theta < 360°$ para los que se satisface la ecuación dada: **(a)** $\tan\theta = -\sqrt{3}$; **(b)** $\cos\theta = -0.4493$.

Solución

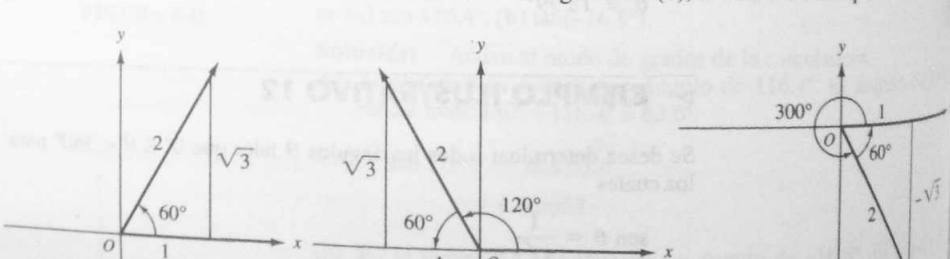
(a) Como $\tan\theta < 0$, θ puede estar en el segundo cuadrante o en el cuarto. Por tanto, existe θ_1 tal que

$$\tan\theta_1 = -\sqrt{3} \qquad 90° < \theta_1 < 180°$$

y θ_2 tal que

$$\tan\theta_2 = -\sqrt{3} \qquad 270° < \theta_2 < 360°$$

Primero se determina el ángulo de referencia $\overline{\theta}$ para el que $\tan\overline{\theta} = \sqrt{3}$. *Véase* la Figura 8.44(a) y observe que $\overline{\theta} = 60°$. El ángulo θ_1 es un ángulo del segundo cuadrante que tiene un ángulo de referencia de 60°. *Véase* la Figura 8.44(b), la cual muestra que



(a) (b) (c)

FIGURA 8.44

$$\theta_1 = 180° - 60°$$
$$= 120°$$

El ángulo θ_2 está en el cuarto cuadrante y tiene un ángulo de referencia de 60°. La Figura 8.44 (c) muestra este ángulo, y de la figura se ve que

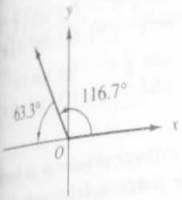
$$\theta_2 = 360° - 60°$$
$$= 300°$$

(b) Como $\cos\theta < 0$, θ puede estar en el segundo cuadrante o en el tercero. Por tanto existe θ_1 tal que

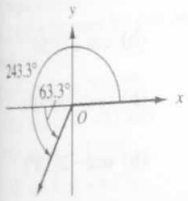
$$\cos\theta_1 = -0.4493 \qquad 90° < \theta_1 < 180°$$

y θ_2 tal que

$$\cos\theta_2 = -0.4493 \qquad 180° < \theta_2 < 270°$$



(a)



(b)

FIGURA 8.45

A fin de determinar el ángulo de referencia $\overline{\theta}$ para el que $\cos\overline{\theta} = 0.4493$, se introduce 0.4493 y se presiona la tecla $\boxed{\cos^{-1}}$, y se obtiene $\overline{\theta} = 63.3°$. Así, θ_1 es un ángulo del segundo cuadrante que tiene un ángulo de referencia de 63.3°. *Véase* la Figura 8.45(a) y observe que

$$\theta_1 = 180° - 63.3°$$
$$= 116.7°$$

El ángulo θ_2 está en el tercer cuadrante y tiene un ángulo de referencia de 63.3°. Este ángulo se muestra en la Figura 8.45(b) y

$$\theta_2 = 180° + 63.3°$$
$$= 243.3°$$

◀

EJERCICIOS 8.2

En los ejercicios 1 a 6, dibuje el ángulo y halle el valor exacto de la función.

1. (a) sen 60° (b) cos 30° (c) tan 45°
2. (a) sen 30° (b) cos 45° (c) tan 60°
3. (a) cos 135° (b) sen 210° (c) tan 300°
4. (a) cos 240° (b) sen 150° (c) tan 315°
5. (a) sen(−30°) (b) cos(−225°) (c) tan(−120°)
6. (a) sen(−135°) (b) cos(−60°) (c) tan(−210°)

En los ejercicios 7 a 10, encuentre los valores de las cuatro funciones trigonométricas del ángulo cuadrantal indicado para el que están definidas. ¿Para cuáles funciones no se definen valores?

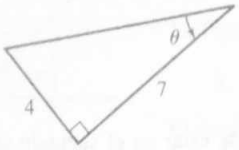
7. 0° **8.** −180° **9.** −90° **10.** 270°

En los ejercicios 11 a 18, θ es un ángulo en posición estándar y el punto P se encuentra sobre el lado terminal de θ. Determine los seis valores de las funciones trigonométricas de θ.

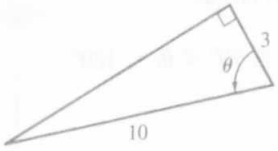
11. $P(3, 4)$ **12.** $P(8, 6)$ **13.** $P(-15, 8)$
14. $P(-12, -5)$ **15.** $P(6, -3)$ **16.** $P(-6, 2)$
17. $P(-1, -4)$ **18.** $P(8, -15)$

En los ejercicios 19 a 22, halle los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo agudo θ mostrado en el triángulo rectángulo.

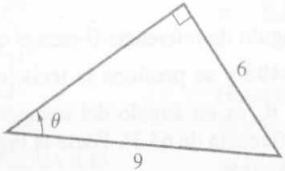
19.



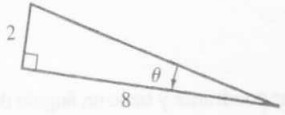
20.



21.



22.



En los ejercicios 23 a 28, utilice una calculadora para aproximar el valor de la función.

23. (a) sen 32.4° (b) cos 57.6° (c) tan 73.7° (d) cot 16.3° (e) sec 44.5° (f) csc 45.5°

24. (a) sen 81.1° (b) cos 8.9° (c) tan 25.8° (d) cot 64.2° (e) sec 52.3° (f) csc 37.7°

25. (a) sen 75.4° (b) cos 22.3° (c) tan 34.8° (d) cot 88.1° (e) sec 52.6° (f) csc 2.7°

26. (a) sen 1.5° (b) cos 48.2° (c) tan 76.9° (d) cot 14.6° (e) sec 33.7° (f) csc 80.4°

27. (a) sen $\frac{3}{8}\pi$ (b) cos 0.457 (c) tan 1.264 (d) cot $\frac{2}{5}\pi$

28. (a) sen 1.302 (b) cos $\frac{5}{11}\pi$ (c) tan $\frac{4}{9}\pi$ (d) cot 0.839

En los ejercicios 29 a 32, exprese el valor de la función en términos de un valor de función del ángulo de referencia asociado. Después determine el valor exacto. No emplee calculadora.

29. (a) sen 135° (b) cos 210° (c) tan(−240°) (d) cot 330° (e) sec 180° (f) csc(−120°)

30. (a) sen 315° (b) cos 120° (c) tan 210° (d) cot(−225°) (e) sec 240° (f) csc(−90°)

31. (a) sen$(-\frac{2}{3}\pi)$ (b) cos $\frac{7}{4}\pi$ (c) tan $\frac{5}{4}\pi$ (d) cot $\frac{3}{2}\pi$ (e) sec$(-\frac{7}{6}\pi)$ (f) csc$(-\frac{1}{6}\pi)$

32. (a) sen π (b) cos $\frac{11}{6}\pi$ (c) tan $\frac{1}{3}\pi$ (d) cot$(-\frac{5}{6}\pi)$ (e) sec$(-\frac{3}{4}\pi)$ (f) csc$(-\frac{1}{4}\pi)$

En los ejercicios 33 a 38, exprese el valor de la función en términos del valor de función del ángulo de referencia asociado. Después aproxime el valor en una calculadora.

33. (a) sen 124°18′ (b) cos 243°36′ (c) tan(−15°6′)

34. (a) cos 151°12′ (b) sen(−98°24′) (c) tan 196°42′

35. (a) cos(−172.4°) (b) sen(−263.8°) (c) tan 200.2°

36. (a) sen(−193.7°) (b) cos(−10.9°) (c) tan 108.3°

37. (a) cot(−169°30′) (b) sec 292.6° (c) csc 175.5°

38. (a) cot 348.1° (b) sec(−304.9°) (c) csc(−126.5°)

En los ejercicios 39 y 40, halle todos los valores del ángulo θ tales que $0° \le \theta < 360°$ para los que se satisface la ecuación dada.

39. (a) sen $\theta = \frac{1}{2}$ (b) cos $\theta = -\frac{1}{2}$ (c) tan $\theta = 1$

40. (a) sen $\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) cos $\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (c) tan $\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

En los ejercicios 41 y 42, encuentre todos los valores del ángulo θ tales que $0 \le \theta < 2\pi$ para los que se satisface la ecuación indicada.

41. (a) $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(c) $\tan\theta = 0$

42. (a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ (b) $\cos\theta = 0$
(c) $\tan\theta = \sqrt{3}$

En los ejercicios 43 y 44, halle todos los valores del ángulo θ, con aproximación de décimos de grado tales que $0° \le \theta < 360°$ para los que se satisface la ecuación dada.

43. (a) $\operatorname{sen}\theta = 0.5165$ (b) $\cos\theta = 0.1685$
(c) $\tan\theta = 2.367$ (d) $\cot\theta = 1.053$

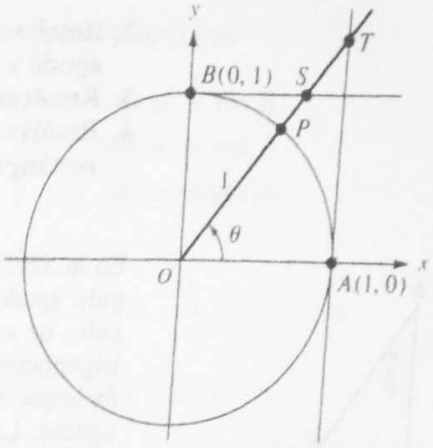
44. (a) $\operatorname{sen}\theta = 0.9078$ (b) $\cos\theta = 0.7638$
(c) $\tan\theta = 0.2035$ (d) $\cot\theta = 7.595$

En los ejercicios 45 y 46, determine todos los valores del ángulo θ, con cuatro dígitos significativos, tales que $0 \le \theta < 2\pi$ para los que se satisface la ecuación indicada.

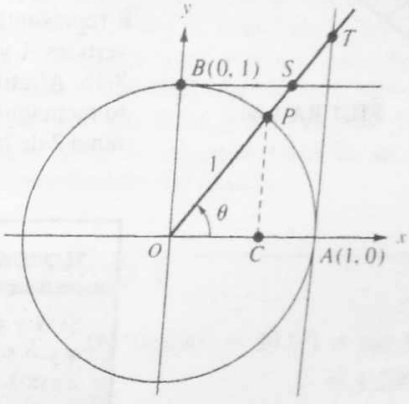
45. (a) $\operatorname{sen}\theta = 0.4207$
(b) $\cos\theta = -0.3586$
(c) $\tan\theta = 2.190$
(d) $\cot\theta = -4.371$

46. (a) $\operatorname{sen}\theta = -0.8236$
(b) $\cos\theta = 0.5017$
(c) $\tan\theta = -6.495$
(d) $\cot\theta = 0.9721$

47. En la figura mostrada abajo, el lado terminal del ángulo θ intersecta la circunferencia unitaria en el punto P. El punto T es la intersección de la recta que pasa por O y P, y la recta tangente a la circunferencia unitaria en el punto $A(1, 0)$. La recta tangente a la circunferencia unitaria en el punto $B(0, 1)$ intersecta a la recta que pasa por O y P en el punto S. Muestre que $\tan\theta$ es igual a la longitud del segmento de recta AT y $\cot\theta$ es igual a la longitud del segmento de recta BS.



48. La figura mostrada abajo se obtiene de la del ejercicio 47 dibujando el segmento de recta PC, el cual es la perpendicular desde el punto P al eje x. Determine el segmento de recta cuya longitud es (a) $\operatorname{sen}\theta$, (b) $\cos\theta$, (c) $\sec\theta$ y (d) $\csc\theta$.



49. Antes de la invención de las calculadoras electrónicas, los valores de las funciones trigonométricas se obtenían de las tablas de valores para ángulos positivos menores que 90°. Explique cómo los valores de las funciones trigonométricas de otros ángulos se obtuvieron en ese tiempo. Como ilustraciones de su discusión, utilice un ángulo positivo en el segundo cuadrante y un ángulo negativo en el tercer cuadrante.

8.3 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

OBJETIVOS

1. **Aprender que cualquier función trigonométrica de un ángulo agudo es la cofunción del complemento del ángulo.**

2. **Resolver un triángulo rectángulo cuando se conocen un ángulo agudo y un lado.**
3. **Resolver un triángulo rectángulo cuando se conocen dos lados.**
4. **Resolver enunciados de problemas que implican triángulos rectángulos.**

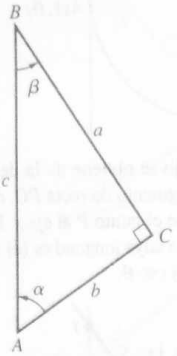


FIGURA 8.46

En la Sección 8.2 se dijo que las funciones trigonométricas de un ángulo agudo pueden expresarse como razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Esta interpretación de las funciones trigonométricas puede emplearse para *resolver un triángulo rectángulo*, lo que significa encontrar las magnitudes de sus lados y de sus ángulos agudos. La resolución de triángulos rectángulos tiene aplicaciones en varios campos, especialmente en topografía y navegación, como se verá más adelante en esta sección.

Los vértices de un triángulo rectángulo suelen denotarse por *A*, *B* y *C*, donde *C* representa al vértice del ángulo de 90°. Las longitudes de los lados opuestos a *A*, *B* y *C* se designan mediante *a*, *b* y *c*, respectivamente; de modo que *c* representa la longitud de la hipotenusa, y *a* y *b* representan las longitudes de los catetos. Los ángulos agudos con vértices *A* y *B* se denotan por α y β, respectivamente. *Véase* la Figura 8.46. Al utilizar estos símbolos para los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, se tiene el teorema siguiente, el cual se deduce del Teorema 2 de la Sección 8.2.

TEOREMA 1

Si α y β son los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, *a* y *b* son, respectivamente, las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos, y *c* es la longitud de la hipotenusa; entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cot\beta = \frac{a}{b}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \qquad \sec\beta = \frac{c}{a}$$

$$\csc\alpha = \frac{c}{a} \qquad \csc\beta = \frac{c}{b}$$

De las fórmulas del Teorema 1, observe que

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \tag{1}$$

$$\tan\alpha = \cot\beta \quad \text{y} \quad \cot\alpha = \tan\beta \tag{2}$$

$$\sec\alpha = \csc\beta \quad \text{y} \quad \csc\alpha = \sec\beta \tag{3}$$

Como $\alpha + \beta = 90°$, entonces

$$\beta = 90° - \alpha \tag{4}$$

Al sustituir $90° - \alpha$ por β en (1), (2) y (3) se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha) \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha) \tag{5}$$

$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha) \quad \text{y} \quad \cot\alpha = \tan(90° - \alpha) \tag{6}$$

$$\sec\alpha = \csc(90° - \alpha) \quad \text{y} \quad \csc\alpha = \sec(90° - \alpha) \tag{7}$$

Con base en las ecuaciones (5), se dice que el seno y el coseno son **cofunciones** una de la otra. Además, de las (6), la tangente y cotangente son cofunciones entre sí, y de (7), la secante y cosecante son cofunciones una de la otra. Cuando la suma de dos ángulos agudos es 90°, se dice que los dos ángulos son **complementarios** y que cada ángulo es el **complemento** del otro. Por tanto, las ecuaciones (5), (6) y (7) establecen que *cualquier función trigonométrica de un ángulo agudo es la cofunción del complemento del ángulo.*

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) $\cos(90° - 23.4°) = \cos 66.6°$
$= 0.3971$
$= \operatorname{sen} 23.4°$

(b) $\tan(90° - 39.8°) = \tan 50.2°$
$= 1.2002$
$= \cot 39.8°$

(c) $\csc(90° - 81.3°) = \csc 8.7°$
$= 6.6111$
$= \sec 81.3°$ ◀

▶ EJEMPLO 1 *Representación del valor de una función trigonométrica como valor de función de un ángulo menor que 45°*

Escriba cada una de las expresiones siguientes como el valor de función de un ángulo positivo menor que 45°: **(a)** sen 72.1°; **(b)** cos 45.5°; **(c)** tan 89.7°.

Solución

(a) $\operatorname{sen} 72.1° = \cos(90° - 72.1°)$
$= \cos 17.9°$

(b) $\cos 45.5° = \operatorname{sen}(90° - 45.5°)$
$= \operatorname{sen} 44.5°$

(c) $\cot 89.7° = \tan(90° - 89.7°)$
$= \tan 0.3°$

Ahora se aplicarán las fórmulas del Teorema 1 para resolver triángulos rectángulos. En las operaciones con estas fórmulas, la precisión de los datos proporcionados determina la precisión del resultado. La Tabla 1 presenta la relación entre la precisión de las longitudes de los lados y las magnitudes de los ángulos agudos en grados. No obstante que se manejan números aproximados, se empleará el signo de igualdad en el entendido de que la igualdad es válida sólo para el número de dígitos significativos que establece la Tabla 1.

Tabla 1

Número de dígitos significativos en las longitudes de los lados	*Medidas de ángulos agudos*
4	Precisión de 0.01°
3	Precisión de 0.1°
2	Precisión de grado

Al resolver un triángulo rectángulo, se recomienda que primero dibuje aproximadamente el triángulo a escala para comprender mejor el problema, lo cual facilita la detección de errores si el valor calculado es ilógico, ya sea muy grande o muy pequeño.

▸ EJEMPLO 2 *Solución de un triángulo rectángulo*

Resuelva el triángulo rectángulo para el cual $\alpha = 24.2°$ y $c = 16.3$.

Solución La Figura 8.47 muestra el triángulo. Se desea determinar β, a y b. Como $\alpha + \beta = 90°$,

$$\beta = 90° - \alpha$$
$$= 90° - 24.2°$$
$$= 65.8°$$

A fin de determinar a, se necesita una fórmula que contenga a a así como los valores dados de c y α. Las fórmulas para sen α y csc α implican estas cantidades. Si se utiliza el seno, se tiene

$$\operatorname{sen} 24.2° = \frac{a}{16.3}$$
$$a = 16.3 \operatorname{sen} 24.2°$$
$$a = 6.68$$

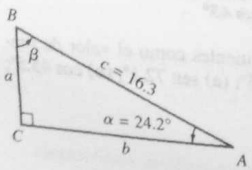


FIGURA 8.47

Para hallar b, se desea emplear una fórmula que implique a α, c y b. De la fórmula para el coseno se tiene

$$\cos 24.2^\circ = \frac{b}{16.3}$$
$$b = 16.3 \cos 24.2^\circ$$
$$b = 14.9$$

El valor para b se puede obtener del valor calculado de a y cot α. Por medio de este método se tiene

$$\cot 24.2^\circ = \frac{b}{6.68}$$
$$b = 6.68 \cot 24.2^\circ$$
$$b = 14.9$$

Observe que al determinar b mediante dos métodos, se verifican los resultados. ◀

▶ EJEMPLO 3 *Solución de un triángulo rectángulo*

Resuelva el triángulo rectángulo para el cual $a = 32.46$ y $b = 25.78$.

Solución El triángulo se muestra en la Figura 8.48. Las incógnitas son α, β y c. Primero se determinará uno de los ángulos. Para encontrar α, se emplea la función tangente, así

$$\tan \alpha = \frac{32.46}{25.78}$$
$$\tan \alpha = 1.259$$
$$\alpha = 51.54^\circ$$

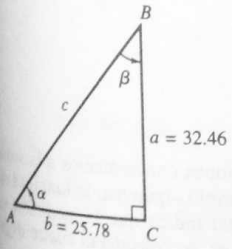


FIGURA 8.48

Para hallar β, también se utiliza la función tangente.

$$\tan \beta = \frac{25.78}{32.46}$$
$$\tan \beta = 0.7942$$
$$\beta = 38.46^\circ$$

Como $\alpha + \beta = 90^\circ$, se puede obtener β restando el valor de α de 90°. Sin embargo, al hallar β a partir de la información proporcionada, se tiene la verificación de los resultados al mostrar que

$$\alpha + \beta = 51.54^\circ + 38.46^\circ$$
$$= 90^\circ$$

Para determinar c, se pueden emplear cualesquiera de las funciones de α o β. Al utilizar sen α se tiene

$$\operatorname{sen} 51.54^\circ = \frac{32.46}{c}$$

$$c = \frac{32.46}{\operatorname{sen} 51.54^\circ}$$

$$c = 41.45$$

Por supuesto, c también puede obtenerse a partir de $c^2 = a^2 + b^2$. Esta ecuación puede utilizarse para verificar el valor calculado de c.

El área de un triángulo puede determinarse a partir de la fórmula

$$K = \tfrac{1}{2}bh$$

donde K unidades cuadradas es el área, b unidades la longitud de la base y h unidades la altura. En un triángulo rectángulo los lados (catetos) opuestos a los ángulos agudos son la base y la altura.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) Si K unidades cuadradas es el área del triángulo del ejemplo 2, entonces

$$K = \tfrac{1}{2}ba$$
$$= \tfrac{1}{2}(14.9)(6.68)$$
$$= 49.8$$

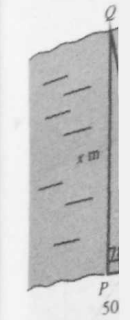
(b) Si K unidades cuadradas es el área del triángulo del ejemplo 3, entonces

$$K = \tfrac{1}{2}ba$$
$$= \tfrac{1}{2}(25.78)(32.46)$$
$$= 418.4$$

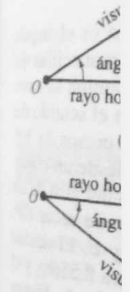
Ahora se discutirán algunas aplicaciones concernientes a la solución de triángulos rectángulos. En el ejemplo siguiente, la longitud de un segmento de recta es 50.00 m, lo cual indica que la medición es aproximada a centésimos de metro. Esto es, se consideran cuatro dígitos significativos.

▸ EJEMPLO 4 *Solución del enunciado de un problema que implica un triángulo rectángulo*

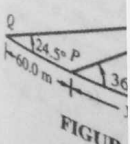
Para determinar la distancia de una orilla a otra de un lago, un topógrafo elige dos puntos P y Q, uno en cada orilla y directamente opuestos entre sí. En la orilla que contiene a P se selecciona otro punto R a 50.00 m de P, de modo que el segmento de recta PR es perpendicular



FIG



FIGU



FIGURA

al segmento de recta PQ. El ángulo formado por los lados PR y RQ mide 78.24°. ¿Cuál es la distancia de una a otra orilla del lago?

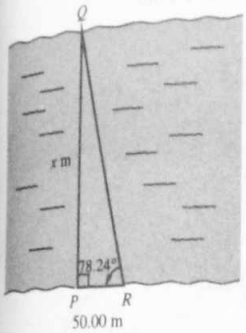


FIGURA 8.49

Solución Véase la Figura 8.49, la cual muestra el triángulo rectángulo con su ángulo recto en P. La distancia de una a otra orilla del lago es x metros. Entonces

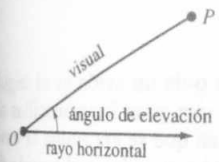
$$\tan 78.24° = \frac{x}{50.00}$$

$$x = 50.00 \tan 78.24°$$

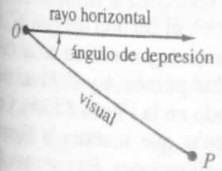
$$x = 240.2$$

Conclusión: La distancia de una a otra orilla del lago es de 240.2 m. ◀

Un segmento de recta desde un punto de observación O a un punto P observado se denomina la **visual** de P. El ángulo, con vértice en O, formado por un rayo horizontal y la visual de P, se denomina **ángulo de elevación** de P o **ángulo de depresión** de P, conforme P se encuentre por arriba o por debajo del punto O. *Véase* la Figura 8.50.



(a)



(b)

FIGURA 8.50

▸ EJEMPLO 5 *Solución de un problema que implica un triángulo rectángulo*

En un punto P el ángulo de elevación a la cima de una colina es 36.3°. En un punto Q, situado en la misma recta horizontal que P y al pie de la colina, a 60 m de P, el ángulo de elevación es 24.5°. Determine la altura de la colina.

Solución *Véase* la Figura 8.51, donde el punto R está en la cima de la colina. La altura de la colina es x metros. Sea y metros la distancia de P al pie de la colina. Se tienen dos triángulos rectángulos. Del triángulo rectángulo que tiene un vértice en P, se tiene

$$\cot 36.3° = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cot 36.3°$$

Del triángulo rectángulo que tiene un vértice en Q, se obtiene

$$\cot 24.5° = \frac{60.0 + y}{x}$$

$$60.0 + y = x \cot 24.5°$$

Al sustituir y por $x \cot 36.3°$ se tiene

$$60.0 + x \cot 36.3° = x \cot 24.5°$$

$$60.0 = x(\cot 24.5° - \cot 36.3°)$$

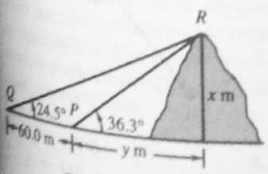


FIGURA 8.51

$$x = \frac{60.0}{\cot 24.5° - \cot 36.3°}$$

$$x = 72.0$$

Conclusión: La altura de la colina es de 72.0 m.

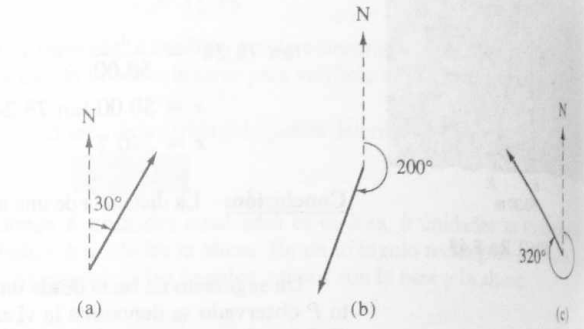


FIGURA 8.52

En navegación, el **curso** de un barco o de un avión es el ángu
medido en grados en el mismo sentido en que giran las manecillas
reloj, a partir del norte hasta la dirección en que se encamina la na
El ángulo se considera positivo aunque esté generado en el sentido
giro de las manecillas del reloj. La Figura 8.52 muestra cursos de
200° y 320°. El **acimut** de una posición en particular P desde un obse
vador en O, es el ángulo medido en grados en el sentido del giro de
manecillas del reloj, desde el norte hasta el segmento de recta
Véase la Figura 8.53(a), la cual muestra dos puntos A y B. El acim
de A con respecto a B es el ángulo presentado en la Figura 8.53(b),
acimut de B con respecto a A es el ángulo que muestra la Figu
8.53(c). Observe la diferencia entre las dos situaciones. En este caso
es el acimut de A con respecto a B, y $180° + \theta$ es el acimut de B c
relación a A.

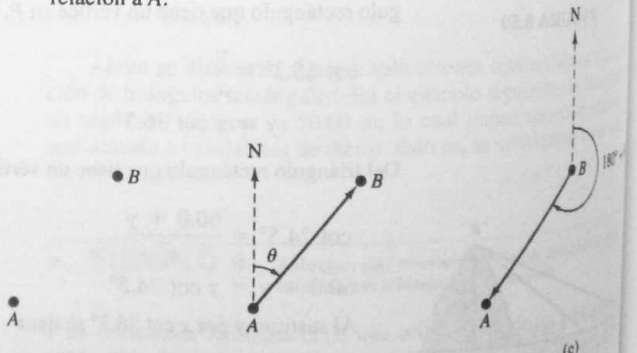


FIGURA 8.53

▸ EJEMPLO 6 *Solución del enunciado de un problema que implica un triángulo rectángulo*

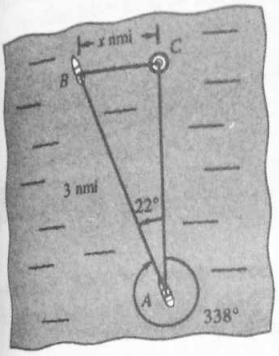


FIGURA 8.54

Un navegante en un buque con un curso de 338° a 12 nudos (millas náuticas por hora), observa un faro al norte del buque. Quince minutos después el faro está al este del buque. ¿Qué tan lejos se encuentra el buque del faro en ese momento?

Solución *Véase* la Figura 8.54, donde x millas náuticas es la distancia a determinarse, C es la posición del faro, A la del buque en el momento de la observación inicial y B la del buque 15 min después. Como el buque navega a 12 nudos, entonces recorre una distancia de 3 nmi en 15 min. Debido a que el curso es 338°, el ángulo en A del triángulo es 360° – 338°, o 22°. Del triángulo rectángulo, se tiene

$$\operatorname{sen} 22° = \frac{x}{3}$$

$$x = 3 \operatorname{sen} 22°$$

$$x = 1.1$$

Conclusión: El faro se encuentra a 1.1 nmi del buque en el momento indicado. ◂

EJERCICIOS 8.3

En los ejercicios 1 a 4, exprese el valor de la función como el valor de función de un ángulo positivo no mayor que 45°.

1. (a) sen 60° (b) cos 84.3° (c) tan 49.8° (d) cot 52.1° (e) csc 67.5°
2. (a) sen 79.6° (b) cos 46° (c) tan 64.3° (d) cot 88.8° (e) sec 59.7°
3. (a) sen 47°18′ (b) cos 71°42′ (c) tan 46° (d) cot 55°6′ (e) sec 64°30′
4. (a) sen 62°12′ (b) cos 80°54′ (c) tan 75°24′ (d) cot 60° (e) csc 49°36′

En los ejercicios 5 a 8, resuelva el triángulo rectángulo donde el ángulo recto se encuentra en el vértice C. Para los valores de la función trigonométrica no utilice la calculadora. Exprese los resultados con la aproximación a dígitos significativos que amerite la información proporcionada.

5. $\alpha = 60°, c = 2.7$
6. $\alpha = 45°, a = 34$
7. $\beta = 45°, a = 56$
8. $\beta = 30°, c = 8.2$

En los ejercicios 9 a 30, resuelva el triángulo rectángulo donde el ángulo recto se encuentra en el vértice C. Para los valores de la función trigonométrica no utilice la calculadora. Exprese los resultados con la aproximación a dígitos significativos que requiera la información proporcionada.

9. $\alpha = 24°, a = 16$
10. $\alpha = 65°, b = 6.3$
11. $\beta = 71°, c = 44$
12. $\beta = 10°, b = 22$
13. $b = 26, c = 38$
14. $a = 3.4, b = 5.7$
15. $\beta = 37.4°, a = 4.18$
16. $\alpha = 52.3°, c = 48.5$
17. $\alpha = 16.9°, a = 1.36$
18. $\beta = 29.7°, a = 0.534$
19. $a = 63.6, b = 58.1$
20. $a = 154, c = 393$

21. $\alpha = 58.43°$, $c = 625.3$

22. $\beta = 18.63°$, $c = 52.10$

23. $\beta = 40.92°$, $b = 36.72$

24. $\alpha = 70.25°$, $a = 6\,584$

25. $a = 312.7$, $c = 809.0$

26. $b = 4.218$, $c = 6.759$

27. $\beta = 65°18'$, $c = 39.2$

28. $\alpha = 35°48'$, $c = 25.0$

29. $\alpha = 29°36'$, $b = 287$

30. $\beta = 81°12'$, $a = 43.6$

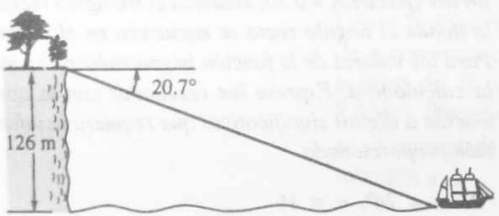
En los ejercicios 31 a 34, halle el área del triángulo del ejercicio indicado.

31. Ejercicio 11 **32.** Ejercicio 18

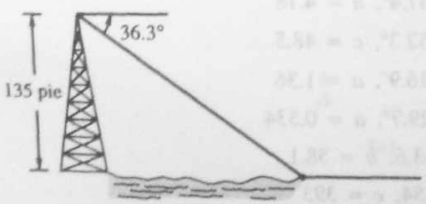
33. Ejercicio 25 **34.** Ejercicio 28

En los ejercicios 35 a 44, la solución del enunciado del problema implica un triángulo rectángulo. Escriba una conclusión.

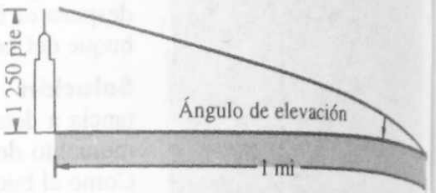
35. Desde la cima de un acantilado de 126 m de altura, el ángulo de depresión de un barco es 20.7°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la base del acantilado?



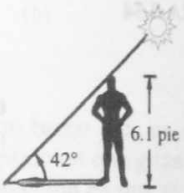
36. Una torre de 135 pie de altura se localiza en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla del lado opuesto del lago es 36.3°. ¿Cuál es la distancia a través del lago?



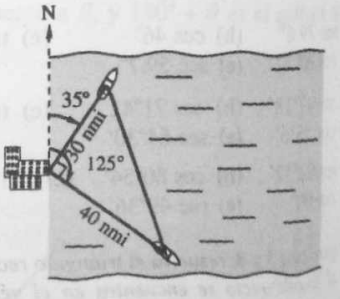
37. El edificio del Empire State tiene 1 250 pie de altura. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la parte superior desde un punto en el suelo a una milla (5 280 pie) de distancia de la base del edificio?



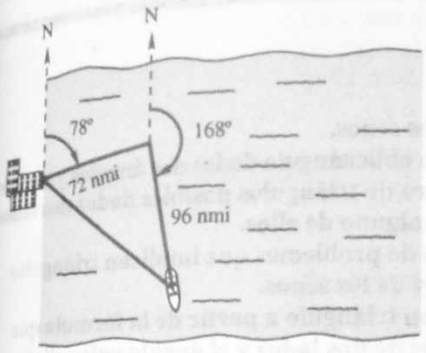
38. Si el ángulo de elevación del Sol es 42°, ¿cuál es la longitud de la sombra que proyecta en el suelo un hombre que mide 6.1 pie de estatura?



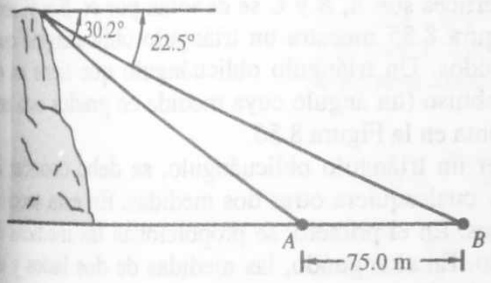
39. Dos barcos salen de un puerto al mismo tiempo. El primer barco navega con un curso de 35° a 15 nudos mientras que el segundo navega con un curso de 125° a 20 nudos. Determine **(a)** la distancia entre los barcos después de 2 h, **(b)** el acimut del primer barco con respecto al segundo y **(c)** el acimut del segundo barco con respecto al primero.



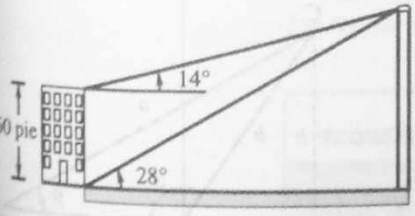
40. Un buque sale de un puerto y navega durante 4 h con un curso de 78° a 18 nudos. Después el buque vira su curso a 168° y navega durante 6 h a 16 nudos. Luego de 10 h **(a)** ¿cuál es la distancia del buque al puerto? y **(b)** ¿cuál es el acimut del buque con respecto al puerto?



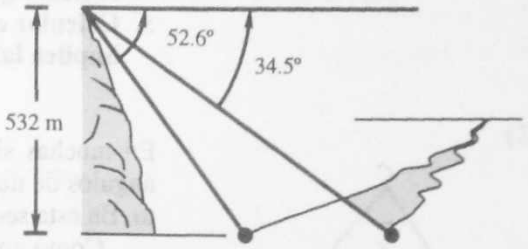
41. Los puntos A y B se encuentran en la misma línea horizontal con la base de una colina y los ángulos de depresión desde la cima de la colina son 30.2° y 22.5°, respectivamente. Si la distancia entre A y B es 75.0 m, ¿cuál es la altura de la colina?



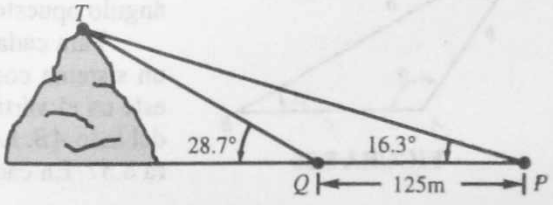
42. Desde la parte superior de un edificio de 60 pie de altura, el ángulo de elevación de un poste es 14°. En la base del edificio el ángulo de elevación de la punta del poste es 28°. Encuentre (a) la altura del poste y (b) la distancia del poste al edificio.



43. Desde la cima de una montaña 532 m más alta que un río cercano, el ángulo de depresión de un punto P situado en la ribera más próxima es 52.6°, y el ángulo de depresión de un punto Q directamente opuesto en el otro lado es 34.5°. Los puntos P y Q, así como la base de la montaña, están en la misma línea horizontal. Encuentre la distancia a través del río de P a Q.



44. El punto T se encuentra en la cima de una montaña. Desde un punto P en el suelo, el ángulo de elevación de T es 16.3°. Desde un punto Q, en la misma línea horizontal que P y la base de la montaña, el ángulo de elevación de T es 28.7°. Determine la altura de la montaña si la distancia entre P y Q es 125 m.



45. Considere una tabla de valores de las funciones trigonométricas que aparecen casi en cualquier libro de texto previo a 1990. Explique cómo la construcción de la tabla emplea el hecho de que *cualquier función trigonométrica de un ángulo agudo es la cofunción del complemento del ángulo.*

8.4 LEY DE LOS SENOS

OBJETIVOS

1. **Aprender la ley de los senos.**
2. **Resolver un triángulo oblicuángulo dados dos ángulos y un lado.**
3. **Determinar el número de triángulos posibles dados dos lados y un ángulo opuesto a alguno de ellos.**
4. **Resolver enunciados de problemas que implican triángulos oblicuángulos y la ley de los senos.**
5. **Calcular el área de un triángulo a partir de la fórmula que implica las longitudes de dos lados y el ángulo entre ellos.**

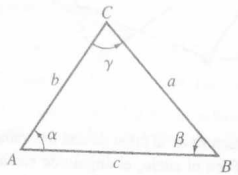


FIGURA 8.55

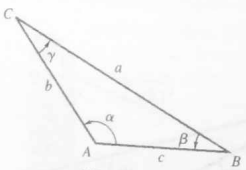


FIGURA 8.56

En muchas situaciones prácticas se desea determinar los lados y los ángulos de un **triángulo oblicuángulo,** el cual no contiene ángulo recto. En esta sección y en la siguiente se resolverán dichos triángulos.

Como en el caso de los triángulos rectángulos, los vértices de los triángulos oblicuángulos se denotan por A, B y C, y las longitudes de los lados opuestos a ellos se designan por a, b y c, respectivamente. Los ángulos cuyos vértices son A, B y C se denotan por α, β y γ, respectivamente. La Figura 8.55 muestra un triángulo oblicuángulo que tiene sus ángulos agudos. Un triángulo oblicuángulo que tiene en el vértice A un ángulo obtuso (un ángulo cuya medida en grados está entre 90 y 180) se presenta en la Figura 8.56.

A fin de resolver un triángulo oblicuángulo, se debe conocer la longitud de un lado y cualesquiera otras dos medidas. En esta sección se consideran dos casos. En el primero, se proporcionan las medidas de dos ángulos y un lado. En el segundo, las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos son conocidos.

Para cada uno de los triángulos de las figuras 8.55 y 8.56 se elige un sistema coordenado cartesiano rectangular de modo que el origen esté en el vértice A y la parte positiva del eje x se encuentre a lo largo del lado AB. Los triángulos y ejes coordenados se muestran en la Figura 8.57. En cada triángulo el ángulo α está en posición estándar. Tam

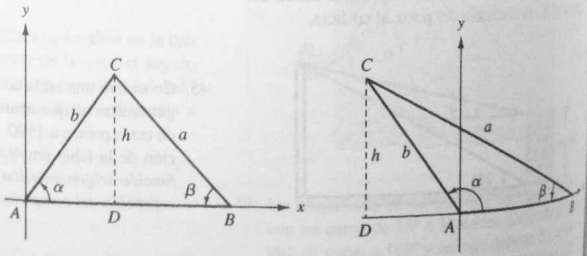


FIGURA 8.57

bién para cada triángulo se dibujó un segmento rectilíneo a través de C paralelo al eje y e intersecta al eje x en D. Sea $h = |\overline{DC}|$. En cualquier caso

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b}$$

$$h = b \operatorname{sen}\alpha \tag{1}$$

También del triángulo rectángulo BDC, en cualquier caso

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}$$

$$h = a \operatorname{sen}\beta \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1), se tiene

$$a \operatorname{sen}\beta = b \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \tag{3}$$

Si los ejes coordenados se eligen de modo que el origen esté en A y el lado positivo del eje x esté a lo largo de AC, entonces mediante un argumento semejante, se obtiene

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \tag{4}$$

Observe que (4) es válida si el triángulo es un triángulo rectángulo. Esto es, si $\gamma = 90°$, entonces como $\operatorname{sen} 90° = 1$, (4) se convierte en

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{1}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$$

que es la primera fórmula del Teorema 1 de la Sección 8.3.

De (3) y (4) se tiene el teorema siguiente, conocido como la *ley de los senos*.

TEOREMA 1 *Ley de los senos*

Si α, β y γ son los ángulos de cualquier triángulo y a, b, y c son, respectivamente, las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos, entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

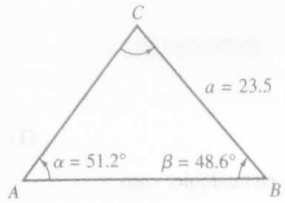


FIGURA 8.58

▸ EJEMPLO 1 *Resolución de un triángulo oblicuángulo conocidos dos ángulos y un lado*

Resuelva el triángulo para el cual $\alpha = 51.2°$, $\beta = 48.6°$ y $a = 23.5$.

Solución La Figura 8.58 muestra el triángulo. Debido a que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,

$$\begin{aligned}\gamma &= 180° - \alpha - \beta \\ &= 180° - 51.2° - 48.6° \\ &= 80.2°\end{aligned}$$

De la ley de los senos

$$\frac{23.5}{\text{sen } 51.2°} = \frac{b}{\text{sen } 48.6°}$$

$$b = \frac{23.5(\text{sen } 48.6°)}{\text{sen } 51.2°}$$

$$b = 22.6$$

También de la ley de los senos

$$\frac{23.5}{\text{sen } 51.2°} = \frac{c}{\text{sen } 80.2°}$$

$$c = \frac{23.5(\text{sen } 80.2°)}{\text{sen } 51.2°}$$

$$c = 29.7$$

▸ EJEMPLO 2 *Solución del enunciado de un problema que implica un triángulo oblicuángulo y la ley de los senos*

Sobre una colina inclinada, con respecto a la horizontal, un ángulo de 14.2°, se encuentra una torre vertical. En un punto P que está a 62.5 m del pie de la torre colina abajo, el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es 43.6°. ¿Cuál es la altura de la torre?

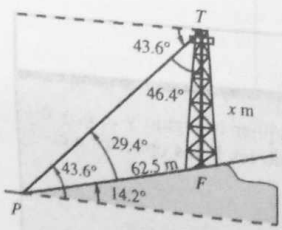


FIGURA 8.59

Solución *Véase* la Figura 8.59, donde x metros es la altura de la torre, la parte superior de la torre se denota por T, y F representa un punto en la base de la torre. Se tiene un triángulo oblicuángulo con vértices en P, T y F. El ángulo en P del triángulo se determina al calcular 43.6° – 14.2°, lo cual es 29.4°. El ángulo en T del triángulo se determina calculando 90° – 43.6°, lo cual es 46.4°. De modo que se conocen las medidas de dos ángulos y un lado del triángulo. De la ley de los senos

$$\frac{x}{\text{sen } 29.4^\circ} = \frac{62.5}{\text{sen } 46.4^\circ}$$

$$x = \frac{62.5(\text{sen } 29.4^\circ)}{\text{sen } 46.4^\circ}$$

$$x = 42.4$$

Conclusión: La altura de la torre es de 42.4 m. ◀

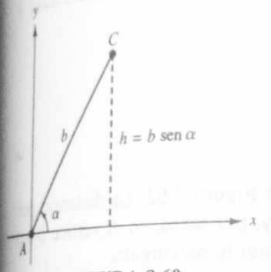


FIGURA 8.60

La ley de los senos también puede emplearse cuando las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos son conocidos. Sin embargo, no siempre se tiene un único triángulo. Suponga, por ejemplo, que se conocen a, b y α, donde α es un ángulo agudo. Para construir un triángulo que tenga las medidas dadas, considere el ángulo en posición estándar en un sistema coordenado cartesiano rectangular de modo que el vértice A está en el origen. *Véase* la Figura 8.60. Como se conoce b, se traza un segmento rectilíneo AC de longitud b en el lado terminal de α. De esta manera se determina la posición del vértice C. El lado BC de longitud a unidades es opuesto al vértice A y el vértice B debe estar sobre el eje x. Para localizar la posición posible de B, primero dibuje el segmento rectilíneo perpendicular al eje x desde C. Si dicho segmento tiene h unidades de longitud, entonces

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{b}$$

$$h = b \text{ sen } \alpha$$

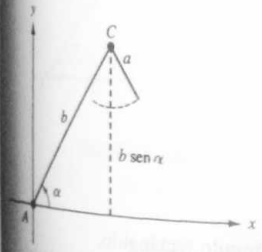


FIGURA 8.61

La posición del vértice B dependerá de la relación entre a y b sen α. Existen cuatro posibilidades: $a < b$ sen α; $a = b$ sen α; b sen $\alpha < a < b$ y $a \geq b$. Se considera cada caso por separado y después de su estudio se presenta un ejemplo ilustrativo donde interviene un conjunto particular de valores de a, b y α.

Posibilidad 1: $a < b$ sen α. *Véase* la Figura 8.61. Un lado BC de a unidades de longitud no intersecta al eje x. Así no existe triángulo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

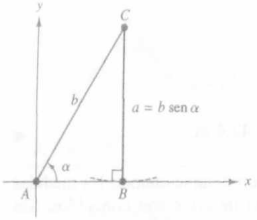
Sea $a = 2.3$, $b = 4.5$ y $\alpha = 42°$. De la ley de los senos

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta}$$

$$\frac{2.3}{\text{sen } 42^\circ} = \frac{4.5}{\text{sen } \beta}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{4.5(\text{sen } 42^\circ)}{2.3}$$

$$\text{sen } \beta = 1.309$$



α es agudo y $a = b \operatorname{sen} \alpha$
un triángulo rectángulo
FIGURA 8.62

Como $|\operatorname{sen} \beta|$ no puede ser mayor que 1, esta ecuación no tiene solución. De modo que no existe un triángulo que satisfaga la información proporcionada.

Observe que este conjunto de valores satisface la Posibilidad 1 porque

$$b \operatorname{sen} \alpha = 4.5(\operatorname{sen} 42°)$$
$$= 3.01$$

Además, $a = 2.3$ y $2.3 < 3.01$.

Posibilidad 2: $a = b \operatorname{sen} \alpha$. *Véase* la Figura 8.62. La distancia perpendicular de C al eje x es a unidades y, por tanto, en el vértice B hay un ángulo recto. De ello se tiene un triángulo rectángulo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Suponga que $a = 2.0$, $b = 4.0$ y $\alpha = 30°$. De la ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\frac{2.0}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{4.0}{\operatorname{sen} \beta}$$

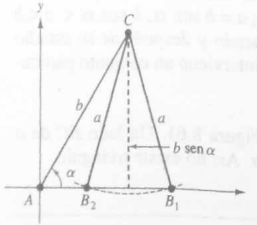
$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4.0(\operatorname{sen} 30°)}{2.0}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4.0(\frac{1}{2})}{2.0}$$

$$\operatorname{sen} \beta = 1$$

Por tanto, $\beta = 90°$ y el triángulo es un triángulo rectángulo.

La Posibilidad 2 es válida porque para este conjunto de valores $b \operatorname{sen} \alpha = 4.0(\operatorname{sen} 30°)$; esto es, $b \operatorname{sen} \alpha = 2$ y $a = 2$.



α es agudo y $b \operatorname{sen} \alpha < a < b$
dos triángulos
FIGURA 8.63

Posibilidad 3: $b \operatorname{sen} \alpha < a < b$. *Véase* la Figura 8.63. Existen dos posiciones posibles del vértice B sobre el eje x, mostradas en la figura como B_1 y B_2. En consecuencia, existen dos triángulos posibles.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Sea $a = 25.2$, $b = 30.5$ y $\alpha = 54.2°$. De la ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\frac{25.2}{\operatorname{sen} 54.2°} = \frac{30.5}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{30.5(\operatorname{sen}54.2°)}{25.2}$$

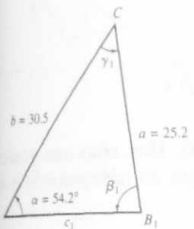
$$\operatorname{sen}\beta = 0.9817$$

Se tienen dos ángulos β cuya medida en grados está entre 0 y 180 para los cuales sen $\beta = 0.9817$. Sea β_1 el ángulo agudo. De una calculadora

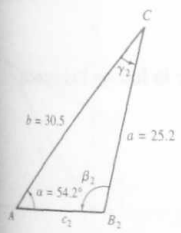
$$\beta_1 = 79.0°$$

Si β_2 es el ángulo obtuso, entonces como β_1 es el ángulo de referencia asociado a β_2, se tiene

$$\begin{aligned}\beta_2 &= 180° - 79.0° \\ &= 101.0°\end{aligned}$$



(a)



(b)

FIGURA 8.64

Por tanto, existen dos triángulos. La Figura 8.64(a) muestra el triángulo para el cual $a = 25.2$, $b = 30.5$, $\alpha = 54.2°$ y $\beta_1 = 79.0°$. La Figura 8.64(b) presenta el triángulo para el cual $a = 25.2$, $b = 30.5$, $\alpha = 54.2°$ y $\beta_2 = 101.0°$. Así se tienen dos triángulos por resolver.

Para el triángulo de la Figura 8.64(a), se determina γ_1 y c_1.

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 180° - \alpha - \beta_1 \\ &= 180° - 54.2° - 79.0° \\ &= 46.8°\end{aligned}$$

De la ley de los senos

$$\frac{c_1}{\operatorname{sen}\gamma_1} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta_1}$$

$$\frac{c_1}{\operatorname{sen}46.8°} = \frac{30.5}{\operatorname{sen}79.0°}$$

$$c_1 = \frac{30.5(\operatorname{sen}46.8°)}{\operatorname{sen}79.0°}$$

$$c_1 = \frac{30.5(0.7290)}{0.9816}$$

$$c_1 = 22.7$$

Ahora se determina γ_2 y c_2 para el triángulo de la Figura 8.64(b).

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= 180° - \alpha - \beta_2 \\ &= 180° - 54.2° - 101.0° \\ &= 24.8°\end{aligned}$$

De la ley de los senos

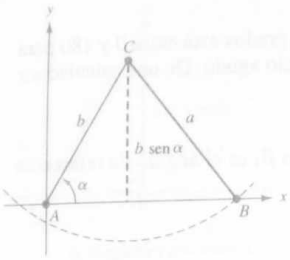
$$\frac{c_2}{\operatorname{sen}\gamma_2} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta_2}$$

$$\frac{c_2}{\operatorname{sen}24.8°} = \frac{30.5}{\operatorname{sen}101.0°}$$

$$c_2 = \frac{30.5(\operatorname{sen} 24.8°)}{\operatorname{sen} 101.0°}$$

$$c_2 = \frac{30.5(0.4195)}{0.9816}$$

$$c_2 = 13.0$$



un triángulo
FIGURA 8.65

El conjunto de valores dados satisface la Posibilidad 3 porque

$$b \operatorname{sen} \alpha = 30.5 \operatorname{sen} 54.2°$$
$$= 24.7$$

Además, $a = 25.2$, $b = 30.5$ y $24.7 < 25.2 < 30.5$.

Posibilidad 4: $a \geq b$. *Véase* la Figura 8.65. Hay sólo una posición potencial de B sobre el eje x. Por tanto, existe un triángulo. Si $a = b$ entonces el triángulo es isósceles.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Suponga que $a = 5.21$, $b = 3.06$ y $\alpha = 47.6°$. De la ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\frac{5.21}{\operatorname{sen} 47.6°} = \frac{3.06}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{3.06(\operatorname{sen} 47.6°)}{5.21}$$

$$\operatorname{sen} \beta = 0.4337$$

Existen dos ángulos que miden entre 0° y 180°, cuyo seno tiene un valor de 0.4337. Pero como $a > b$, se deduce que $\alpha > \beta$; por tanto, $47.6° > \beta$. De modo que se tiene sólo un valor para β. De una calculadora

$$\beta = 25.7°$$

Se determina γ y c para este triángulo.

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$
$$= 180° - 47.6° - 25.7°$$
$$= 106.7°$$

De la ley de los senos

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{c}{\text{sen } 106.7^\circ} = \frac{5.21}{\text{sen } 47.6^\circ}$$

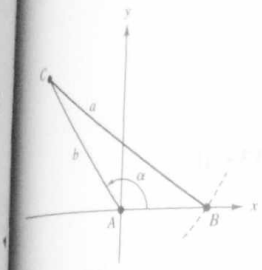
$$c = \frac{5.21(\text{sen } 106.7^\circ)}{\text{sen } 47.6^\circ}$$

$$c = 6.76$$

Es evidente que el conjunto de valores dado satisface la Posibilidad 4 porque $a = 5.21$, $b = 3.06$ y $5.21 > 3.06$. ◀

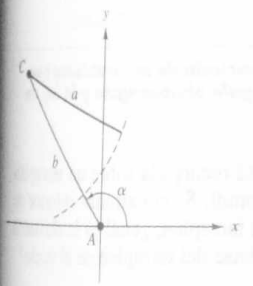
Si un ángulo de un triángulo es obtuso, la longitud del lado opuesto a él debe ser mayor que las longitudes de los otros lados. Por tanto, si se tienen a, b y α, siendo α obtuso, entonces un triángulo es posible, si y sólo si, $a > b$. La Figura 8.66(a) muestra un triángulo donde α es obtuso y $a > b$. La Figura 8.66(b) indica que no existe triángulo alguno cuando α es obtuso y $a < b$.

Debido a los diversos casos que pueden presentarse, cuando se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, a este caso se le denomina *caso ambiguo*. Se obtienen los mismos resultados si los lados conocidos y el ángulo opuesto a uno de ellos se representan por otros símbolos tales como c, b y γ; b, a y β; y así sucesivamente.



α es obtuso y $a > b$
un triángulo

(a)



α es obtuso y $a < b$
no existe triángulo

(b)

FIGURA 8.66

▸ EJEMPLO 3 *Determinación del número de triángulos posibles dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos*

En los incisos (a) al (d) están las medidas de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos; o sea, el caso ambiguo. Determine el número de triángulos posibles. **(a)** $c = 2.0$, $b = 6.0$, $\gamma = 30°$; **(b)** $b = 32.4$, $a = 20.6$, $\beta = 52.1°$; **(c)** $a = 10.3$, $c = 16.5$, $\alpha = 23.8°$; **(d)** $b = 32$, $c = 25$ y $\beta = 114°$.

Solución

(a) El ángulo conocido es γ y $c < b$. La longitud del lado opuesto al ángulo conocido es menor que la del otro lado conocido. Por tanto, primero se calcula b sen γ.

$$b \text{ sen } \gamma = 6.0 \text{ sen } 30^\circ$$
$$= 6.0(\tfrac{1}{2})$$
$$= 3.0$$

Como $c = 2.0$,

$$c < b \text{ sen } \gamma$$

En consecuencia existe la Posibilidad 1: no hay triángulo.

(b) El ángulo dado es β y $b > a$. Aquí la longitud del lado opuesto al ángulo conocido es mayor que la longitud del otro lado dado. Por tanto, de la Posibilidad 4, existe un triángulo.

(c) El ángulo conocido es α y $a < c$. La longitud del lado opuesto al ángulo dado es menor que la longitud del otro lado conocido. De modo que se determina c sen α.

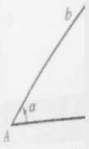
$$\begin{aligned} c \operatorname{sen}\alpha &= 16.5 \operatorname{sen} 23.8° \\ &= 16.5(0.4035) \\ &= 6.66 \end{aligned}$$

Como $a = 10.3$, $c = 16.5$ y $6.66 < 10.3 < 16.5$,

$$c \operatorname{sen}\alpha < a < c$$

Por tanto, de la Posibilidad 3, existen dos triángulos.

(d) El ángulo dado es β, el cual es obtuso. Como $b = 32$ y $c = 25$, la longitud del lado opuesto al ángulo conocido es mayor que la del otro lado dado. En consecuencia existe sólo un triángulo. ◂



FI

▸ EJEMPLO 4 *Solución del enunciado de un problema que implica un triángulo oblicuángulo y la ley de los senos*

Una escalera de 35.4 pie de longitud está recargada sobre un terraplén inclinado 62.5° con respecto a la horizontal. Si el extremo inferior de la escalera está a 10.2 pie de la base del terraplén, ¿cuál es la distancia del extremo superior de la escalera a la base del terraplén en el suelo?

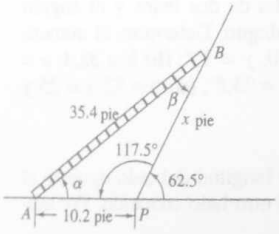


FIGURA 8.67

Solución *Véase* la Figura 8.67, donde x pies es la distancia a determinar, B es el punto en el extremo superior de la escalera, A es el punto en el extremo inferior de la escalera y P es el punto en la base del terraplén. El ángulo en P del triángulo se determina al calcular $180° - 62.5°$, lo cual es 117.5°. Se tiene un triángulo oblicuángulo para el cual las medidas de dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos se conocen. De modo que se tiene el caso ambiguo. Como el ángulo conocido es obtuso y la longitud del lado opuesto a este ángulo es mayor que la del otro lado conocido, existe un triángulo.

Antes de que se pueda aplicar la ley de los senos para determinar x, se debe conocer la medida del ángulo en A del triángulo. Sea α este ángulo, y β el ángulo del triángulo en B. Primero se determina β a partir de la ley de los senos.

$$\frac{35.4}{\operatorname{sen} 117.5°} = \frac{10.2}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{10.2(\operatorname{sen} 117.5°)}{35.4}$$

$$\operatorname{sen}\beta = 0.2556$$

$$\beta = 14.8°$$

Como $\alpha + \beta + 117.5° = 180°$,

$$\begin{aligned}\alpha &= 180° - \beta - 117.5° \\ &= 180° - 14.8° - 117.5° \\ &= 47.7°\end{aligned}$$

De la ley de los senos

$$\frac{x}{\text{sen } 47.7°} = \frac{35.4}{\text{sen } 117.5°}$$

$$x = \frac{35.4(\text{sen } 47.7°)}{\text{sen } 117.5°}$$

$$x = 29.5$$

Conclusión: La distancia desde el extremo superior de la escalera a la base del terraplén en el suelo es de 29.5 pie. ◀

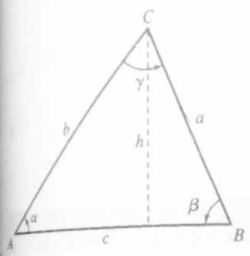


FIGURA 8.68

La Figura 8.68 muestra un triángulo oblicuángulo con los símbolos acostumbrados denotando vértices, ángulos y longitudes de los lados. Si se considera como la base el lado AB, y h unidades es la longitud de la altura, entonces, si K unidades cuadradas es el área del triángulo,

$$K = \tfrac{1}{2}ch$$

Como $h = b \text{ sen } \alpha$, se tiene

$$K = \tfrac{1}{2}c(b \text{ sen } \alpha)$$

$$K = \tfrac{1}{2}bc \text{ sen } \alpha \qquad (5)$$

Otra ecuación que proporciona h es $h = a \text{ sen } \beta$. Al sustituir este valor de h en $K = \frac{1}{2}ch$, se obtiene

$$K = \tfrac{1}{2}c(a \text{ sen } \beta)$$

$$K = \tfrac{1}{2}ac \text{ sen } \beta \qquad (6)$$

Si la base se considera como el lado AC, entonces mediante un argumento semejante, se obtiene

$$K = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma \qquad (7)$$

TEOREMA 2 *Área de un triángulo*

La medida del área de un triángulo es un medio del producto de las longitudes de dos lados y el seno del ángulo comprendido entre los dos lados.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Se calculará el área del triángulo del ejemplo 1 mediante cada una de las tres fórmulas (5), (6) y (7). Si K unidades cuadradas es el área del triángulo,

$$K = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha \qquad K = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen}\beta$$
$$= \tfrac{1}{2}(22.6)(29.7)(\operatorname{sen}51.2°) \qquad = \tfrac{1}{2}(23.5)(29.7)(\operatorname{sen}48.6°$$
$$= 262 \qquad = 262$$
$$K = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma$$
$$= \tfrac{1}{2}(23.5)(22.6)(\operatorname{sen}80.2°)$$
$$= 262$$

EJERCICIOS 8.4

En los ejercicios 1 a 4, se conocen dos ángulos de un triángulo y la longitud del lado opuesto a uno de ellos. Determine la longitud del lado opuesto al otro ángulo dado, pero sin emplear una calculadora para los valores de las funciones trigonométricas. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que amerite la información proporcionada.

1. $a = 4.6,\ \alpha = 45°,\ \beta = 60°$
2. $b = 23,\ \beta = 45°,\ \gamma = 30°$
3. $c = 88,\ \alpha = 30°,\ \gamma = 120°$
4. $a = 9.5,\ \alpha = 135°,\ \beta = 30°$

En los ejercicios 5 a 12, resuelva el triángulo. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que requiera la información proporcionada.

5. $\alpha = 34°,\ \beta = 71°,\ a = 24$
6. $\alpha = 62°,\ \gamma = 55°,\ a = 8.3$
7. $\beta = 48.6°,\ \gamma = 61.4°,\ c = 53.2$
8. $\alpha = 26.5°,\ \beta = 32.7°,\ b = 187$
9. $\alpha = 73.2°,\ \gamma = 23.8°,\ b = 2.30$
10. $\beta = 84.6°,\ \gamma = 51.9°,\ a = 46.4$
11. $\alpha = 52°42',\ \beta = 75°36',\ b = 408$
12. $\beta = 101°6',\ \gamma = 23°24',\ c = 0.149$

En los ejercicios 13 a 24, se proporcionan las longitudes de los lados de un triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos. Por tanto, se tiene el caso ambiguo. Determine el número de triángulos que satisfagan el conjunto de condiciones dado y resuelva cada triángulo. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que amerite la información proporcionada.

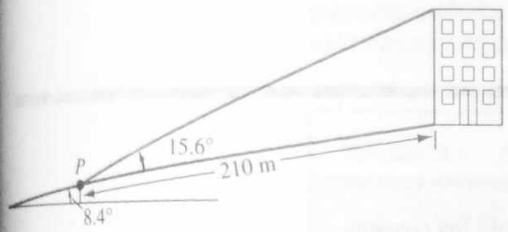
13. $a = 6.4,\ b = 4.7,\ \alpha = 42°$
14. $b = 27,\ a = 46,\ \beta = 38°$
15. $b = 17,\ c = 34,\ \beta = 30°$
16. $c = 18.3,\ b = 12.5,\ \gamma = 58.3°$
17. $c = 42.5,\ a = 68.0,\ \gamma = 35.2°$
18. $a = 245,\ b = 302,\ \alpha = 136.4°$
19. $b = 846,\ a = 431,\ \beta = 116.4°$
20. $a = 40.2,\ b = 52.4,\ \alpha = 41.5°$
21. $a = 54.0,\ c = 83.7,\ \alpha = 43.6°$
22. $c = 9.04,\ a = 3.52,\ \gamma = 128.1°$
23. $b = 3.562,\ c = 4.210,\ \beta = 50.23°$
24. $b = 5\,649,\ a = 6\,382,\ \beta = 59.43°$

En los ejercicios 25 a 32, determine el área del triángulo del ejercicio indicado.

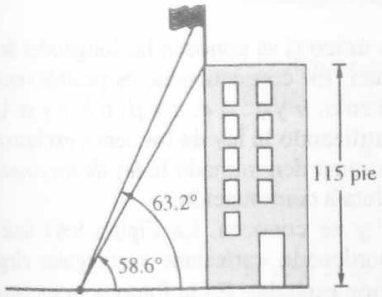
25. Ejercicio 5
26. Ejercicio 6
27. Ejercicio 9
28. Ejercicio 10
29. Ejercicio 13
30. Ejercicio 16
31. Ejercicio 19
32. Ejercicio 22

En los ejercicios 33 a 38, la solución del enunciado del problema implica un triángulo oblicuángulo. No olvide escribir una conclusión.

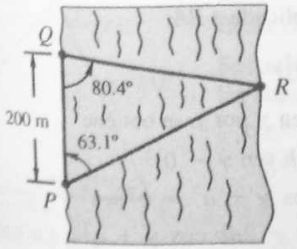
33. Un edificio se localiza al final de una calle que está inclinada en un ángulo de 8.4° con respecto a la horizontal. En un punto P que está a 210 m calle abajo del edificio, el ángulo subtendido por el edificio es de 15.6°. ¿Cuál es la altura del edificio?



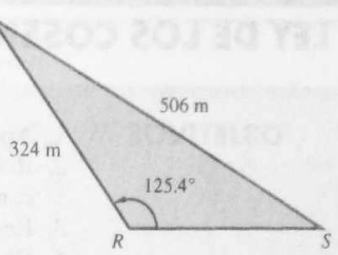
34. Un asta está situada en la parte superior de un edificio de 115 pie de altura. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación de los extremos superior e inferior del asta son 63.2° y 58.6°, respectivamente. ¿Cuál es la longitud del asta?



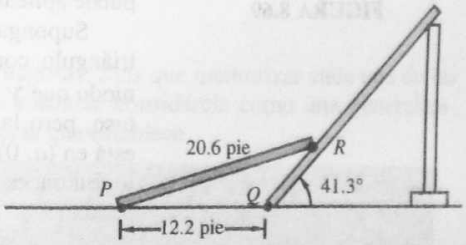
35. Para determinar la distancia a través de un río recto, un topógrafo elige los puntos P y Q en la ribera, donde la distancia entre P y Q es 200 m. En cada uno de estos puntos se observa el punto R en la ribera opuesta. El ángulo que tiene lados PQ y PR mide 63.1°, y el ángulo cuyos lados son PQ y QR mide 80.4°. ¿Cuál es la distancia a través del río?



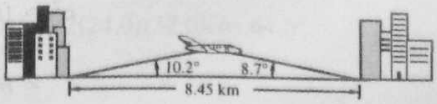
36. Una parcela triangular con vértices R, S y T se delimita por una cerca, pero se advierte la ausencia de la marca del lindero en S. Del título de propiedad, se sabe que la distancia de T a R es 324 m, la distancia de T a S es 506 m y el ángulo en R del triángulo mide 125.4°. Determine la ubicación de S calculando la distancia de R a S.



37. Una rampa está inclinada a un ángulo de 41.3° con respecto del suelo. Un extremo de una tabla de 20.6 pie de longitud se localiza en el suelo en un punto P que está a 12.2 pie de la base Q de la rampa, y el otro extremo reposa sobre la rampa en un punto R. Determine la distancia desde el punto Q hacia arriba de la rampa hasta el punto R.



38. En un momento determinado, cuando un avión voló sobre un camino recto que une a dos ciudades pequeñas, los ángulos de depresión de ambas fueron de 10.2° y 8.7°. **(a)** Determine las distancias rectas desde el avión a cada una de las ciudades en ese momento si la separación entre ambas es de 8.45 km. **(b)** Determine la altura del avión en ese momento.



39. Escriba la ley de los senos únicamente en palabras. No emplee ningún símbolo para las medidas de los lados y de los ángulos de un triángulo.

40. Suponga que resuelve un triángulo cuando las medidas de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos se conocen. Explique por qué se refiere a esta situación como el *caso ambiguo*.

8.5 LEY DE LOS COSENOS

OBJETIVOS

1. **Aprender la ley de los cosenos.**
2. **Resolver un triángulo oblicuángulo dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.**
3. **Resolver un triángulo oblicuángulo dados los tres lados.**
4. **Determinar el área de un paralelogramo.**
5. **Resolver enunciados de problemas que implican un triángulo oblicuángulo y la ley de los cosenos.**

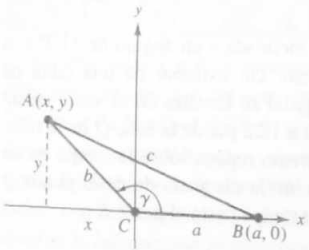


FIGURA 8.69

Se determina un triángulo único si se conocen las longitudes de dos lados y el ángulo que forman. En consecuencia, es posible resolver un triángulo cuando se conocen a, b y γ; o a, c y β; o b, c y α. La solución no puede obtenerse utilizando la ley de los senos exclusivamente. Sin embargo, existe un teorema denominado la *ley de los cosenos*, que puede aplicarse y que se trata a continuación.

Suponga que a, b y γ se conocen. La Figura 8.69 muestra un triángulo con sistema coordenado cartesiano rectangular elegido de modo que γ esté en posición estándar. En la figura γ es un ángulo obtuso, pero la discusión también es válida si γ es agudo. El vértice B está en $(a, 0)$. Para determinar las coordenadas de A, sea (x, y) el punto. Entonces

$$\cos \gamma = \frac{x}{b} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \gamma = \frac{y}{b}$$

Por tanto,

$$x = b \cos \gamma \qquad \text{y} \qquad y = b \operatorname{sen} \gamma$$

De la fórmula de la distancia aplicada a BA,

$$c^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$$

Al sustituir $b \cos \gamma$ por x y $b \operatorname{sen} \gamma$ por y, se obtiene

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \cos \gamma - a)^2 + (b \operatorname{sen} \gamma - 0)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos \gamma + a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \\ &= b^2(\cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \gamma) - 2ab \cos \gamma + a^2 \end{aligned}$$

Como $\cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \gamma = 1$, se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Esta ecuación proporciona una forma de la ley de los cosenos. Las otras dos formas se obtienen de manera semejante teniendo a β o α en posición estándar en el sistema coordenado cartesiano rectangular. A continuación se enuncia formalmente esta ley.

TEOREMA 1 *Ley de los cosenos*

Si α, β y γ son los ángulos de cualquier triángulo y a, b y c son, respectivamente, las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Observe que si $\gamma = 90°$, se tiene un triángulo rectángulo, y de la ley de los cosenos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos 90° \\ &= a^2 + b^2 - 2ab(0) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

lo cual es el teorema de Pitágoras. Más que memorizar cada una de las fórmulas de la ley de los cosenos, considérela como una generalización del teorema de Pitágoras que establece

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble del producto de los otros dos lados y el coseno del ángulo que forman.

▸ EJEMPLO 1 *Solución de un triángulo dados dos lados y el ángulo que forman*

Resuelva el triángulo para el cual $a = 24.0$, $c = 32.0$ y $\beta = 64.0°$.

Solución El triángulo se muestra en la Figura 8.70. De la ley de los cosenos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$b^2 = (24.0)^2 + (32.0)^2 - 2(24.0)(32.0)\cos 64.0°$$
$$b^2 = 926.6$$
$$b = 30.4$$

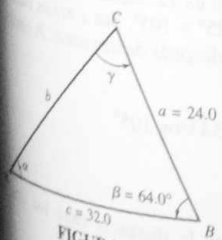


FIGURA 8.70

Como ahora se tienen los valores de b y β, se emplea la ley de los s nos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\frac{24.0}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{30.4}{\operatorname{sen}64.0^\circ}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{24.0(\operatorname{sen}64.0^\circ)}{30.4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0.7096$$

Existen dos ángulos en un triángulo para los cuales el seno es 0.709 45.2° y 134.8°. Sin embargo, como $a < b$, entonces $\alpha < \beta$. Por tan se rechaza 134.8° y

$$\alpha = 45.2^\circ$$

Debido a que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,

$$\gamma = 180^\circ - 45.2^\circ - 64.0^\circ$$
$$= 70.8^\circ$$

La ley de los cosenos puede aplicarse para determinar γ. Si en a los resultados se verifican al comprobar que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. ◂

▸ EJEMPLO 2 *Solución del enunciado de un problema que implica un triángulo oblicuángulo utilizando la ley de los cosenos y de los senos*

Dos barcos salen del mismo puerto simultáneamente. Uno navega co un curso de 125° a 18 nudos mientras el otro lleva un curso de 23 24 nudos. Determine **(a)** la distancia entre los barcos, después de tr horas, y **(b)** el acimut del primer barco con respecto al segundo.

Solución

(a) *Véase* la Figura 8.71. El puerto está en el punto P. Después tres horas el primer barco está en el punto A y el segundo en punto B. Como el primer barco navega a 18 nudos, la distancia P a A es 54 millas náuticas (nmi). El segundo barco navega a nudos, por esto, la distancia de P a B es 72 millas náuticas. El á gulo en P del triángulo es $230^\circ - 125^\circ = 105^\circ$. Sea x millas náu cas la distancia entre los dos barcos después de tres horas. A par de la ley de los cosenos

$$x^2 = (72)^2 + (54)^2 - 2(72)(54)\cos 105^\circ$$
$$x^2 = 10{,}112$$
$$x = 100$$

Conclusión: Después de tres horas la distancia entre los barcos es 100 millas náuticas.

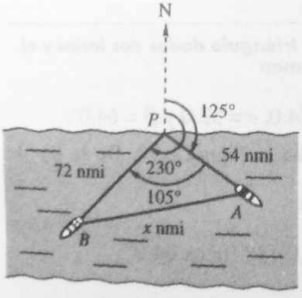


FIGURA 8.71

(b) El acimut del primer barco con respecto al segundo después de tres horas es el acimut de A con respecto a B. *Véase* la Figura 8.72. Para encontrar el acimut, primero se determina α, el ángulo en A del triángulo. A partir de la ley de los senos

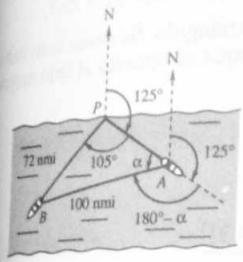


FIGURA 8.72

$$\frac{72}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{100}{\operatorname{sen} 105°}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{72(\operatorname{sen} 105°)}{100}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0.6954$$

$$\alpha = 44°$$

De la Figura 8.72 se observa que el acimut de A con respecto a B es $125° + (180° - \alpha)$, lo cual es $125° + (180° - 44°)$, o $261°$.

Conclusión: Después de tres horas, el acimut del primer barco con respecto al segundo es de 261°. ◀

Como la ley de los cosenos implica las medidas de los tres lados y un ángulo de cualquier triángulo, puede utilizarse esta ley para determinar un ángulo de un triángulo cuando las longitudes de los tres lados se conocen. Por ejemplo, una forma de la ley de los cosenos es

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Si esta ecuación se resuelve para $\cos\gamma$, se obtiene

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Asimismo, las otras dos formas de la ley de los cosenos se pueden emplear para resolverse con respecto a $\cos\beta$ y $\cos\alpha$, y se tiene

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Si se desea determinar los tres ángulos de un triángulo cuando se conocen las longitudes de los tres lados, debe emplearse la ley de los cosenos para encontrar el ángulo mayor, el cual es opuesto al lado mayor. Haciéndolo de esta manera, se puede determinar si el ángulo es obtuso (cuando su coseno sea negativo) o agudo (cuando su coseno sea positivo). En cualquier caso, los otros dos ángulos serán agudos y pueden determinarse a partir de la ley de los senos. No es válido suponer que los otros dos ángulos serán agudos si el primer ángulo determinado no es el mayor.

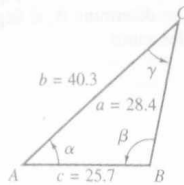


FIGURA 8.73

▸ EJEMPLO 3 *Solución de un triángulo oblicuángulo dados los tres lados*

Resuelva el triángulo para el cual $a = 28.4$, $b = 40.3$ y $c = 25.7$.

Solución La Figura 8.73 muestra el triángulo. Se desea determinar α, β y γ. Se determinará primero β porque es opuesto al lado mayor. A partir de la ley de los cosenos

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\beta = \frac{(28.4)^2 + (25.7)^2 - (40.3)^2}{2(28.4)(25.7)}$$

$$\cos\beta = -0.1075$$

$$\beta = 96.2°$$

Se emplea la ley de los senos para calcular α y γ.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{28.4} = \frac{\operatorname{sen}96.2°}{40.3} \qquad \frac{\operatorname{sen}\gamma}{25.7} = \frac{\operatorname{sen}96.2°}{40.3}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{28.4(\operatorname{sen}96.2°)}{40.3} \qquad \operatorname{sen}\gamma = \frac{25.7(\operatorname{sen}96.2°)}{40.3}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0.7006 \qquad \operatorname{sen}\gamma = 0.6340$$

$$\alpha = 44.5° \qquad \gamma = 39.3°$$

Por supuesto, se podría haber determinado sólo uno de estos ángulos mediante la ley de los senos y después encontrar el tercer ángulo a partir del hecho de que la suma de las medidas en grados es 180. Sin embargo, determinándolos por separado, se verifica que

$$\alpha + \beta + \gamma = 44.5° + 96.2° + 39.3°$$
$$= 180°$$

▸ EJEMPLO 4 *Determinación del área de un paralelogramo*

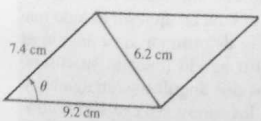


FIGURA 8.74

Las longitudes de los lados de un paralelogramo son 7.4 cm y 9.2 cm, y una de las diagonales tiene una longitud de 6.2 cm. Determine el área del paralelogramo.

Solución El paralelogramo se muestra en la Figura 8.74. Como una diagonal lo divide en dos triángulos congruentes, primero se encontrará el área de ellos. Recuerde de la Sección 8.4 que la medida del área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo formado por ellos. Para utilizar este hecho

se encontrará el ángulo opuesto a la diagonal de longitud 6.2 cm. Si θ es este ángulo, entonces de la ley de los cosenos

$$\cos\theta = \frac{(9.2)^2 + (7.4)^2 - (6.2)^2}{2(9.2)(7.4)}$$

$$\cos\theta = 0.742$$

$$\theta = 42°$$

Ahora puede determinarse el área del triángulo formado por los dos lados y la diagonal proporcionada. Si K centímetros cuadrados es el área de este triángulo,

$$K = \tfrac{1}{2}(7.4)(9.2)\operatorname{sen} 42°$$

$$= 23$$

Así,

$$2K = 46$$

Conclusión: El área del paralelogramo es 46 cm². ◀

EJERCICIOS 8.5

En los ejercicios 1 a 4, se conocen las longitudes de dos lados de un triángulo y el ángulo formado por ellos. Determine la longitud del tercer lado, sin utilizar la calculadora para los valores de las funciones trigonométricas. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que requiera la información proporcionada.

1. $a = 4.5,\ b = 6.3,\ \gamma = 60°$
2. $b = 26,\ c = 37,\ \alpha = 45°$
3. $a = 15,\ c = 22,\ \beta = 135°$
4. $a = 1.4,\ b = 2.1,\ \gamma = 120°$

En los ejercicios 5 a 12, resuelva el triángulo. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que amerite la información indicada.

5. $b = 3.4,\ c = 2.8,\ \alpha = 82°$
6. $a = 43,\ c = 32,\ \beta = 59°$
7. $a = 11.2,\ b = 15.3,\ \gamma = 116.4°$
8. $a = 40.2,\ b = 45.3,\ \gamma = 72.2°$
9. $a = 2045,\ c = 3\,126,\ \beta = 10.52°$
10. $b = 182.4,\ c = 245.1,\ \alpha = 126.81°$
11. $a = 5.26,\ b = 3.74,\ \gamma = 135°12'$
12. $a = 325,\ c = 108,\ \beta = 18°36'$

En los ejercicios 13 a 18, encuentre el área del triángulo del ejercicio indicado.

13. Ejercicio 1 **14.** Ejercicio 4

15. Ejercicio 7 **16.** Ejercicio 8

17. Ejercicio 9 **18.** Ejercicio 10

En los ejercicios 19 a 26, resuelva el triángulo. Exprese los resultados con el número de dígitos de acuerdo con la información proporcionada.

19. $a = 5.2,\ b = 7.1,\ c = 3.5$
20. $a = 8.4,\ b = 2.7,\ c = 7.3$
21. $a = 20.7,\ b = 10.2,\ c = 24.3$
22. $a = 1.24,\ b = 1.56,\ c = 1.38$
23. $a = 408,\ b = 256,\ c = 283$
24. $a = 11.3,\ b = 25.0,\ c = 27.6$
25. $a = 66.92,\ b = 53.46,\ c = 15.78$
26. $a = 718.5,\ b = 634.2,\ c = 528.4$

27. Un triángulo tiene lados que miden 34 cm, 23 cm y 42 cm. **(a)** Determine la medida del ángulo menor. **(b)** Determine el área del triángulo.

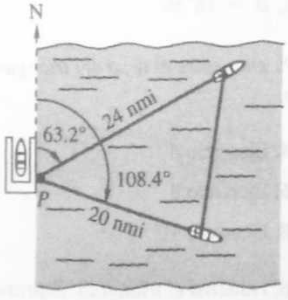
28. Un triángulo tiene lados que miden 2.8 pulg, 3.2 pulg y 4.1 pulg. ¿Cuál es **(a)** la medida del ángulo mayor y **(b)** el área del triángulo?

29. Un paralelogramo tiene lados que miden 10.3 cm y 23.2 cm, y uno de los ángulos mide 54.2°. ¿Cuál es **(a)** la longitud de la diagonal mayor y **(b)** el área del paralelogramo?

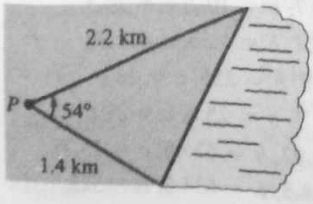
30. Los lados de un paralelogramo miden 15.6 cm y 33.0 cm. Si uno de los ángulos mide 42.6°, determine **(a)** la longitud de la diagonal menor y **(b)** el área del paralelogramo.

En los ejercicios 31 a 40, la solución del enunciado del problema implica un triángulo oblicuángulo. Escriba una conclusión.

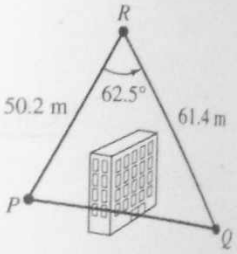
31. A las 9 a.m. un barco abandona el muelle con un curso de 63.2° a una velocidad de 8 nudos. A las 10 a.m. otro barco deja el mismo muelle con un curso de 108.4° a una velocidad de 10 nudos. A las 12 del mediodía **(a)** ¿cuál es la distancia entre los barcos? y **(b)** ¿cuál es el acimut del primer barco con respecto al segundo?



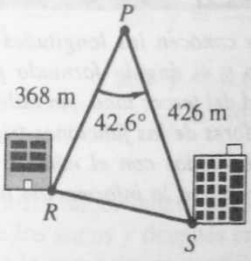
32. Un punto P está a 1.4 km de la orilla de un lago y 2.2 km de la otra orilla. Si en P el lago subtiende un ángulo de 54°, ¿cuál es la longitud del lago?



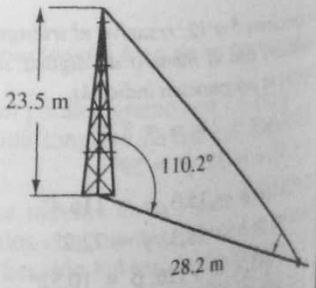
33. Dos puntos P y Q están en lados opuestos de un edificio. Para determinar la distancia entre estos puntos se elige un tercer punto R tal que la distancia de P a R es 50.2 m y la distancia de Q a R es 61.4 m. El ángulo formado por los segmentos de recta PR y QR mide 62.5°. Determine la distancia de P a Q.



34. Dos caminos rectos se cortan en un punto P y forman un ángulo de 42.6°. En un punto R sobre un camino está un edificio a 368 m de P y en un punto S en el otro camino, está un edificio a 426 m de P. Determine la distancia directa de R a S.

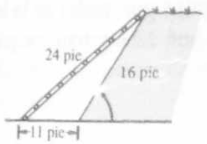


35. Una torre de 23.5 m de altura forma un ángulo de 110.2° con el camino inclinado sobre el cual se sube. Determine el ángulo subtendido por la torre en un punto situado camino abajo a 28.2 m de su base.

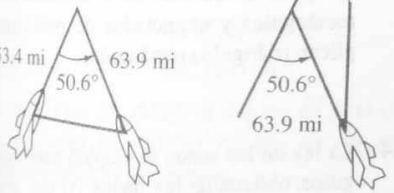


36. Un campo de forma triangular tiene lados que miden 212 m, 255 m y 168 m. Determine el área del campo.

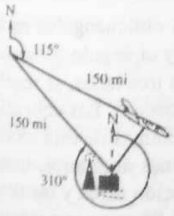
37. Una escalera de 24 pie de longitud está apoyada sobre un terraplén. El pie de la escalera está a 11 pie de la base del terraplén, y la distancia desde el extremo superior de la escalera hasta la base del terraplén en el suelo es 16 pie. ¿Cuál es el ángulo en el que el terraplén se inclina sobre la horizontal?



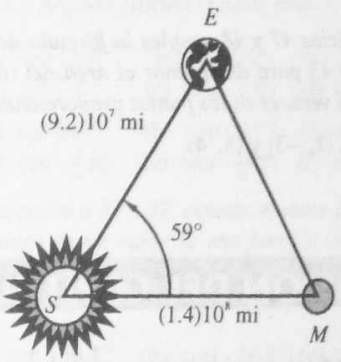
38. Dos rutas de vuelo recto se cortan entre sí formando un ángulo de 50.6°. En cierto momento un avión, sobre una ruta, está a 53.4 mi del punto de intersección y el otro avión, sobre la otra ruta, se encuentra a 63.9 mi de la intersección. ¿Cuál es la distancia entre los aviones en ese momento? Existen dos soluciones.



39. Un avión despega de un aeropuerto con un curso de 310°. Después de volar 150 mi debe regresar al aeropuerto. Debido a un error de navegación, el avión vuela 150 mi con un curso de 115°. Después de volar las 300 mi **(a)** ¿qué tan lejos se encuentra el avión del aeropuerto? y **(b)** ¿cuál es el acimut del avión con respecto al aeropuerto?



40. En cierto día la distancia de la Tierra, representada por E, al Sol, indicado por S, era $(9.2)10^7$ mi, y la distancia de Marte, simbolizado por M, al Sol, era $(1.4)10^8$ mi. Si el ángulo formado por los segmentos ES y MS era de 59°, ¿cuál fue la distancia entre la Tierra y Marte ese día?



41. De la ley de los cosenos, $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Utilice esta ecuación para probar que

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$$

y

$$1 - \cos\alpha = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}$$

42. Si K unidades cuadradas es el área de un triángulo que tiene el ángulo α formado por los lados que miden b y c unidades, entonces $K = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha$. Emplee esta ecuación para demostrar que

$$K = \sqrt{\tfrac{1}{2}bc(1 + \cos\alpha) \cdot \tfrac{1}{2}bc(1 - \cos\alpha)}$$

43. Utilice los resultados de los ejercicios 41 y 42 para probar la *fórmula de Herón:*

$$K = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. La fórmula de Herón se emplea para calcular el área de un triángulo cuando sólo se conocen las longitudes de los tres lados.

En los ejercicios 44 a 46, utilice la fórmula de Herón del ejercicio 43 para determinar el área del triángulo para los valores proporcionados de a, b y c.

44. $a = 18.7, b = 12.6, c = 17.9$

45. $a = 325, b = 236, c = 411$

46. $a = 1.847, b = 2.112, c = 1.903$

En los ejercicios 47 y 48, emplee la fórmula de Herón del ejercicio 43 para determinar el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos proporcionados.

47. (–2, 1), (2, –3) y (5, 4).

48. (0, –3), (2, 4) y (5, 2).

49. Establezca la ley de los cosenos sólo en palabras. No emplee ningún símbolo para las medidas de los lados y ángulos del triángulo. Después explique por qué la ley de los cosenos puede considerarse como una generalización del teorema de Pitágoras.

50. Suponga que resolvió un triángulo cuando las longitudes de los tres lados se conocen, y calculó el primer ángulo mediante la ley de los cosenos y los otros dos ángulos por medio de la ley de los senos. Explique por qué debe calcularse primero el ángulo mayor.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 8

▸ VISIÓN RETROSPECTIVA

8.1 Después de la definición de un ángulo como rotación, siguió la medición del ángulo. Se definió un radián y se indicó cómo convertir una medida en radianes de un ángulo a su medida en grados, y a partir de esta medida transformarla a radianes. Se aplicaron las fórmulas para calcular la longitud de un arco de una circunferencia y el área de un sector de un círculo.

8.2 Se definieron las seis funciones trigonométricas de un ángulo que tiene medida de t radianes como las funciones correspondientes del número real t. Se calcularon valores de las funciones trigonométricas de un ángulo conociendo un punto sobre su lado terminal. Se presentó el teorema que expresa las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo como razones de las longitudes de los lados del triángulo. Se determinaron valores exactos de las funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales y algunos otros ángulos, y se mostró cómo los ángulos de referencia permiten expresar el valor de función de cualquier ángulo θ en términos del valor de función correspondiente del ángulo de referencia asociado con θ. Los ángulos de referencia se emplearon para aproximar ciertos valores de las funciones trigonométricas, así como para encontrar ángulos que tienen un valor de una función trigonométrica dado.

8.3 El teorema que se refiere a las funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se utilizó para mostrar que cualquier función trigonométrica de un ángulo agudo es la cofunción del complemento del ángulo. Después se aplicó el teorema en la solución de triángulos rectángulos y enunciados de problemas que implican triángulos rectángulos.

8.4 La ley de los senos se empleó para resolver triángulos oblicuángulos dados (i) dos ángulos y un lado, o (ii) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. La situación (ii), el caso ambiguo, presenta tres posibilidades: no existe el triángulo, existe un triángulo o existen dos triángulos. Se resolvieron enunciados de problemas que implican triángulos oblicuángulos y la ley de los senos.

8.5 Los triángulos oblicuángulos en los que se conocen dos lados y el ángulo formado por ellos o en los que se conocen los tres lados, se resolvieron mediante la ley de los cosenos. Las aplicaciones a los enunciados de problemas de esta sección, así como a las dos secciones anteriores, trataron sobre topografía, navegación aérea y marítima, astronomía y mediciones de figuras geométricas.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 4, muestre en un diagrama el ángulo en posición estándar que tiene la medida en grados indicada. También encuentre la medida equivalente en radianes del ángulo.

1. (a) 30° (b) 225° 2. (a) 15° (b) 330°
3. (a) −120° (b) 100° 4. (a) −135° (b) 250°

En los ejercicios 5 a 8, muestre en un diagrama el ángulo en posición estándar que tiene la medida en radianes indicada. También encuentre la medida equivalente en grados del ángulo.

5. (a) $\frac{1}{3}\pi$ (b) $\frac{7}{4}\pi$ 6. (a) $\frac{5}{6}\pi$ (b) $\frac{5}{4}\pi$
7. (a) $-\frac{1}{3}$ (b) 2.36 8. (a) $\frac{5}{6}$ (b) −1.48

En los ejercicios 9 y 10, determine (a) la longitud del arco y (b) el área del sector del círculo cuyo radio y ángulo central α se proporcionan.

9. el radio es 12 cm; $m^\circ(\alpha) = 150$

10. el radio es 6.48 pulg; $m^\circ(\alpha) = 27.25$

En los ejercicios 11 a 14, si θ es un ángulo en posición estándar y el punto P está sobre el lado terminal de θ, calcule las seis funciones trigonométricas de θ.

11. $P(-8,15)$ 12. $P(3,-4)$
13. $P(-5,12)$ 14. $P(-1,0)$

En los ejercicios 15 a 22, dibuje el ángulo en posición estándar y determine los valores exactos de las seis funciones trigonométricas del ángulo.

15. 45° 16. 60° 17. $\frac{2}{3}\pi$
18. $\frac{3}{4}\pi$ 19. −150° 20. −135°
21. $-\frac{9}{4}\pi$ 22. $-\frac{1}{6}\pi$

En los ejercicios 23 a 26, dibuje el ángulo cuadrantal en posición estándar. Encuentre los valores exactos de las cuatro funciones trigonométricas que están definidas. ¿Cuáles son las otras dos funciones trigonométricas que no están definidas?

23. 270° 24. 90° 25. $-\pi$ 26. 2π

En los ejercicios 27 y 28, determine el ángulo de referencia para el ángulo proporcionado.

27. (a) $\theta = 315^\circ$ (b) $\theta = 218^\circ$ (c) $\theta = \frac{13}{6}\pi$
(d) $\theta = -4.27$ (e) $\theta = -\frac{5}{9}\pi$ (f) $\theta = 11.23$

28. (a) $\theta = 150^\circ$ (b) $\theta = 291^\circ$ (c) $\theta = -\frac{3}{4}\pi$
(d) $\theta = 7.65$ (e) $\theta = \frac{11}{10}\pi$ (f) $\theta = -216.3^\circ$

En los ejercicios 29 y 30, exprese el valor de la función en términos de una función del ángulo de referencia asociado; después calcule el valor exacto.

29. (a) sen 150° (b) cos 225° (c) tan(−240°)
(d) $\cot\frac{7}{4}\pi$ (e) $\sec(-\frac{2}{3}\pi)$ (f) $\csc\frac{11}{6}\pi$

30. (a) sen 240° (b) cos(−45°) (c) tan 120°
(d) $\cot(-\frac{3}{4}\pi)$ (e) $\sec(-\frac{11}{6}\pi)$ (f) $\csc\frac{2}{3}\pi$

En los ejercicios 31 y 32, exprese el valor de la función en términos de un valor de una función del ángulo de referencia asociado. Después, aproxime el valor en una calculadora.

31. (a) sen 136.4° (b) cos(−10.8°) (c) tan 327.1°
(d) cot(−205.7°) (e) sec 194.8° (f) csc(−98.6°)

32. (a) sen 263.2° (b) cos 348.9° (c) tan(−123.6°)
(d) cot(−19.7°) (e) sec 165.3° (f) csc(−244.5°)

En los ejercicios 33 y 34, encuentre todos los θ tales que $0° \le \theta < 360°$ para los que se satisface la ecuación dada.

33. (a) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ (b) $\tan\theta = -1$

34. (a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\cot\theta = -\sqrt{3}$

En los ejercicios 35 y 36, determine todos los θ tales que $0 \le \theta < 2\pi$ para los que se satisface la ecuación dada.

35. (a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sec\theta = -1$

36. (a) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ (b) $\csc\theta = 1$

En los ejercicios 37 y 38, halle todos los θ con aproximación a décimos de grado tales que $0° \le \theta < 360°$ para los que se satisface la ecuación.

37. (a) sen θ = 0.3217 (b) cos θ = 0.4806
(c) tan θ = 2.953 (d) cot θ = −4.715

38. (a) sen θ = 0.8066 (b) cos θ = 0.7315
(c) tan θ = −0.9424 (d) cot θ = 6.019

En los ejercicios 39 y 40, determine todos los θ con cuatro dígitos significativos tales que $0 \le \theta < 2\pi$ para los que se satisface la ecuación.

39. (a) $\operatorname{sen}\theta = -0.7049$ (b) $\cos\theta = 0.2185$
(c) $\tan\theta = -1.356$ (d) $\cot\theta = 0.8462$

40. (a) $\operatorname{sen}\theta = 0.4728$ (b) $\cos\theta = -0.2093$
(c) $\tan\theta = 5.614$ (d) $\cot\theta = -9.762$

En los ejercicios 41 a 46, se proporcionan medidas de lados y ángulos de un triángulo. Determine la longitud del lado indicado, pero sin emplear la calculadora para los valores de las funciones trigonométricas. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que requiera la información proporcionada.

41. $\gamma = 90°, \beta = 30°, b = 16$; encuentre c.

42. $\gamma = 90°, \alpha = 45°, c = 7.4$; encuentre b.

43. $\alpha = 30°, \gamma = 45°, c = 5.3$; encuentre a.

44. $\beta = 135°, a = 29, c = 14$; encuentre b.

45. $\alpha = 120°, b = 35, c = 46$; encuentre a.

46. $\beta = 120°, \gamma = 30°, b = 7.8$; encuentre c.

En los ejercicios 47 a 54, resuelva el triángulo. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que amerite la información proporcionada.

47. $\gamma = 90°, a = 4.8, b = 3.2$

48. $a = 60.4, b = 72.3, c = 54.7$

49. $\alpha = 43.2°, \beta = 61.4°, b = 26.8$

50. $\gamma = 90°, \alpha = 23.2°, a = 12.2$

51. $\gamma = 105.3°, a = 21.6, b = 32.4$

52. $\alpha = 114°, \gamma = 32°, a = 85$

53. $a = 518.2, b = 439.7, c = 630.4$

54. $\alpha = 29.42°, b = 7\,134, c = 6\,024$

En los ejercicios 55 a 58, encuentre el área del triángulo del ejercicio indicado.

55. Ejercicio 49 **56.** Ejercicio 52

57. Ejercicio 53 **58.** Ejercicio 54

En los ejercicios 59 a 62, se proporcionan las dimensiones de dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos. Por tanto, se tiene el caso ambiguo. Determine el número de triángulos que satisfacen el conjunto de condiciones dado y resuelva cada triángulo. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos de acuerdo con la información proporcionada.

59. $\alpha = 54.4°, a = 112, b = 131$

60. $\gamma = 32.4°, b = 50.3, c = 25.1$

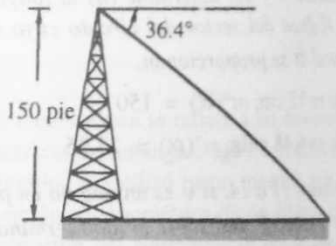
61. $\beta = 39.7°, b = 12.8, c = 10.8$

62. $\beta = 42.5°, a = 12.4, b = 10.1$

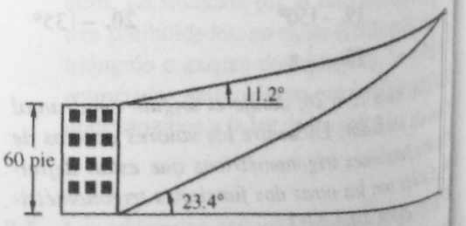
63. Un neumático tiene un diámetro de 30 pulg. ¿Cuántas revoluciones por minuto efectuará la rueda cuando el automóvil mantenga una velocidad de 30 mi/h?

En los ejercicios 64 a 72, la solución del enunciado del problema implica un triángulo oblicuángulo. Escriba una conclusión.

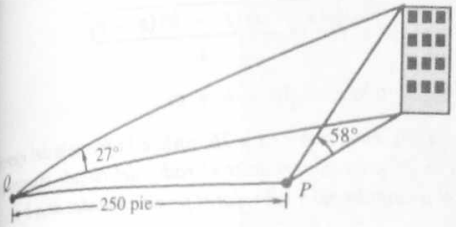
64. Una torre de 150 pie de altura y desde su parte superior, el ángulo de depresión de un objeto sobre el piso es de 36.4°. **(a)** Determine la distancia de la base de la torre al objeto. **(b)** ¿Qué tan retirado está el objeto de la parte superior de la torre?



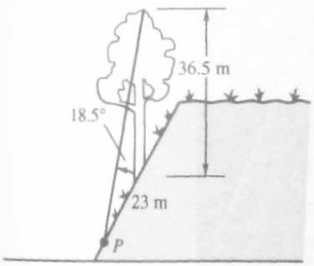
65. Del techo de un edificio de 60 pie de altura, el ángulo de elevación de la punta de un asta es de 11.2°. Desde la base del edificio, el ángulo de elevación de la punta del asta es de 23.4°. Encuentre **(a)** la longitud del asta y **(b)** la distancia del edificio al asta.



66. En un punto P al sur de un edificio, el ángulo de elevación de la parte superior del edificio es 52°. En un punto Q, a 250 pie al oeste de P, el ángulo de elevación es de 27°. Determine la altura del edificio.

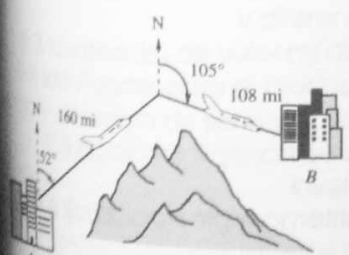


67. Un árbol está en una colina y un punto P, a 23 m ladera abajo desde el árbol, el ángulo subtendido por el árbol es de 18.5°. Si la altura del árbol es de 36.5 m, ¿qué ángulo de inclinación forma la colina con la horizontal?

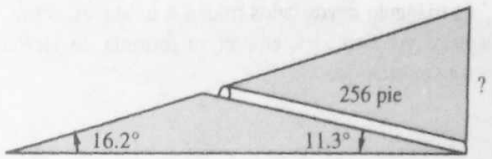


68. Un lote de terreno triangular tiene lados que miden 242, 160 y 184 pie. Si el costo por pie cuadrado de tierra se valora en $40, ¿cuál es el valor del lote?

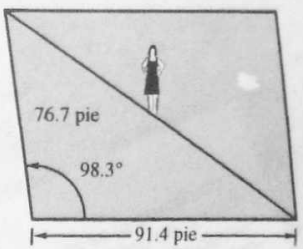
69. Un piloto que vuela de la ciudad A a la ciudad B debe sobrevolar una cordillera montañosa particular. El piloto primero vuela con un curso de 52° una distancia de 160 mi y después cambia el curso a 105° y llega a B después de volar otras 108 mi. **(a)** ¿Cuál es la distancia directa de A a B? **(b)** ¿Cuál es el acimut de A con respecto a B?



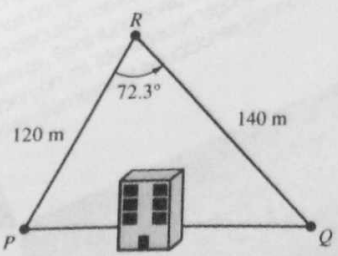
70. Una colina tiene un ángulo de inclinación de 16.2° con la horizontal, y un túnel que atraviesa la colina se inclina un ángulo de 11.3° con la horizontal. Desde un punto a 256 pie hacia abajo del túnel, ¿cuál es la distancia vertical hasta la superficie de la colina?



71. Un terreno baldío con forma de un paralelogramo se localiza en la esquina de dos calles que se cruzan formando un ángulo 98.3° y los frentes del lote miden 76.7 y 91.4 pie. Si en lugar de rodear las calles laterales una persona decide atravesar el lote a lo largo de una diagonal desde una esquina a la otra ¿cuál es la distancia que no recorrerá?



72. Para determinar la distancia entre dos puntos P y Q en lados opuestos de un edificio, se elige un tercer punto R tal que la distancia de P a R es 120 m y la distancia de Q a R es 140 m. Si el ángulo formado por los segmentos de recta PR y QR es 72.3°, ¿cuál es la distancia de P a Q?



73. Si un acre equivale a 4 840 yardas cuadradas, utilice la fórmula de Herón del ejercicio 43 de la Sección 8.5 para determinar el número de acres del área de un campo con forma triangular cuyos lados miden 453, 592 y 700 yardas.

74. Si r unidades es el radio de un círculo inscrito en un triángulo cuyos lados miden a unidades, b unidades y c unidades, emplee la fórmula de Herón para mostrar que

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

En los ejercicios 75 y 76, utilice la fórmula del ejercicio 74 para determinar el radio del círculo inscrito en el triángulo para los valores proporcionados de a, b y c.

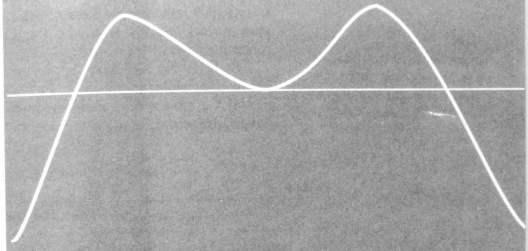
75. $a = 325, b = 236, c = 411.$

76. $a = 1.847, b = 2.112, c = 1.903.$

Capítulo

9

Trigonometría analítica



VISIÓN PRELIMINAR

En Cálculo, con frecuencia, es necesario convertir una expresión trigonométrica de una forma a otra equivalente más simple. A fin de perfeccionar esa habilidad, se aplicarán las identidades fundamentales y manipulaciones algebraicas para verificar otras identidades. Todas las identidades fundamentales se presentan en una lista al final del libro. Algunas de las identidades básicas se emplean en la discusión de las funciones trigonométricas inversas. Estas funciones, así como la familiaridad con las identidades trigonométricas, nos permiten resolver ecuaciones trigonométricas.

SUMARIO

9.1 Identidades trigonométricas
9.2 Identidades de suma y diferencia
9.3 Identidades de valor múltiple
9.4 Identidades para el producto, suma y diferencia de seno y coseno
9.5 Funciones trigonométricas inversas
9.6 Ecuaciones trigonométricas

9.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVOS

1. **Aplicar las ocho identidades fundamentales para probar otras identidades.**
2. **Aprender sugerencias para probar identidades.**
3. **Aprender cómo demostrar que una ecuación no es una identidad.**

Recuerde de la Sección 2.1 que una identidad es una ecuación para la cual el conjunto solución es el mismo que el dominio de la variable. En las identidades trigonométricas se utilizarán símbolos tales como s, t, u y v para representar números reales, y símbolos como α, β, γ, y θ para denotar ángulos. Los símbolos x, y y z se emplearán para representar números reales o ángulos.

En la Sección 7.6 se analizaron las ocho identidades trigonométricas fundamentales y se listaron. En esa sección, t representó un número real. Se repiten las identidades aquí para referencia en la Tabla 1, donde x representa un número real o un ángulo.

Tabla 1

Las ocho identidades trigonométricas fundamentales

I $\operatorname{sen} x \csc x = 1 \leftrightarrow \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \leftrightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\csc x}, \quad x \neq k\pi, \ k \in Z$

II $\cos x \sec x = 1 \leftrightarrow \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{\sec x}, \quad x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \ k \in Z$

III $\tan x \cot x = 1 \leftrightarrow \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\cot x}, \quad x \neq \frac{1}{2}k\pi, \ k \in Z$

IV $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \ k \in Z$

V $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad x \neq k\pi, \ k \in Z$

VI $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

VII $1 + \tan^2 x = \sec^2 x \leftrightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \leftrightarrow \sec^2 x - \tan^2 x = 1$

VIII $1 + \cot^2 x = \csc^2 x \leftrightarrow \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \leftrightarrow \csc^2 x - \cot^2 x = 1$

Ahora se verificarán, o comprobarán, otras identidades trigonométricas. No existe un método general que pueda aplicarse para probar una identidad. Conforme se presenten los ejemplos, se darán sugerencias útiles en la determinación del mejor camino para una prueba. La familiaridad con las ocho identidades fundamentales en sus diferentes formas es decisiva.

Si uno de los lados de una identidad tiene forma más compleja que el otro, es conveniente iniciar la prueba con él y transformarlo a la

forma más simple del otro lado. Tenga en mente esta forma más sencilla conforme avanza en el proceso ya que ella representa su objetivo.

Antes de iniciar la prueba de una identidad, se podría trazar la gráfica de la función de cada miembro. El hecho de que las gráficas sean las mismas en todos los puntos para los cuales las funciones están definidas, nos convencerá de que se tiene una identidad válida.

▸ EJEMPLO 1 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x + \tan x$$

Solución Debido a que el miembro izquierdo es una fracción, se considera más complejo que el derecho. Por tanto, se iniciará con el miembro izquierdo, el cual se escribirá como la suma de dos fracciones. Después se aplicarán dos identidades fundamentales para obtener el miembro derecho.

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \sec x + \tan x \quad \blacktriangleleft$$

Con frecuencia será conveniente convertir una expresión a una que contenga sólo seno y coseno.

▸ EJEMPLO 2 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$\frac{\csc x + \sec x}{1 + \tan x} = \csc x$$

Solución Como el miembro izquierdo es el más complejo, se iniciará con él. Primero, se emplearán identidades fundamentales para expresarlo en términos de seno y coseno, y después se aplicarán procesos algebraicos para obtener el miembro derecho. En el segundo paso, se multiplicará el numerador y el denominador por $\operatorname{sen} x \cos x$ (el MCDn de las dos fracciones).

$$\frac{\csc x + \sec x}{1 + \tan x} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{\cos x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos x\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{\cos x}\right)}{\operatorname{sen} x \cos x\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)}$$

$$= \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x(\cos x + \operatorname{sen} x)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \csc x$$

▸ EJEMPLO 3 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$(1 + \sec\theta)(1 - \cos\theta) = \tan\theta \operatorname{sen}\theta$$

Solución El miembro izquierdo es el más complicado. Se inicia con él al efectuar la multiplicación indicada.

$$(1 + \sec\theta)(1 - \cos\theta) = 1 + \sec\theta - \cos\theta - \sec\theta\cos\theta$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta - 1$$

$$= \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta)$$

$$= \tan\theta \operatorname{sen}\theta$$

La verificación de la identidad del ejemplo siguiente implica un procedimiento diferente de los empleados en los ejemplos anteriores. Se transformará cada miembro por separado de la misma forma equivalente.

▸ EJEMPLO 4 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$\frac{1 + \cot y}{\csc y} = \frac{1 + \tan y}{\sec y}$$

Solución Se inicia con el miembro izquierdo y se expresa cot y y csc y en términos de sen y y cos y.

$$\frac{1 + \cot y}{\csc y} = \frac{1 + \dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} y}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} y\left(1 + \dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\right)}{\operatorname{sen} y\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} y}\right)}$$

$$= \operatorname{sen} y + \cos y$$

Ahora se expresa el miembro derecho en términos de sen y y cos y.

$$\frac{1 + \tan y}{\sec y} = \frac{1 + \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{\dfrac{1}{\cos y}}$$

$$= \frac{\cos y\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\right)}{\cos y\left(\dfrac{1}{\cos y}\right)}$$

$$= \cos y + \operatorname{sen} y$$

Debido a que cada lado es igual a sen y + cos y, se concluye que

$$\frac{1 + \cot y}{\csc y} = \frac{1 + \tan y}{\sec y}$$

Como se muestra en el ejemplo siguiente, algunas veces puede ser ventajoso convertir una expresión en otra que contenga sólo una función simple.

▸ EJEMPLO 5 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$(1 - \tan \beta)^3 = \frac{\cot \beta - 1}{\cot \beta}(\sec^2 \beta - 2 \tan \beta)$$

Solución El miembro derecho es más complejo. Se inicia con él, y como el miembro izquierdo contiene sólo la tangente, se expresa el miembro derecho en términos de tan β.

$$\frac{\cot \beta - 1}{\cot \beta}(\sec^2 \beta - 2 \tan \beta)$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\tan \beta} - 1}{\dfrac{1}{\tan \beta}}(1 + \tan^2 \beta - 2 \tan \beta)$$

$$= \frac{\tan \beta\left(\dfrac{1}{\tan \beta} - 1\right)}{\tan \beta\left(\dfrac{1}{\tan \beta}\right)}(1 - 2 \tan \beta + \tan^2 \beta)$$

$$= \frac{1 - \tan \beta}{1}(1 - \tan \beta)^2$$

$$= (1 - \tan \beta)^3$$

▸ EJEMPLO 6 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Solución Cada miembro de la identidad contiene una fracción que tiene únicamente seno y coseno. En el izquierdo, el binomio $1 + \cos x$ aparece en el denominador y en el derecho el binomio $1 - \cos x$ está en el numerador. Se puede iniciar con el miembro izquierdo y obtener un factor de $1 - \cos x$ en el numerador al multiplicar el numerador y denominador por $1 - \cos x$. Esta operación es equivalente a multiplicar la fracción por 1. Por tanto, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Enseguida se resumen las sugerencias presentadas para demostrar una identidad. Consúltelas antes de realizar ejercicios.

Sugerencias para la demostración de una identidad

1. Iniciar con el miembro más complicado y transformarlo en la forma más simple del otro. *Véase* los ejemplos 1, 2, 3 y 5.
2. En lugar de la sugerencia 1, puede ser más conveniente transformar cada miembro en la misma forma equivalente. *Véase* el ejemplo 4.
3. Con frecuencia es deseable convertir una expresión en otra que contenga sólo seno y coseno. *Véase* los ejemplos 2 y 4.
4. En lugar de la sugerencia 3, puede ser más ventajoso convertir una expresión en otra que contenga únicamente una función simple, siempre y cuando no se introduzcan radicales.
5. Considere la posibilidad de aplicar procesos algebraicos tales como multiplicación, factorización, combinación de fracciones en una fracción simple, escribir una fracción simple que tenga más de un término en el numerador como una suma de fracciones, y simplificación de una fracción compleja. *Véase* los ejemplos 1, 2, 3 y 5.
6. Para tener un factor particular en el numerador o en el denominador de una fracción, se puede multiplicar el numerador y el denominador por este factor deseado. *Véase* el ejemplo 6.

Si sospecha que una ecuación no es una identidad, primero trace la función de cada miembro de la ecuación para verificar que las gráficas son diferentes. Después muestre algebraicamente que la ecuación no es una identidad, sólo se necesita encontrar un número del dominio de la variable para el cual la igualdad no es válida. Al hacerlo, se tiene un *contraejemplo*.

▸ EJEMPLO 7 *Demostración de que una ecuación no es una identidad*

Demuestre gráfica y algebraicamente que la ecuación

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \operatorname{sen} x$$

no es una identidad.

Solución Cuando trace la gráfica de la función definida por $\sqrt{1 - \cos^2 x}$, obtendrá la mitad superior de la curva senoidal. Para mostrar que la ecuación no es una identidad, observe que si x es cualquier número para el cual $\operatorname{sen} x < 0$, el miembro derecho es negativo

y el miembro izquierdo es no negativo. En particular, si $x = \frac{7}{6}\pi$, entonces el miembro izquierdo es

$$\sqrt{1 - \cos^2 \frac{7}{6}\pi} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 - \tfrac{3}{4}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}}$$
$$= \tfrac{1}{2}$$

y el miembro derecho es

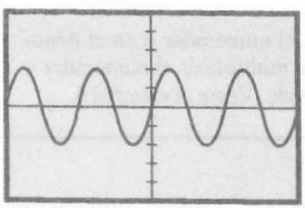
$$\operatorname{sen} \tfrac{7}{6}\pi = -\tfrac{1}{2}$$

▸ EJEMPLO 8 *Demostración de que una ecuación no es una identidad*

Demuestre gráfica y algebraicamente que la ecuación

$$4 \operatorname{sen} t \cos t = \sec t$$

no es una identidad.



[-2π, 2π] por [-5, 5]
$f(t) = 4 \operatorname{sen} t \cos t$
FIGURA 9.1

Solución La gráfica de la función definida por el miembro izquierdo de la ecuación se muestra en la Figura 9.1. No es la curva secante. De modo que la ecuación no es una identidad. Para mostrar algebraicamente este hecho, sea $t = 0$. El miembro izquierdo es

$$4 \operatorname{sen} 0 \cos 0 = 4\,(0)(1)$$
$$= 0$$

y el miembro derecho es

$$\sec 0 = 1$$

Por tanto, la ecuación no es una identidad.

EJERCICIOS 9.1

En los ejercicios 1 a 6, escriba la expresión en términos de sen x *o* cos x, *o ambos, de forma simplificada.*

1. **(a)** $\cos x \tan x$ **(b)** $\dfrac{\cos x}{\sec x}$

2. **(a)** $\operatorname{sen} x \cot x$ **(b)** $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x}$

3. **(a)** $\sec x \cot x$ **(b)** $\dfrac{\cot^2 x}{\csc^2 x}$

4. **(a)** $\csc x \tan x$ **(b)** $\dfrac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

5. **(a)** $\tan x + \cot x$ **(b)** $\operatorname{sen} x + \cos^2 x \csc x$

6. **(a)** $\sec^2 x + \csc^2 x$ **(b)** $\cos x + \operatorname{sen}^2 x \sec x$

En los ejercicios 7 a 12, pruebe que la primera expresión es equivalente a la segunda para todos los valores

de la variable, en los cuales ambas expresiones están definidas.

7. (a) $\cos\theta \csc\theta$, $\cot\theta$ (b) $\operatorname{sen}\theta \sec\theta \cot\theta$, 1

8. (a) $\operatorname{sen}\theta \sec\theta$, $\tan\theta$ (b) $\cos\theta \csc\theta \tan\theta$, 1

9. (a) $\dfrac{\sec\alpha}{\csc\alpha}$, $\tan\alpha$ (b) $\dfrac{\tan\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\sec\alpha$

10. (a) $\dfrac{\csc\alpha}{\sec\alpha}$, $\cot\alpha$ (b) $\dfrac{\cot\alpha}{\cos\alpha}$, $\csc\alpha$

11. (a) $\dfrac{1+\cot^2\beta}{\sec^2\beta}$, $\cot^2\beta$

(b) $(1+\operatorname{sen}\beta)(1-\operatorname{sen}\beta)$, $\cos^2\beta$

12. (a) $\dfrac{1+\tan^2\beta}{\csc^2\beta}$, $\tan^2\beta$

(b) $(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)$, $\operatorname{sen}^2\beta$

En los ejercicios 13 a 42, demuestre la identidad.

13. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

14. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

15. $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x$

16. $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cdot \cot^2 x$

17. $\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1} = \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

18. $\dfrac{\csc\theta+1}{\csc\theta-1} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$

19. $\dfrac{1-\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta} = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

20. $\dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

21. $\dfrac{\csc^2\alpha-1}{\sec^2\alpha-1} = \cot^4\alpha$

22. $\dfrac{1}{\csc\alpha-1} - \dfrac{1}{\csc\alpha+1} = 2\tan^2\alpha$

23. $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha} + \dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$

24. $\dfrac{1}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1}{1-\cos\alpha} = 2\csc^2\alpha$

25. $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} + \dfrac{1+\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = 2\csc\beta$

26. $\dfrac{\cos\beta}{1+\operatorname{sen}\beta} + \dfrac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta} = 2\sec\beta$

27. $\dfrac{\cos\beta}{1+\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$

28. $\dfrac{\sec\beta+1}{\tan\beta} = \dfrac{\tan\beta}{\sec\beta-1}$

29. $\dfrac{\cos t}{\sec t - \tan t} = 1 + \operatorname{sen} t$

30. $\operatorname{sen} t \tan t = \sec t - \cos t$

31. $\dfrac{\tan y}{\tan^2 y - 1} = \dfrac{1}{\tan y - \cot y}$

32. $\cot y \csc y = \dfrac{1}{\sec y - \cos y}$

33. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

34. $\sec x + \tan x = \dfrac{1}{\sec x - \tan x}$

35. $\csc^4\theta - \cot^4\theta = \csc^2\theta + \cot^2\theta$

36. $\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

37. $\tan^4\alpha + \tan^2\alpha = \sec^4\alpha - \sec^2\alpha$

38. $\csc^4\alpha - \csc^2\alpha = \cot^4\alpha + \cot^2\alpha$

39. $\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t + \operatorname{sen} t \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \cos t = \operatorname{sen} t + \cos t$

40. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t}{\operatorname{sen} t + \cos t} = 1 - \operatorname{sen} t \cos t$

41. $\dfrac{\tan^3 x + \operatorname{sen} x \sec x - \operatorname{sen} x \cos x}{\sec x - \cos x} = \tan x \sec x + \operatorname{sen} x$

42. $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 43 a 46, indique gráfica y algebraicamente que la ecuación no es una identidad.

43. $\operatorname{sen} t \cos t + 1 = \operatorname{sen} t + \cos t$

44. $\operatorname{sen} t \sec t + 1 = 2\operatorname{sen} t + \sec t$

45. $\sec y = 1 + \tan^2 y$

46. $\tan^2 x + \tan x = 2\tan^3 x$

En los ejercicios 47 a 54, determine si la ecuación es una identidad, trace la gráfica de la función de cada miembro. Si la ecuación es una identidad, pruebe este hecho algebraicamente. Si no es una identidad, encuentre un contraejemplo.

47. $\dfrac{1}{1+\cos\theta}-\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sec\theta-\cos\theta}$

48. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta}-\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{2}{\tan\theta\cos\theta}$

49. $\dfrac{1}{1-\cos\theta}-\dfrac{1}{1+\cos\theta}=2\cot\theta\csc\theta$

50. $\tan\theta\sec\theta-\operatorname{sen}\theta=\tan\theta$

51. $1-\tan^3 x=(2\tan x-\sec^2 x)(\tan x-1)$

52. $\csc^4 x(1-\cos^4 x)=1+2\cot^2 x$

53. $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}+\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}=\dfrac{2(\cos x-\csc x)}{\cot x-\cos x-\csc x+1}$

54. $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}+\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}=\dfrac{2(\operatorname{sen}x+\sec x)}{\tan x-\operatorname{sen}x+\sec x-1}$

55. La identidad pitagórica fundamental es

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$$

Explique en términos gráficos y algebraicos por qué

$$\operatorname{sen}x=\sqrt{1-\cos^2 x}\quad\text{y}\quad\cos x=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

no son identidades.

56. Explique por qué las ecuaciones

$$\sec^2 x-\tan^2 x=1\quad\text{y}\quad\csc^2 x-\cot^2 x=1$$

son identidades aunque los miembros izquierdos no están definidos para ciertos valores de x. Incluya en su explicación los valores de x en los cuales no están definidos los miembros izquierdos.

9.2 IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA

OBJETIVOS

1. **Aprender y aplicar la identidad del coseno de la diferencia.**
2. **Aprender y aplicar la identidad del coseno de la suma.**
3. **Aprender y aplicar las identidades de las cofunciones.**
4. **Aprender y aplicar la identidad del seno de la suma.**
5. **Aprender y aplicar la identidad del seno de la diferencia.**
6. **Aprender y aplicar la identidad de la tangente de la suma.**
7. **Aprender y aplicar la identidad de la tangente de la diferencia.**
8. **Encontrar valores de función exactos a partir de las identidades de la suma y la diferencia.**
9. **Utilizar las identidades de la suma y la diferencia para probar otras identidades.**
10. **Escribir una expresión de la forma A sen $bt + B\cos bt$ como a sen $(bt + c)$.**

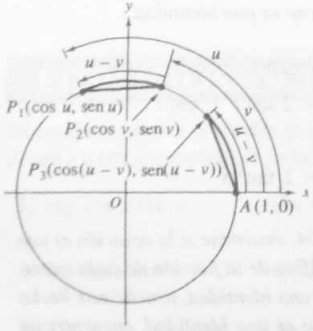


FIGURA 9.2

A continuación se obtendrán las identidades que expresan valores de las funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos números reales (o ángulos) en términos de los valores de las funciones trigonométricas de cada número real (o ángulo).

Se principia por deducir una fórmula para $\cos(u - v)$ donde u y v son números reales. En la discusión se considera que $\frac{1}{2}\pi < u < \pi$ y $0 < v < \frac{1}{2}\pi$. Sin embargo, puede utilizarse un argumento similar para u y v en cualquier cuadrante. La Figura 9.2 muestra la circunferencia unitaria U y el punto $A(1, 0)$. El punto P_1 es el punto terminal del arco cuyo punto inicial está en A y de longitud u, y P_2 es el punto terminal del arco que tiene su punto inicial en A y cuya longitud es v.

Por la definición del seno y coseno de un número real, P_1 es el punto $(\cos u, \operatorname{sen} u)$ y P_2 es el punto $(\cos v, \operatorname{sen} v)$. La longitud del arco de P_2 a P_1 es $u - v$. Sea P_3 sobre la circunferencia unitaria U el punto terminal del arco cuyo punto inicial es A y su longitud es $u - v$. Así, P_3 es el punto $(\cos(u - v), \operatorname{sen}(u - v))$. Debido a que la longitud del arco de P_2 a P_1 es la misma que la longitud de A a P_3, se deduce de un teorema de geometría que $|\overline{P_2P_1}| = |\overline{AP_3}|$; de donde,

$$|\overline{P_2P_1}|^2 = |\overline{AP_3}|^2 \tag{1}$$

De la fórmula de la distancia

$$\begin{aligned}
|\overline{P_2P_1}|^2 &= (\cos u - \cos v)^2 + (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v)^2 \\
&= \cos^2 u - 2\cos u \cos v + \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u - 2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen}^2 v \\
&= (\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) \\
&= 1 + 1 - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) \\
&= 2 - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) \qquad (2)
\end{aligned}$$

También de la fórmula de la distancia

$$\begin{aligned}
|\overline{AP_3}|^2 &= [\cos(u - v) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(u - v) - 0]^2 \\
&= \cos^2(u - v) - 2\cos(u - v) + 1 + \operatorname{sen}^2(u - v) \\
&= [\cos^2(u - v) + \operatorname{sen}^2(u - v)] + 1 - 2\cos(u - v) \\
&= 1 + 1 - 2\cos(u - v) \\
&= 2 - 2\cos(u - v) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Al sustituir de (2) y (3) en (1), se tiene

$$\begin{aligned}
2 - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) &= 2 - 2\cos(u - v) \\
\cos(u - v) &= \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v
\end{aligned}$$

Esta fórmula es una identidad porque es válida para todos los números reales. También lo es para todos los ángulos. Se denomina la identidad del coseno de la diferencia y se escribirá ahora en términos de x y y.

Identidad del coseno de la diferencia

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Si en esta identidad $-y$ se sustituye por y, se obtiene

$$\cos[x - (-y)] = \cos x \cos(-y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y)$$

Debido a que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$ y $\cos(-y) = \cos y$, se obtiene la identidad del coseno de la suma.

Identidad del coseno de la suma

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

En el ejemplo siguiente se aplican las identidades del coseno de la suma y la diferencia al cálculo de ciertos valores de función exactos. Esta aplicación de las identidades no es importante en sí misma porque se pueden obtener valores de función aproximados en la calculadora. El propósito de este ejemplo, y los ejercicios correspondientes, es poner en práctica el uso de las fórmulas de modo que se adquiera familiaridad con ellas.

► EJEMPLO 1 *Determinación de valores de función exactos a partir de las identidades del coseno de la suma y la diferencia*

Determine el valor exacto de **(a)** $\cos \frac{1}{12}\pi$ y **(b)** $\cos 105°$.

Solución

(a) Como $\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi$ y se conocen los valores de función exactos de $\frac{1}{4}\pi$ y $\frac{1}{6}\pi$, se emplea la identidad del coseno de la diferencia.

$$\begin{aligned}\cos \tfrac{1}{12}\pi &= \cos(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{6}\pi)\\ &= \cos \tfrac{1}{4}\pi \cos \tfrac{1}{6}\pi + \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi \operatorname{sen} \tfrac{1}{6}\pi\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(b) Como $105° = 60° + 45°$ y los valores de función exactos de $60°$ y $45°$ se conocen, se aplica la identidad del coseno de la suma.

$$\begin{aligned}\cos 105° &= \cos(60° + 45°)\\ &= \cos 60° \cos 45° - \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45°\\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

◄

Las identidades del coseno de la suma y de la diferencia pueden emplearse para obtener otras identidades. Si en la identidad del coseno de la diferencia se sustituye $x = \frac{1}{2}\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{1}{2}\pi - y) &= \cos\tfrac{1}{2}\pi\cos y + \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi\operatorname{sen} y\\ &= (0)\cos y + (1)\operatorname{sen} y\\ &= \operatorname{sen} y\end{aligned}$$

Ahora, si en esta fórmula se hace $y = \frac{1}{2}\pi - x$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\cos[\tfrac{1}{2}\pi - (\tfrac{1}{2}\pi - x)] &= \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x)\\ \cos x &= \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x)\end{aligned}$$

De una identidad fundamental

$$\tan(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - x)}{\cos(\frac{1}{2}\pi - x)}$$

Al sustituir $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - x)$ por $\cos x$ y $\cos(\frac{1}{2}\pi - x)$ por $\operatorname{sen} x$, se tiene

$$\begin{aligned}\tan(\tfrac{1}{2}\pi - x) &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\\ &= \cot x\end{aligned}$$

Se han obtenido las tres siguientes identidades, denominadas identidades de las cofunciones.

Identidades de las cofunciones

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos x$$

$$\tan(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cot x$$

Observe que estas fórmulas para ángulos son las ecuaciones (5) y (6) de la Sección 8.3. Sin embargo, ahí se restringió el ángulo a un ángulo agudo.

A continuación se deducirán las identidades del seno de la suma y de la diferencia. De la primera identidad de cofunción, con x sustituida por $x + y$, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + y) &= \cos[\tfrac{1}{2}\pi - (x + y)]\\ &= \cos[(\tfrac{1}{2}\pi - x) - y]\end{aligned}$$

Ahora se aplica la identidad del coseno de la diferencia y se obtiene

$$\operatorname{sen}(x + y) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)\cos y + \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x)\operatorname{sen} y$$

Al utilizar identidades de las cofunciones en el miembro derecho, se tiene la identidad del seno de la suma siguiente.

Identidad del seno de la suma

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

Si en esta identidad se reemplaza y por $-y$, se obtiene

$$\operatorname{sen}[x + (-y)] = \operatorname{sen} x \cos(-y) + \cos x \operatorname{sen}(-y)$$

Al sustituir $\cos(-y)$ por $\cos y$ y $\operatorname{sen}(-y)$ por $-\operatorname{sen} y$, se tiene la identidad del seno de la diferencia siguiente.

Identidad del seno de la diferencia

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

▶ EJEMPLO 2 *Determinación de los valores de función exactos a partir de las identidades de la suma*

Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{24}{25}$, donde α está en el primer cuadrante, y $\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5}$, donde β está en el segundo cuadrante, determine **(a)** $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, **(b)** $\cos(\alpha + \beta)$ y **(c)** el cuadrante que contiene $\alpha + \beta$.

Solución Para emplear las identidades del seno y coseno de la suma, se necesita determinar $\cos \alpha$ y $\cos \beta$. A fin de encontrar $\cos \alpha$ se utiliza la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ con $\operatorname{sen} \alpha = \frac{24}{25}$ y $\cos \alpha > 0$ porque α está en el primer cuadrante.

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{24}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\
\cos^2 \alpha &= 1 - \tfrac{576}{625} \\
\cos^2 \alpha &= \tfrac{49}{625} \\
\cos \alpha &= \tfrac{7}{25}
\end{aligned}$$

Para encontrar $\cos \beta$, se utiliza la identidad $\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ con $\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5}$ y $\cos \beta < 0$ porque β está en el segundo cuadrante.

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \beta &= 1 \\
\cos^2 \beta &= 1 - \tfrac{16}{25} \\
\cos^2 \beta &= \tfrac{9}{25} \\
\cos \beta &= -\tfrac{3}{5}
\end{aligned}$$

(a) De la identidad del seno de la suma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ &= \left(\tfrac{24}{25}\right)\left(-\tfrac{3}{5}\right) + \left(\tfrac{7}{25}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right) \\ &= -\tfrac{72}{125} + \tfrac{28}{125} \\ &= -\tfrac{44}{125}\end{aligned}$$

(b) De la identidad del coseno de la suma

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ &= \left(\tfrac{7}{25}\right)\left(-\tfrac{3}{5}\right) - \left(\tfrac{24}{25}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right) \\ &= -\tfrac{21}{125} - \tfrac{96}{125} \\ &= -\tfrac{117}{125}\end{aligned}$$

(c) Como $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) < 0$ y $\cos(\alpha + \beta) < 0$, se concluye que $\alpha + \beta$ está en el tercer cuadrante. ◀

Observe en el ejemplo 2 que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ se obtuvieron sin determinar los valores reales de α y β.

Para expresar $\tan(x + y)$ en términos de $\tan x$ y $\tan y$, se comienza con la identidad fundamental que establece que la tangente es el cociente del seno y el coseno. Después se emplean las identidades del seno y coseno de la suma. Así, se tiene

$$\begin{aligned}\tan(x + y) &= \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x + y)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y}{\cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}\end{aligned}$$

De modo que la identidad implique $\tan x$ y $\tan y$, se divide el numerador y el denominador entre $\cos x\cos y$, con la suposición de que $\cos x\cos y \neq 0$. De modo que

$$\begin{aligned}\tan(x + y) &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\dfrac{\cos y}{\cos y} + \dfrac{\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{\dfrac{\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{\cos y}{\cos y} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}} \\ &= \frac{\tan x\cdot 1 + 1\cdot\tan y}{1\cdot 1 - \tan x\cdot\tan y}\end{aligned}$$

Por tanto, se obtuvo la identidad de la tangente de la suma siguiente.

Identidad de la tangente de la suma

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

Si en esta identidad y se sustituye por $-y$, se obtiene

$$\tan[x + (-y)] = \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)}$$

En la Sección 7.7 se comprobó que $\tan(-y) = -\tan y$. Al efectuar esta sustitución en la ecuación anterior, se tiene

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x + (-\tan y)}{1 - \tan x(-\tan y)}$$

a partir de la cual se obtiene la identidad de la tangente de la diferencia siguiente.

Identidad de la tangente de la diferencia

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

En la obtención de la identidad de la tangente de la suma, la restricción de que $\cos x \cos y \neq 0$ indica que la identidad no es válida si alguno de los dos x o y son iguales a $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier entero. Observe que si se pretende aplicar la identidad de la tangente de la suma o de la diferencia cuando x o y tienen un valor de $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, el miembro derecho contiene a $\tan(\frac{1}{2}\pi + k\pi)$, el cual no está definido.

► EJEMPLO 3 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$\tan(x - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

Solución A partir de la identidad de la tangente de la diferencia

$$\tan(x - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\tan x - \tan \tfrac{1}{4}\pi}{1 + \tan x \tan \tfrac{1}{4}\pi}$$

Debido a que $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$, se obtiene

$$\tan(x - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x(1)}$$

$$= \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

Las identidades que expresan una función trigonométrica de $\frac{1}{2}k\pi \pm x$, donde k es cualquier entero, en términos de una función de x se denominan **fórmulas de reducción.** En particular, las identidades de las cofunciones son fórmulas de reducción. Algunas otras son

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x & \cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x & \tan(\frac{1}{2}\pi + x) = -\cot x \\
\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\
\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x & \cos(\pi + x) = -\cos x & \tan(\pi + x) = \tan x \\
\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi - x) = -\cos x & \cos(\frac{3}{2}\pi - x) = -\operatorname{sen} x & \tan(\frac{3}{2}\pi - x) = \cot x \\
\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi + x) = -\cos x & \cos(\frac{3}{2}\pi + x) = \operatorname{sen} x & \tan(\frac{3}{2}\pi + x) = -\cot x \\
\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x & \cos(2\pi - x) = \cos x & \tan(2\pi - x) = -\tan x
\end{array}$$

y así sucesivamente. Los ejemplos ilustrativos siguientes proporcionan las pruebas de algunas de estas fórmulas. Las otras fórmulas se demuestran de manera semejante. En los ejercicios 21 a 24 se pide presentar algunas de estas pruebas.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

A partir de las identidades del seno de la suma y de la diferencia

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi - x) &= \operatorname{sen}\pi\cos x - \cos\pi\operatorname{sen} x \\
&= (0)\cos x - (-1)\operatorname{sen} x \\
&= \operatorname{sen} x \\
\operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\pi + x) &= \operatorname{sen}\tfrac{3}{2}\pi\cos x + \cos\tfrac{3}{2}\pi\operatorname{sen} x \\
&= (-1)\cos x + (0)\operatorname{sen} x \\
&= -\cos x
\end{aligned}$$

◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

De las identidades del coseno de la suma y de la diferencia

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - x) &= \cos\pi\cos x + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen} x \\
&= (-1)\cos x + (0)\operatorname{sen} x \\
&= -\cos x \\
\cos(\tfrac{3}{2}\pi + x) &= \cos\tfrac{3}{2}\pi\cos x - \operatorname{sen}\tfrac{3}{2}\pi\operatorname{sen} x \\
&= (0)\cos x - (-1)\operatorname{sen} x \\
&= \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

A partir de la identidad de la tangente de la diferencia

$$\tan(\pi - x) = \frac{\tan \pi - \tan x}{1 + \tan \pi \tan x}$$
$$= \frac{0 - \tan x}{1 + (0)\tan x}$$
$$= -\tan x$$

De una identidad fundamental y de los resultados de los ejemplos ilustrativos 1 y 2

$$\tan(\tfrac{3}{2}\pi + x) = \frac{\operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\pi + x)}{\cos(\tfrac{3}{2}\pi + x)}$$
$$= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$
$$= -\cot x$$

No puede emplearse la identidad de la tangente de la suma para encontrar $\tan(\frac{3}{2}\pi + x)$. Intentar hacerlo daría por resultado una expresión con $\tan \frac{3}{2}\pi$, la cual no está definida.

En física, cuando se estudia electricidad, calor y dinámica, es a veces necesario escribir una expresión de la forma

$$A \operatorname{sen} bt + B \cos bt$$

en la forma

$$a \operatorname{sen}(bt + c)$$

de modo que la amplitud, el periodo, la frecuencia, el defasamiento y la gráfica de la función correspondiente puedan obtenerse más fácilmente. A continuación se obtendrá un teorema que se emplea en tal caso. Suponga que la función f está definida por la ecuación

$$f(t) = A \operatorname{sen} bt + B \cos bt \tag{4}$$

donde A, B y b son constantes y $A \neq 0$. Se puede escribir en la forma

$$f(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen} bt + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos bt\right) \tag{5}$$

Sea c un número real tal que

$$\tan c = \frac{B}{A} \tag{6}$$

y

$$\cos c = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} c = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{7}$$

Se le pedirá que compruebe la ecuación (6) a partir de la (7) en el ejercicio 42.

Al sustituir (7) en (5), se tiene

$$f(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\,(\cos c \operatorname{sen} bt + \operatorname{sen} c \cos bt) \tag{8}$$

Observe que la expresión entre paréntesis es $\operatorname{sen}(bt + c)$. Si se hace

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}$$

entonces (8) puede escribirse en la forma

$$f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) \tag{9}$$

Al igualar los miembros derechos de (4) y (9), se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 1

Si t es cualquier número real, A, B y b son constantes, y $A \neq 0$,

$$A \operatorname{sen} bt + B \cos bt = a \operatorname{sen}(bt + c)$$

donde $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ y c satisface (6) y (7).

▸ EJEMPLO 4 *Aplicación del Teorema 1*

Dado

$$f(t) = 2 \operatorname{sen} t + 2\sqrt{3} \cos t$$

(a) Defina $f(t)$ mediante una ecuación de la forma $f(t) = a \operatorname{sen}(t + c)$.
(b) Determine la amplitud, el periodo y el defasamiento de f, y dibuje la gráfica de f.
(c) Compruebe las respuestas trazando las gráficas de la ecuación dada y de la ecuación del inciso (b).

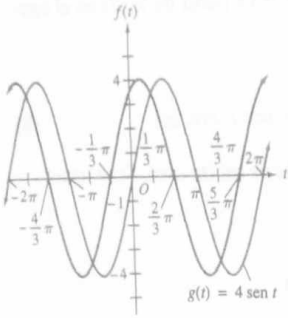
Solución

(a) Del Teorema 1

$$2 \operatorname{sen} t + 2\sqrt{3} \cos t = a \operatorname{sen}(t + c)$$

donde $a = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}$; esto es, $a = 4$; además, $\tan c = \frac{2\sqrt{3}}{2}$, es decir, $\tan c = \sqrt{3}$. De modo que se toma $c = \frac{1}{3}\pi$. En consecuencia,

$$f(t) = 4 \operatorname{sen}(t + \tfrac{1}{3}\pi)$$



$f(t) = 2 \operatorname{sen} t + 2\sqrt{3} \cos t$
$= 4 \operatorname{sen}\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)$

FIGURA 9.3

(b) La amplitud de f es 4. Como el coeficiente de t es 1, el periodo es $2\pi/1 = 2\pi$. El defasamiento es $\frac{1}{3}\pi$ y la gráfica de $g(t) = 4 \operatorname{sen} t$ es desplazada $\frac{1}{3}\pi$ unidades a la izquierda para obtener la gráfica requerida. La Figura 9.3 muestra esta gráfica mediante la curva negra, y la gráfica de la función definida por $g(t) = 4 \operatorname{sen} t$ está indicada por la curva gris.

(c) En la calculadora gráfica o graficadora, las gráficas de ambas funciones son las mismas que la gráfica de la Figura 9.3. ◀

A partir del Teorema 1 puede demostrarse que la suma de dos funciones seno que tienen el mismo periodo es una función seno que tiene ese periodo común. Este hecho tiene aplicaciones importantes en física en los campos de acústica y electricidad. El ejemplo siguiente proporciona un caso particular.

▶ EJEMPLO 5 *Aplicación del Teorema 1*

En un punto particular del espacio dos ondas atmosféricas producen presiones de $F(t)$ din/cm^2 y $G(t)$ din/cm^2 a los t segundos, donde

$$F(t) = 0.021 \operatorname{sen} 400\pi t \quad \text{y} \quad G(t) = 0.043 \operatorname{sen}(400\pi t + \tfrac{1}{5}\pi)$$

(a) Defina la suma de estas dos presiones mediante una ecuación de la forma $f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c)$. **(b)** Muestre que las tres funciones F, G y f tienen el mismo periodo. **(c)** Verifique las respuestas trazando las gráficas de $F + G$ y f.

Solución

(a) Si f es la suma de F y G,

$$\begin{aligned} f(t) &= F(t) + G(t) \\ &= 0.021 \operatorname{sen} 400\pi t + 0.043 \operatorname{sen}(400\pi t + \tfrac{1}{5}\pi) \\ &= 0.021 \operatorname{sen} 400\pi t + 0.043[\operatorname{sen} 400\pi t \cos \tfrac{1}{5}\pi + \cos 400\pi t \operatorname{sen} \tfrac{1}{5}\pi] \\ &= 0.021 \operatorname{sen} 400\pi t + (0.043 \cos \tfrac{1}{5}\pi) \operatorname{sen} 400\pi t \\ &\qquad + (0.043 \operatorname{sen} \tfrac{1}{5}\pi) \cos 400\pi t \\ &= 0.021 \operatorname{sen} 400\pi t + 0.035 \operatorname{sen} 400\pi t + 0.025 \cos 400\pi t \\ &= 0.056 \operatorname{sen} 400\pi t + 0.025 \cos 400\pi t \end{aligned}$$

Del Teorema 1, $f(t) = a \operatorname{sen}(400\pi t + c)$, donde

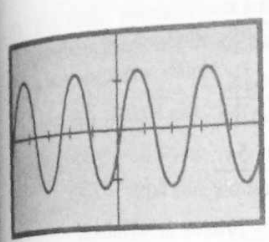
$$a = \sqrt{(0.056)^2 + (0.025)^2} \qquad \text{y} \qquad \tan c = \frac{0.025}{0.056}$$

$$= 0.061 \qquad \tan c = 0.446$$

$$c = 0.42$$

Por tanto,

$$f(t) = 0.061 \operatorname{sen}(400\pi t + 0.42)$$



[−0.01, 0.01] por [−0.1, 0.1]
$f(t) = 0.061 \operatorname{sen}(400\pi t + 0.42)$
FIGURA 9.4

(b) El periodo de cada una de las funciones F, G y f es $2\pi/400\pi = \frac{1}{200}$.

(c) En el rectángulo de inspección de [−0.01, 0.01] por [−0.1, 0.1] se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 9.4 para $F + G$ y f. ◀

EJERCICIOS 9.2

En los ejercicios 1 a 12, determine el valor exacto. No utilice calculadora.

1. (a) $\operatorname{sen} 15°$ (b) $\cos 165°$
2. (a) $\cos 75°$ (b) $\operatorname{sen} 105°$
3. (a) $\operatorname{sen}(-\frac{7}{12}\pi)$ (b) $\cos \frac{23}{12}\pi$
4. (a) $\operatorname{sen} \frac{11}{12}\pi$ (b) $\cos(-\frac{11}{12}\pi)$
5. (a) $\tan 105°$ (b) $\tan \frac{13}{12}\pi$
6. (a) $\tan 345°$ (b) $\tan \frac{5}{12}\pi$
7. (a) $\operatorname{sen} 32° \cos 58° + \cos 32° \operatorname{sen} 58°$
   (b) $\cos 116° \cos 64° - \operatorname{sen} 116° \operatorname{sen} 64°$
8. (a) $\operatorname{sen} 110° \cos 20° - \cos 110° \operatorname{sen} 20°$
   (b) $\operatorname{sen} 110° \operatorname{sen} 70° - \cos 110° \cos 70°$
9. (a) $\operatorname{sen} 85° \operatorname{sen} 25° + \cos 85° \cos 25°$
   (b) $\operatorname{sen} 70° \cos 205° - \cos 70° \operatorname{sen} 205°$
10. (a) $\cos 50° \cos 275° + \operatorname{sen} 50° \operatorname{sen} 275°$
    (b) $\cos 50° \operatorname{sen} 100° + \operatorname{sen} 50° \cos 100°$
11. (a) $\dfrac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°}$
    (b) $\dfrac{\tan 200° - \tan 80°}{1 + \tan 200° \tan 80°}$
12. (a) $\dfrac{\tan 110° + \tan 100°}{1 - \tan 110° \tan 100°}$
    (b) $\dfrac{\tan 65° - \tan 110°}{1 + \tan 65° \tan 110°}$

En los ejercicios 13 a 16, sin determinar α y β, encuentre (a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, (b) $\cos(\alpha + \beta)$, (c) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, (d) $\cos(\alpha - \beta)$, (e) el cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$ y (f) el cuadrante que contiene a $\alpha - \beta$.

13. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{13}$, α en el primer cuadrante; $\operatorname{sen} \beta = \frac{7}{25}$, β en el primer cuadrante.
14. $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, α en el primer cuadrante; $\cos \beta = \frac{4}{5}$, β en el primer cuadrante.
15. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{5}$, α en el cuarto cuadrante; $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, β en el tercer cuadrante.
16. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, α en el segundo cuadrante; $\operatorname{sen} \beta = -\frac{7}{25}$, β en el cuarto cuadrante.

En los ejercicios 17 a 20, sin determinar x y y, encuentre (a) $\tan(x + y)$, (b) $\tan(x - y)$, (c) el cuadrante que contiene a $x + y$, y (d) el cuadrante que contiene a $x - y$.

17. $\tan x = \frac{7}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$; $\tan y = \frac{3}{4}$, $0 < y < \frac{1}{2}\pi$
18. $\tan x = \frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$; $\tan y = \frac{5}{6}$, $0 < y < \frac{1}{2}\pi$
19. $\tan x = \frac{3}{10}$, $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$; $\tan y = -\frac{5}{4}$, $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$
20. $\tan x = -\frac{7}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; $\tan y = \frac{4}{5}$, $\pi < y < \frac{3}{2}\pi$

En los ejercicios 21 a 24, utilice las identidades de la suma y de la diferencia para probar la fórmula de reducción.

21. (a) $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$
(b) $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$
(c) $\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi - x) = -\cos x$

22. (a) $\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x$
(b) $\cos(\pi + x) = -\cos x$
(c) $\cos(\frac{3}{2}\pi - x) = -\operatorname{sen} x$

23. (a) $\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$
(b) $\tan(\pi + x) = \tan x$
(c) $\tan(\frac{1}{2}\pi + x) = -\cot x$

24. (a) $\cos(2\pi - x) = \cos x$
(b) $\tan(2\pi - x) = -\tan x$
(c) $\tan(\frac{3}{2}\pi - x) = \cot x$

En los ejercicios 25 a 30, pruebe la identidad.

25. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$

26. $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

27. $\sec(\alpha + \beta) = \dfrac{\sec\alpha \sec\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

28. $\csc(\alpha + \beta) = \dfrac{\csc\alpha \csc\beta}{\cot\beta + \cot\alpha}$

29. $\tan(\frac{1}{4}\pi + x) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

30. $\tan(x - \frac{3}{4}\pi) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

En los ejercicios 31 a 36, simplifique la expresión escribiéndola como $\pm \operatorname{sen} kx$, $\pm \cos kx$ *o* $\pm \tan kx$, *donde* k *es un entero positivo.*

31. (a) $\cos 8x \cos x + \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} x$
(b) $\operatorname{sen} 5x \cos 2x + \cos 5x \operatorname{sen} 2x$

32. (a) $\cos 3x \cos 2x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x$
(b) $\operatorname{sen} 5x \cos 4x - \cos 5x \operatorname{sen} 4x$

33. (a) $\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6x - \cos 4x \cos 6x$
(b) $\operatorname{sen} 3x \cos 4x - \cos 3x \operatorname{sen} 4x$

34. (a) $\operatorname{sen} x \cos 3x + \cos x \operatorname{sen} 3x$
(b) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x + \cos x \cos 5x$

35. (a) $\dfrac{\tan 8x + \tan 2x}{1 - \tan 8x \tan 2x}$
(b) $\dfrac{\tan \frac{1}{3}x - \tan \frac{7}{3}x}{1 + \tan \frac{1}{3}x \tan \frac{7}{3}x}$

36. (a) $\dfrac{\tan \frac{1}{4}x + \tan \frac{3}{4}x}{1 - \tan \frac{1}{4}x \tan \frac{3}{4}x}$
(b) $\dfrac{\tan 4x - \tan 5x}{1 + \tan 4x \tan 5x}$

En los ejercicios 37 a 40, pruebe la identidad.

37. $\dfrac{\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)}{\cos(u + v) + \cos(u - v)} = \tan u$

38. $\dfrac{\operatorname{sen}(u - v)}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} = \cot v - \cot u$

39. $\cos(u + v)\cos(u - v) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

40. $\cos u \operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen} u \cos(u + v) = \operatorname{sen} v$

41. Demuestre que si α, β y γ son ángulos de un triángulo, entonces
(a) $\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\gamma$
y
(b) $\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = -\cos\gamma$

42. Compruebe que la ecuación (6) se deduce de la (7).

En los ejercicios 43 a 48, exprese $f(t)$ *en la forma* $a \operatorname{sen}(bt + c)$; *(b) determine la amplitud, el periodo y el defasamiento de* f; *(c) dibuje la gráfica de* f, *y (d) verifique la gráfica del inciso (c) en la graficadora.*

43. $f(t) = \sqrt{3} \operatorname{sen} t + \cos t$

44. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t + 2 \cos t$

45. $f(t) = 3 \operatorname{sen} t - 3 \cos t$

46. $f(t) = 3 \operatorname{sen} t - 3\sqrt{3} \cos t$

47. $f(t) = 2.65 \operatorname{sen} 4t + 1.28 \cos 4t$

48. $f(t) = 0.37 \operatorname{sen} 6t - 0.42 \cos 6t$

49. Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación $f(t) = 3 \operatorname{sen} 6t + 4 \cos 6t$, donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central a los t segundos después de iniciado el movimiento. **(a)** Defina $f(t)$ mediante una ecuación de la forma $f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c)$. **(b)** Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia de f. **(c)** Dibuje la gráfica de f. **(d)** Verifique la gráfica del inciso (c) en la graficadora.

50. Haga el ejercicio 49 considerando $f(t) = -6 \operatorname{sen} 4t - 8 \cos 4t$.

51. Dos ondas atmosféricas en un punto del espacio producen presiones de $F(t)$ din/cm^2 y $G(t)$ din/cm^2 a los t segundos, donde

$$F(t) = 0.06 \operatorname{sen} 2\pi nt$$

y

$$G(t) = 0.04 \operatorname{sen}(2\pi nt - \tfrac{3}{4}\pi)$$

Defina la suma de F y G mediante una ecuación de la forma

$$f(t) = a \operatorname{sen}(2\pi nt + c)$$

Verifique las respuestas trazando las gráficas de $F + G$ y f.

52. En un circuito eléctrico la fuerza electromotriz es $E(t)$ volts, donde

$$E(t) = 50 + 6 \operatorname{sen} 60\pi t + 3.2 \cos 60\pi t - 0.6 \operatorname{sen} 120\pi t + 0.8 \cos 120\pi t$$

Defina $E(t)$ mediante una ecuación de la forma

$$E(t) = a_0 + a_1 \operatorname{sen}(60\pi t + c_1) + a_2 \operatorname{sen}(120\pi t + c_2)$$

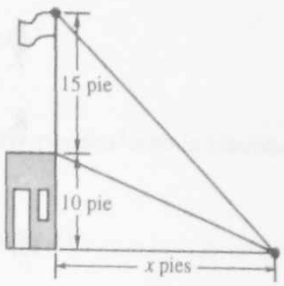
53. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación de movimiento

$$s = \operatorname{sen}(4t + \tfrac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(4t + \tfrac{1}{6}\pi)$$

donde s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. **(a)** Muestre que el movimiento es armónico simple definiendo s mediante una ecuación de la forma $s = a \operatorname{sen}(bt + c)$. **(b)** Encuentre la amplitud y la frecuencia del movimiento.

54. Haga el ejercicio 53 considerando $s = 6 \operatorname{sen}(t + \frac{1}{3}\pi) + 4 \operatorname{sen}(t - \frac{1}{6}\pi)$.

55. Un asta de 15 pie de longitud está situada en la parte superior de un edificio de 10 pie de longitud. En un punto en el suelo, a x pies de la base del edificio, el asta y el edificio subtienden ángulos iguales. Determine x. No olvide escribir una conclusión.



56. Dé una explicación de por qué $\operatorname{sen}(a + b)$ y $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$ no son iguales para valores arbitrarios de a y b discutiendo cómo pueden obtenerse las gráficas de

$$F(x) = \operatorname{sen}(x + 2) \quad \text{y} \quad G(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2$$

a partir de la curva del seno.

57. $\boxed{\iint \frac{dy}{dx}}$ El cociente

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} \tag{10}$$

se presenta en Cálculo y no está definido cuando $h = 0$. Sin embargo, en Cálculo es necesario conocer el comportamiento del cociente conforme h se aproxima cada vez más a 0. **(a)** Muestre que

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{1 - \cos h}{h}\right)$$

(b) A partir de las conclusiones de los ejercicios 49 y 50 de la Sección 7.3 y de la identidad del inciso (a), ¿a qué valor parece que se aproxima el cociente (10) conforme h se acerca cada vez más a 0?

9.3 IDENTIDADES DE VALOR MÚLTIPLE

OBJETIVOS

1. **Aprender y aplicar la identidad del seno de valor doble.**
2. **Aprender y aplicar la identidad del coseno de valor doble.**

3. **Aprender y aplicar formas alternativas de la identidad del coseno de valor doble.**
4. **Aprender y aplicar la identidad de la tangente de valor doble.**
5. **Aprender y aplicar identidades para $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ y $\tan^2 x$ en términos de $\cos 2x$.**
6. **Aprender y aplicar las identidades de semivalor.**
7. **Encontrar valores de función exactos a partir de las identidades de valor múltiple.**
8. **Probar otras identidades a partir de las identidades de valor múltiple.**
9. **Expresar potencias pares de seno y coseno en términos de valores del coseno con exponentes no mayores que 1.**
10. **Expresar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ como funciones racionales de z mediante la sustitución $z = \tan \frac{1}{2}x$.**

Las identidades de valor doble son casos especiales de las identidades del seno de la suma, coseno de la suma y tangente de la suma obtenidas en la Sección 9.2. En la identidad del seno de la suma

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

se considera $y = x$, y se obtiene

$$\operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x$$

a partir de la cual se obtiene la siguiente identidad del seno de valor doble.

Identidad del seno de valor doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Se procede de manera semejante con la identidad del coseno de la suma.

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x$$

De donde se obtiene la identidad del coseno de valor doble.

Identidad del coseno de valor doble

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Si x es un ángulo, las identidades de valor doble son referidas como *identidades de ángulo doble*.

Existen otras dos formas para la identidad del coseno de valor doble. Si $1 - \operatorname{sen}^2 x$ se sustituye por $\cos^2 x$ en la fórmula para $\cos 2x$, se obtiene

$$\begin{aligned}\cos 2x &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Además, si $1 - \cos^2 x$ se sustituye por $\operatorname{sen}^2 x$ en la identidad del coseno de valor doble, se tiene

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

A continuación, se establecen formalmente estos resultados.

Formas alternativas de la identidad del coseno de valor doble

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

▶ EJEMPLO 1 *Uso de las identidades del seno y coseno de valor doble*

Si $\operatorname{sen} t = \frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$, determine $\operatorname{sen} 2t$ y $\cos 2t$.

Solución Primero se determina $\cos t$ a partir de la identidad fundamental

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 = 1$$

Como $\operatorname{sen} t = \frac{3}{5}$, se tiene

$$\begin{aligned}(\tfrac{3}{5})^2 + \cos^2 t &= 1 \\ \cos^2 t &= 1 - \tfrac{9}{25} \\ \cos^2 t &= \tfrac{16}{25}\end{aligned}$$

Debido a que $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$, $\cos t < 0$. Por tanto, cuando se resuelve para $\cos t$ considerando la raíz cuadrada, se rechaza el valor positivo. De modo que

$$\cos t = -\tfrac{4}{5}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2t &= 2 \operatorname{sen} t \cos t \\ &= 2(\tfrac{3}{5})(-\tfrac{4}{5}) \\ &= -\tfrac{24}{25} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\ &= (-\tfrac{4}{5})^2 - (\tfrac{3}{5})^2 \\ &= \tfrac{7}{25} \end{aligned}$$

El ejemplo siguiente muestra cómo otras identidades de valor múltiple se deducen a partir de las identidades de valor doble y de la identidad del seno de la suma.

▶ EJEMPLO 2 *Obtención de una identidad para sen 3x a partir de otras identidades*

Obtenga una identidad para sen $3x$ en términos de sen x.

Solución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x + x) \\ &= \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x \\ &= (2 \operatorname{sen} x \cos x)\cos x + (1 - 2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x \\ &= 2 \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x \\ &= 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x \\ &= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x \end{aligned}$$

Para derivar una fórmula que exprese tan $2x$ en términos de tan x, se inicia con la identidad de la tangente de la suma.

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Se considera $y = x$ y se obtiene

$$\tan(x + x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x}$$

de donde se tiene la identidad de la tangente de valor doble siguiente.

Identidad de la tangente de valor doble

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Esta identidad no es válida si $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, donde k es un entero, porque para estos valores de x el denominador es cero. También la identidad no es válida si $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es un entero, porque para estos valores tan x no existe. Por supuesto, la ecuación es una identidad porque es válida para todos los valores de x en los cuales ambos miembros están definidos.

▶ EJEMPLO 3 *Uso de la identidad de la tangente de valor doble*

Obtenga una identidad para tan 4θ en términos de tan θ.

Solución A partir de la identidad de la tangente de valor doble con $x = 2\theta$, se tiene

$$\tan 2(2\theta) = \frac{2 \tan 2\theta}{1 - \tan^2 2\theta}$$

En el miembro derecho de esta identidad se aplica la identidad de la tangente de valor doble con $x = \theta$, y se obtiene

$$\begin{aligned}
\tan 4\theta &= \frac{2\left(\dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\right)}{1 - \left(\dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{4 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}}{\dfrac{(1 - \tan^2 \theta)^2 - 4 \tan^2 \theta}{(1 - \tan^2 \theta)^2}} \\
&= \frac{(1 - \tan^2 \theta)^2\left(\dfrac{4 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\right)}{(1 - \tan^2 \theta)^2\left[\dfrac{(1 - 2 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta) - 4 \tan^2 \theta}{(1 - \tan^2 \theta)^2}\right]} \\
&= \frac{4 \tan \theta(1 - \tan^2 \theta)}{1 - 6 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta}
\end{aligned}$$

◀

A partir de identidades útiles, que expresan $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ y $\tan^2 x$ en términos de $\cos 2x$, se obtienen las formas alternativas de la identidad del coseno de valor doble.

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \qquad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Así, se tienen las tres identidades siguientes.

Identidades para $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ y $\tan^2 x$ en términos de $\cos 2x$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

En las primeras dos de estas identidades, x puede ser cualquier número real o ángulo. En la tercera identidad, como $1 + \cos 2x$ no puede ser cero, $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier entero.

$\int\int \frac{dy}{dx}$

En Cálculo algunas veces es necesario expresar una potencia par de una función trigonométrica en términos de valores de las funciones trigonométricas con un exponente no mayor que 1. Las identidades precedentes son útiles para este propósito, como se muestra en el ejemplo siguiente.

▸ EJEMPLO 4 *Expresión de una potencia par del seno en términos de valores del coseno con exponentes no mayores que 1*

Exprese $\operatorname{sen}^4 t$ en términos de valores del coseno con exponentes no mayores que 1.

Solución Como $\operatorname{sen}^4 t = (\operatorname{sen}^2 t)^2$, se tiene de la primera de las fórmulas anteriores

$$\operatorname{sen}^4 t = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^4 t = \tfrac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)$$

Para obtener una sustitución de $\cos^2 2t$ en el miembro derecho, se aplica la fórmula para $\cos^2 x$ con $x = 2t$, obteniéndose

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4 t &= \tfrac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right)\\ &= \tfrac{1}{8}(2 - 4\cos 2t + 1 + \cos 4t)\\ &= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{1}{8}\cos 4t\end{aligned}$$

◄

Si en las identidades para $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ y $\tan^2 x$ se hace $x = \frac{1}{2}y$, entonces $2x = y$, y se obtienen las identidades de semivalor.

Identidades de semivalor

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}y = \frac{1 - \cos y}{2}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}y = \frac{1 + \cos y}{2}$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}y = \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y}$$

Cuando se aplican estas identidades para encontrar $\operatorname{sen} \frac{1}{2}y$, $\cos \frac{1}{2}y$ y $\tan \frac{1}{2}y$, el signo (+ o −) se determina a partir del valor de $\frac{1}{2}y$.

► **EJEMPLO 5** ***Determinación del valor de función exacto a partir de una identidad de semivalor***

Encuentre el valor exacto de $\cos \frac{1}{8}\pi$.

Solución Se utiliza la identidad para $\cos^2 \frac{1}{2}y$ con $y = \frac{1}{4}\pi$.

$$\cos^2 \tfrac{1}{8}\pi = \frac{1 + \cos \frac{1}{4}\pi}{2}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{8}\pi = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{8}\pi = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Como $0 < \frac{1}{8}\pi < \frac{1}{2}\pi$, $\cos \frac{1}{8}\pi > 0$. Por tanto,

$$\cos \tfrac{1}{8}\pi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

◄

Existen otras dos identidades para $\tan \frac{1}{2}y$. Una de ellas se deduce iniciando con la identidad

$$\tan \tfrac{1}{2}y = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}y}{\cos \frac{1}{2}y}$$

y al multiplicar el numerador y el denominador por $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}y$. Se tiene entonces

$$\tan \tfrac{1}{2}y = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}y}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}y \cos \frac{1}{2}y} \tag{1}$$

A partir de la identidad para $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}y$, se obtiene

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}y = 1 - \cos y \tag{2}$$

y de la identidad del seno de valor doble con $x = \frac{1}{2}y$, se tiene

$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}y \cos \tfrac{1}{2}y = \operatorname{sen} y \tag{3}$$

Al sustituir de (2) y (3) en (1), se obtiene

$$\tan \tfrac{1}{2}y = \frac{1 - \cos y}{\operatorname{sen} y}$$

Otra identidad que implica a $\tan \frac{1}{2}y$ se obtiene a partir de la identidad anterior al multiplicar el numerador y el denominador por $1 + \cos y$:

$$\begin{aligned} \tan \tfrac{1}{2}y &= \frac{(1 - \cos y)(1 + \cos y)}{\operatorname{sen} y(1 + \cos y)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 y}{\operatorname{sen} y(1 + \cos y)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sen} y(1 + \cos y)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} y}{1 + \cos y} \end{aligned}$$

A continuación se establecen formalmente estas dos identidades.

Identidades de la tangente de semivalor

$$\tan \tfrac{1}{2}y = \frac{1 - \cos y}{\operatorname{sen} y}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}y = \frac{\operatorname{sen} y}{1 + \cos y}$$

En la primera de estas identidades y puede ser cualquier número real o ángulo excepto $k\pi$, donde k es cualquier entero. En la segunda, y puede ser cualquier número real o ángulo excepto $(2k + 1)\pi$, donde k es cualquier entero. Observe que $(2k + 1)\pi$ es un múltiplo impar de π.

Cuando y representa un ángulo en las identidades de semivalor, éstas son referidas como *identidades de semiángulo*.

▸ EJEMPLO 6 *Determinación de valores de función exactos a partir de las identidades de semivalor*

Utilice las identidades de semiángulo para determinar el valor exacto de **(a)** tan 22.5° y **(b)** cos 105°.

Solución

(a) A partir de la identidad

$$\tan \tfrac{1}{2}y = \frac{1 - \cos y}{\operatorname{sen} y}$$

con $y = 45°$, se tiene

$$\tan 22.5° = \frac{1 - \cos 45°}{\operatorname{sen} 45°}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

(b) De la identidad

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}y = \frac{1 + \cos y}{2}$$

con $y = 210°$, se tiene

$$\cos^2 105° = \frac{1 + \cos 210°}{2}$$

Como 105° es un ángulo del segundo cuadrante, cos 105° es negativo. Por tanto, con $\cos 210° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, se tiene

$$\cos 105° = -\sqrt{\frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

◂

Compare el valor de cos 105° calculado a partir de la identidad del coseno del semiángulo del ejemplo anterior con el valor de cos 105° obtenido a partir de la identidad del coseno de la suma del ejemplo 1(b) de la Sección 9.2. En el ejercicio 21 se le pedirá que verifique en la calculadora que estos valores son iguales y después se probará algebraicamente.

▸ EJEMPLO 7 *Determinación de tan $\frac{1}{2}\theta$ cuando se conoce tan θ*

Si $\tan\theta = -\frac{7}{24}$ y $270° < \theta < 360°$, determine $\tan\frac{1}{2}\theta$.

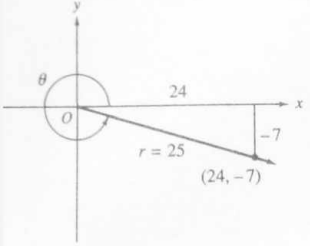


FIGURA 9.5

Solución La Figura 9.5 muestra el ángulo θ con el punto $(24, -7)$ elegido en su lado terminal. Del teorema de Pitágoras, $r = 25$. En consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{25} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{24}{25}$$

Por tanto,

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{1}{7}$$

◂

$\iint \frac{dy}{dx}$ En Cálculo suele ser necesario reducir una función racional de sen x y cos x a una función racional de z mediante la sustitución

$$z = \tan\tfrac{1}{2}x$$

De la identidad

$$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$$

con $y = \frac{1}{2}x$,

$$\cos x = 2\cos^2\tfrac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{\sec^2\frac{1}{2}x} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{1}{2}x} - 1 = \frac{2}{1+z^2} - 1 = \frac{2-(1+z^2)}{1+z^2}$$

De modo que

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \tag{4}$$

De manera semejante, a partir de la identidad sen $2y = 2 \operatorname{sen} y \cos y$, con $y = \frac{1}{2}x$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x \\ &= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}x \\ &= 2 \tan \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{1}{2}x} \\ &= 2 \tan \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1 + z^2} \tag{5}$$

Al emplear (4) y (5), sen x y cos x pueden expresarse como funciones racionales de z. El procedimiento se muestra en el ejemplo siguiente.

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$

▸ EJEMPLO 8 *Reducción de una función de sen x y cos x a una función racional de z mediante la sustitución* $z = \tan \frac{1}{2}x$

Escriba

$$3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x$$

como una función racional de z considerando $z = \tan \frac{1}{2}x$.

Solución Con $z = \tan \frac{1}{2}x$, se tiene de (4) y (5)

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x &= 3\left(\frac{2z}{1 + z^2}\right) - 2\left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) \\ &= \frac{6z}{1 + z^2} + \frac{-2 + 2z^2}{1 + z^2} \\ &= \frac{2z^2 + 6z - 2}{1 + z^2} \end{aligned}$$

◂

Las otras cuatro funciones trigonométricas pueden expresarse como funciones racionales de z aplicando (4) y (5) y las identidades

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

EJERCICIOS 9.3

En los ejercicios 1 a 8, determine (a) sen $2t$, *(b)* cos $2t$ *y (c)* tan $2t$.

1. $\operatorname{sen} t = \frac{4}{5}$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$
2. $\cos t = \frac{7}{25}$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$
3. $\cos t = -\frac{5}{13}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$
4. $\operatorname{sen} t = \frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$
5. $\tan t = \frac{8}{15}$ y $\operatorname{sen} t < 0$
6. $\tan t = -\frac{12}{5}$ y $\operatorname{sen} t < 0$
7. $\operatorname{sen} t = -\frac{7}{25}$ y $\cos t > 0$
8. $\cos t = -\frac{15}{17}$ y $\tan t > 0$

En los ejercicios 9 a 16, obtenga una identidad para el primer valor de función en términos del segundo valor de función.

9. cos $3x$; cos x
10. cos $4x$; cos x
11. sen $4x$; sen x
12. sen $5x$; sen x
13. tan $3x$; tan x
14. cot $2x$; cot x
15. sec $2x$; sec x
16. csc $2x$; csc x

En los ejercicios 17 a 20, escriba la expresión en términos de valores del coseno con exponente no mayor que 1.

17. $\cos^4 t$
18. $\operatorname{sen}^4 2t$
19. $\operatorname{sen}^2 3t \cos^2 3t$
20. $\cos^4 4t \operatorname{sen}^2 4t$
21. En el ejemplo 6(b) con la identidad del coseno del semivalor, se obtuvo $\cos 105° = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$; y en el ejemplo 1(b) de la Sección 9.2 con la identidad del coseno de la suma se obtuvo $\cos 105° = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Verifique en una calculadora que estos dos valores sean iguales y después pruebe algebraicamente esta igualdad.
22. **(a)** Utilice la identidad del coseno del semivalor para encontrar el valor exacto de $\cos \frac{1}{12}\pi$. **(b)** Verifique en la calculadora que el valor obtenido en el inciso (a) sea igual al valor de $\cos \frac{1}{12}\pi$ obtenido en el ejemplo 1(a) de la Sección 9.2 con la identidad del coseno de la diferencia. Después pruebe algebraicamente que estos dos valores sean iguales.
23. **(a)** Emplee la identidad del seno del semivalor para encontrar el valor exacto de sen 15°. **(b)** Verifique en la calculadora que el valor obtenido en el inciso (a) sea igual al valor de sen 15° obtenido en el ejercicio 1(a) de la Sección 9.2 con la identidad del seno de la diferencia. Después pruebe algebraicamente que estos dos valores sean iguales.
24. **(a)** Use la identidad de la tangente del semivalor para encontrar el valor exacto de $\tan \frac{5}{12}\pi$. **(b)** Verifique en la calculadora que el valor obtenido en el inciso (a) sea igual al valor de $\tan \frac{5}{12}\pi$ obtenido en el ejercicio 6(b) de la Sección 9.2 con la identidad de la tangente de la suma. Después compruebe algebraicamente que estos dos valores sean iguales.

En los ejercicios 25 a 28, utilice las identidades de semivalor para determinar el valor exacto de la función.

25. $\cos \frac{1}{8}\pi$
26. sen 165°
27. tan 112.5°
28. $\tan \frac{3}{8}\pi$

En los ejercicios 29 a 34, emplee una identidad de semivalor para encontrar el valor de la función.

29. $\cos t = \frac{1}{3}$ y $0 < t \frac{1}{2}\pi$; encuentre $\operatorname{sen} \frac{1}{2}t$
30. $\cos t = \frac{1}{2}$ y $0 < t < \frac{1}{2}\pi$; encuentre $\cos \frac{1}{2}t$
31. $\operatorname{sen} t = \frac{24}{25}$ y $\frac{1}{2}\pi < t < \pi$; encuentre $\cos \frac{1}{2}t$

32. $\operatorname{sen} t = \frac{4}{5}$ y $\cos t < 0$; encuentre $\tan \frac{1}{2}t$

33. $\tan t = -\frac{5}{12}$ y $\operatorname{sen} t > 0$; encuentre $\tan \frac{1}{2}t$

34. $\tan t = \frac{24}{7}$ y $\operatorname{sen} t < 0$; encuentre $\cos \frac{1}{2}t$

En los ejercicios 35 a 44, simplifique la expresión escribiéndola como a sen *kx, a* cos *kx o a* tan *kx, donde a es un entero y k es un entero positivo.*

35. (a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ (b) $\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x$
(c) $2 \operatorname{sen} \frac{3}{2}x \cos \frac{3}{2}x$

36. (a) $1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ (b) $1 - 2\operatorname{sen}^2 3x$
(c) $1 - 2\cos^2 x$

37. (a) $2 \operatorname{sen} x \cos x$ (b) $4 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$
(c) $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$

38. (a) $6 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$ (b) $2 \operatorname{sen} 6x \cos 6x$
(c) $2 \operatorname{sen} \frac{3}{2}x \cos \frac{3}{2}x$

39. (a) $\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ (b) $\dfrac{4\tan 2x}{\tan^2 2x - 1}$
(c) $\dfrac{6\tan \frac{3}{2}x}{1 - \tan^2 \frac{3}{2}x}$

40. (a) $\dfrac{2\tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}$ (b) $\dfrac{4\tan 4x}{1 - \tan^2 4x}$
(c) $\dfrac{8\tan 3x}{\tan^2 3x - 1}$

41. (a) $\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{1 + \cos 2t}$ (b) $\dfrac{\operatorname{sen} 4t}{\cos 4t + 1}$
(c) $\dfrac{\cos 4t - 1}{\operatorname{sen} 4t}$

42. (a) $\dfrac{1 - \cos 2t}{\operatorname{sen} 2t}$ (b) $\dfrac{1 - \cos 6t}{\operatorname{sen} 6t}$
(c) $\dfrac{\cos 8t - 1}{\operatorname{sen} 8t}$

43. (a) $\dfrac{\cos 2t \operatorname{sen} 4t}{1 + \cos 4t}$ (b) $\pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8t}{2}}$
(c) $\pm\sqrt{2 - 2\cos 8t}$

44. (a) $\dfrac{\cos 3t(1 - \cos 6t)}{\operatorname{sen} 6t}$ (b) $\pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 4t}{2}}$
(c) $\pm\sqrt{2 + 2\cos 4t}$

En los ejercicios 45 a 52, pruebe la identidad.

45. $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

46. $\dfrac{\tan x + \cot x}{\cot x - \tan x} = \sec 2x$

47. $\dfrac{2}{1 + \cos 2t} = \sec^2 t$

48. $\dfrac{1 + \cos 2t}{1 - \cos 2t} = \cot^2 t$

49. $\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta = \cos 2\theta$

50. $\dfrac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \cos 2\theta$

51. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2\beta + \cos 2\beta}{1 + \operatorname{sen} 2\beta - \cos 2\beta} = \cot \beta$

52. $\dfrac{1 - \cos 8x}{8} = \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x$

53. Si α y β son ángulos agudos de un triángulo rectángulo, verifique que $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} 2\beta$.

54. Si K unidades cuadradas es el área de un triángulo rectángulo, c unidades es la longitud de la hipotenusa, y α es un ángulo agudo, verifique que $K = \frac{1}{4}c^2 \operatorname{sen} 2\alpha$.

En los ejercicios 55 a 60, utilice la sustitución $z = \tan \frac{1}{2}x$ *para escribir la expresión como una función racional de z.*

55. $\boxed{\iint \frac{dy}{dx}}$ $1 - \operatorname{sen} x + \cos x$

56. $\operatorname{sen} x - \cos x + 2$

57. $\operatorname{sen} 2x + \tan x$

58. $\sec x + \tan x$

59. $\sec^2 x + \tan^2 x$

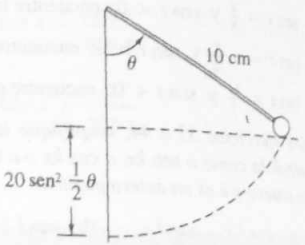
60. $\dfrac{2 - \cos 2x}{\operatorname{sen} x}$

61. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = 12\cos^2 4t - 6$, donde s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. (a) Muestre que el movimiento es armónico simple definiendo s mediante una ecuación de la

forma $s = a \operatorname{sen}(bt + c)$. (b) Determine la amplitud y la frecuencia del movimiento.

62. Haga el ejercicio 61 considerando $s = 5 - 10 \operatorname{sen}^2 2t$.

63. Un péndulo de 10 cm de longitud oscila de modo que θ es la medida en radianes del ángulo formado por el péndulo y una recta vertical. Demuestre que el número de centímetros en la altura vertical del extremo del péndulo por arriba de su posición más baja es $20 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$.



9.4 IDENTIDADES PARA EL PRODUCTO, SUMA Y DIFERENCIA DE SENO Y COSENO

OBJETIVOS

1. **Aprender y aplicar las identidades del producto del seno y coseno.**
2. **Aprender y aplicar las identidades de la suma y diferencia del seno y coseno.**
3. **Encontrar valores de función exactos a partir de las identidades para el producto, suma y diferencia de seno y coseno.**
4. **Probar otras identidades a partir de las identidades para el producto, suma y diferencia de seno y coseno.**
5. **Expresar la suma de dos funciones seno con la misma amplitud como el producto de funciones seno y coseno.**

En ciertas operaciones en Cálculo es necesario escribir una expresión que contenga el producto de las funciones seno y coseno como una suma o diferencia. Los medios para efectuar esto los proporcionan las identidades del producto de seno y coseno, las cuales se deducen de las identidades del seno y coseno de la suma y de la diferencia.

Las identidades del seno de la suma y la diferencia son

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

Si se suman los términos correspondientes de estas dos ecuaciones, se obtiene

$$\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y$$

y si se restan los términos de la segunda ecuación de los términos correspondientes de la primera, se tiene

$$\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2 \cos x \operatorname{sen} y$$

Estos resultados se presentan en las identidades siguientes.

Identidades del producto de seno y coseno

$$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$
$$\cos x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)]$$

otra coseno como la suma o diferencia de dos funciones seno, y son válidas para todos los números reales y ángulos x y y.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) De la identidad $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 5t \cos 5t &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(5t + 3t) + \operatorname{sen}(5t - 3t)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 2t)\end{aligned}$$

(b) De la identidad $\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)]$,

$$\begin{aligned}\cos 3t \operatorname{sen} 5t &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(3t + 5t) - \operatorname{sen}(3t - 5t)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} 8t - \operatorname{sen}(-2t)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} 8t - (-\operatorname{sen} 2t)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 2t)\end{aligned}$$

◀

Las identidades del coseno de la suma y la diferencia son

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Al sumar los términos correspondientes de estas dos ecuaciones, se tiene

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

y si se restan los términos de la primera ecuación de los términos correspondientes de la segunda, se obtiene

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

De estos dos resultados se tienen las identidades siguientes.

Identidades del producto de seno y coseno

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

La primera identidad expresa el producto de dos funciones coseno como la suma de dos funciones coseno, y la segunda identidad expresa el producto de dos funciones seno como la diferencia de dos funciones coseno. Ambas identidades son válidas para todos los números reales y todos los ángulos x y y.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) De la identidad $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$,

$$\begin{aligned}\cos 4\theta \cos 2\theta &= \tfrac{1}{2}[\cos(4\theta + 2\theta) + \cos(4\theta - 2\theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 6\theta + \cos 2\theta)\end{aligned}$$

(b) De la identidad $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen} 2\theta &= \tfrac{1}{2}[\cos(4\theta - 2\theta) - \cos(4\theta + 2\theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 6\theta)\end{aligned}$$

◂

▸ EJEMPLO 1 *Determinación del valor exacto del producto de los valores de las funciones seno y coseno*

Determine el valor exacto de

$$\operatorname{sen} \tfrac{25}{24}\pi \cos \tfrac{5}{24}\pi$$

Solución De la identidad $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \tfrac{25}{24}\pi \cos \tfrac{5}{24}\pi &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\tfrac{25}{24}\pi + \tfrac{5}{24}\pi) + \operatorname{sen}(\tfrac{25}{24}\pi - \tfrac{5}{24}\pi)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} \tfrac{30}{24}\pi + \operatorname{sen} \tfrac{20}{24}\pi) \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} \tfrac{5}{4}\pi + \operatorname{sen} \tfrac{5}{6}\pi) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

◂

▸ EJEMPLO 2 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$(\operatorname{sen} 2t)(1 + 2\cos t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} 3t$$

Solución Se inicia con el miembro izquierdo. Después de eliminar paréntesis, se aplica la identidad del producto de seno y coseno para sen x cos y.

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} 2t)(1 + 2\cos t) &= \operatorname{sen} 2t + 2\operatorname{sen} 2t\cos t \\ &= \operatorname{sen} 2t + 2 \cdot \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(2t + t) + \operatorname{sen}(2t - t)] \\ &= \operatorname{sen} 2t + (\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} t) \\ &= \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} 3t\end{aligned}$$

◂

Las identidades del producto de seno y coseno pueden utilizarse para escribir una suma o una diferencia de funciones seno y coseno como un producto. Para esto, se efectúan las sustituciones

$$x + y = w \quad \text{y} \quad x - y = z \tag{1}$$

En consecuencia,

$$(x + y) + (x - y) = w + z$$

$$x = \frac{w + z}{2} \tag{2}$$

También

$$(x + y) - (x - y) = w - z$$

$$y = \frac{w - z}{2} \tag{3}$$

Al sustituir de (1), (2) y (3) en las cuatro identidades del producto de seno y coseno, se obtienen las identidades siguientes.

Identidades de la suma y diferencia de seno y coseno

$$\operatorname{sen} w + \operatorname{sen} z = 2\operatorname{sen}\left(\frac{w + z}{2}\right)\cos\left(\frac{w - z}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} w - \operatorname{sen} z = 2\cos\left(\frac{w + z}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{w - z}{2}\right)$$

$$\cos w + \cos z = 2\cos\left(\frac{w + z}{2}\right)\cos\left(\frac{w - z}{2}\right)$$

$$\cos w - \cos z = -2\operatorname{sen}\left(\frac{w + z}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{w - z}{2}\right)$$

La primera y tercera de estas identidades se denominan *identidades de la suma del seno* y *de la suma del coseno*, respectivamente. Asimismo, la segunda y cuarta son llamadas *identidades de la diferencia del seno* y *de la diferencia del coseno*, respectivamente. Las cuatro identidades son válidas para todos los números reales y ángulos w y z.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

A fin de escribir $\operatorname{sen} 8x + \operatorname{sen} 4x$ como un producto, se aplica la identidad de la suma del seno y se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 8x + \operatorname{sen} 4x &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{8x + 4x}{2}\right)\cos\left(\frac{8x - 4x}{2}\right)\\ &= 2 \operatorname{sen} 6x \cos 2x\end{aligned}$$

◂

▸ EJEMPLO 3 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$\frac{\cos 2y + \cos 4y}{\operatorname{sen} 4y - \operatorname{sen} 2y} = \cot y$$

Solución Se comienza con el miembro izquierdo y se aplica la identidad de la suma del coseno al numerador y la identidad de la diferencia del seno al denominador.

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2y + \cos 4y}{\operatorname{sen} 4y - \operatorname{sen} 2y} &= \frac{2\cos\left(\frac{2y + 4y}{2}\right)\cos\left(\frac{2y - 4y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{4y + 2y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{4y - 2y}{2}\right)}\\ &= \frac{2\cos 3y\cos(-y)}{2\cos 3y \operatorname{sen} y}\\ &= \frac{\cos(-y)}{\operatorname{sen} y}\\ &= \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\\ &= \cot y\end{aligned}$$

◂

En el ejemplo 5 de la Sección 9.2, se mostró que la suma de dos funciones seno con el mismo periodo es una función seno que tiene ese periodo común. El ejemplo siguiente implica la adición de dos funciones seno que tienen periodos diferentes y la misma amplitud.

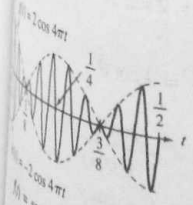


FIGURA 9.6

▸ EJEMPLO 4 *Expresión de la suma de dos funciones seno como el producto de funciones seno y coseno y dibujo de la gráfica*

Dada

$$f(t) = \operatorname{sen} 44\pi t + \operatorname{sen} 36\pi t$$

(a) Exprese $f(t)$ como el producto de funciones seno y coseno. **(b)** Dibuje la gráfica de f considerando un periodo de la función coseno determinada en el inciso (a) y compruebe la gráfica en la calculadora gráfica o graficadora.

Solución

(a) Al aplicar la identidad de la suma del seno al miembro derecho de la ecuación dada, se tiene

$$f(t) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{44\pi t + 36\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{44\pi t - 36\pi t}{2}\right)$$

$$= 2 \operatorname{sen} 40\pi t \cos 4\pi t$$

(b) El periodo de $\cos 4\pi t$ es $\frac{2\pi}{4\pi}$, o $\frac{1}{2}$. Por tanto, se desea obtener la gráfica de f en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

Como $-1 \leq \operatorname{sen} 40\pi t \leq 1$, la gráfica de f está entre las gráficas de

$$g(t) = 2\cos 4\pi t \quad \text{y} \quad h(t) = -2\cos 4\pi t$$

mostradas como curvas punteadas en la Figura 9.6. La gráfica de f intersecta a la gráfica de g o h cuando $\operatorname{sen} 40\pi t = \pm 1$; esto es, cuando $40\pi t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, $k \in Z$, o, equivalentemente, cuando $t = \frac{1}{80} + k \cdot \frac{1}{40}$, $k \in Z$. Con esta información, se dibuja la gráfica de f en $[0, \frac{1}{2}]$ como se muestra en la Figura 9.6. Se obtiene la misma gráfica en la graficadora. ◂

La gráfica de la función del ejemplo 4 muestra el *principio de superposición*. Este tipo de comportamiento ocurre siempre que se tiene la suma de dos funciones seno o coseno de la misma amplitud y para las cuales la diferencia de las frecuencias es pequeña comparada con la suma de las frecuencias. Por ejemplo, en el ejemplo 4, si se hace

$$F(t) = \operatorname{sen} 44\pi t \qquad G(t) = \operatorname{sen} 36\pi t$$

$$= \operatorname{sen} 2\pi(22)t \qquad = \operatorname{sen} 2\pi(18)t$$

las frecuencias de F y G son $n_1 = 22$ y $n_2 = 18$, respectivamente; $n_1 - n_2 = 4$ y $n_1 + n_2 = 40$. De modo que la gráfica de $F + G$ tiene la apariencia mostrada en la Figura 9.6, donde la amplitud varía de acuerdo con un patrón específico.

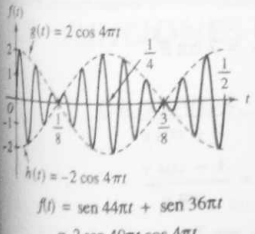


FIGURA 9.6

El principio de superposición de ondas sonoras produce lo que los físicos llaman *batidos*. El concepto de la superposición de dos o más

ondas tiene aplicaciones en los campos de televisión, radio y comunicaciones telefónicas, así como de electricidad cuando la corriente tiene una frecuencia elevada.

EJERCICIOS 9.4

En los ejercicios 1 a 4, escriba el producto como una suma o diferencia de valores de función.

1. (a) $\operatorname{sen} 4x \cos x$ (b) $\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} x$ (c) $\cos 4x \cos x$

2. (a) $\operatorname{sen} 7x \cos 3x$ (b) $\operatorname{sen} 7x \operatorname{sen} 3x$ (c) $\cos 7x \cos 3x$

3. (a) $\operatorname{sen} 2x \cos 6x$ (b) $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 6x$ (c) $\cos 2x \cos 6x$

4. (a) $\operatorname{sen} 4x \cos 5x$ (b) $\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 5x$ (c) $\cos 4x \cos 5x$

En los ejercicios 5 a 8, encuentre el valor exacto.

5. (a) $\operatorname{sen} \frac{7}{24}\pi \cos \frac{1}{24}\pi$ (b) $\cos \frac{1}{8}\pi \cos \frac{7}{8}\pi$

6. (a) $\operatorname{sen} \frac{3}{8}\pi \cos \frac{1}{8}\pi$ (b) $\operatorname{sen} \frac{1}{24}\pi \operatorname{sen} \frac{5}{24}\pi$

7. (a) $\cos \frac{9}{8}\pi \operatorname{sen} \frac{3}{8}\pi$ (b) $\operatorname{sen} \frac{5}{24}\pi \operatorname{sen} \frac{25}{24}\pi$

8. (a) $\cos \frac{31}{24}\pi \operatorname{sen} \frac{13}{24}\pi$ (b) $\cos \frac{3}{8}\pi \cos \frac{11}{8}\pi$

En los ejercicios 9 a 12, escriba la suma o la diferencia como un producto de valores de función.

9. (a) $\operatorname{sen} 6t + \operatorname{sen} 2t$ (b) $\operatorname{sen} 6t - \operatorname{sen} 2t$ (c) $\cos 6t + \cos 2t$ (d) $\cos 6t - \cos 2t$

10. (a) $\operatorname{sen} 5t + \operatorname{sen} 3t$ (b) $\operatorname{sen} 5t - \operatorname{sen} 3t$ (c) $\cos 5t + \cos 3t$ (d) $\cos 5t - \cos 3t$

11. (a) $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 7\theta$ (b) $\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} 7\theta$ (c) $\cos 3\theta + \cos 7\theta$ (d) $\cos 3\theta - \cos 7\theta$

12. (a) $\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 6\theta$ (b) $\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 6\theta$ (c) $\cos 4\theta + \cos 6\theta$ (d) $\cos 4\theta - \cos 6\theta$

En los ejercicios 13 a 16, determine el valor exacto.

13. (a) $\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$ (b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

14. (a) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$ (b) $\operatorname{sen} 105^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$

15. (a) $\operatorname{sen} 165^\circ + \cos 195^\circ$ (b) $\operatorname{sen} 165^\circ - \cos 195^\circ$

16. (a) $\operatorname{sen} 195^\circ + \cos 345^\circ$ (b) $\operatorname{sen} 195^\circ - \cos 345^\circ$

En los ejercicios 17 a 20, verifique la igualdad.

17. $\dfrac{\operatorname{sen} 37^\circ + \operatorname{sen} 23^\circ}{\cos 37^\circ + \cos 23^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

18. $\dfrac{\cos 62^\circ - \cos 28^\circ}{\operatorname{sen} 62^\circ - \operatorname{sen} 28^\circ} = -1$

19. $\dfrac{\operatorname{sen} 144^\circ - \operatorname{sen} 126^\circ}{\cos 144^\circ - \cos 126^\circ} = 1$

20. $\dfrac{\operatorname{sen} 140^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 140^\circ + \cos 20^\circ} = \sqrt{3}$

En los ejercicios 21 a 34, demuestre la identidad.

21. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}{\cos 3x + \cos 7x} = \tan 5x$

22. $\dfrac{\cos 6x - \cos 2x}{\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 2x} = -\tan 4x$

23. $\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\beta}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta} = \dfrac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$

24. $\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} = \tan(\alpha + \beta)$

25. $\dfrac{\cos t - \cos 5t}{\cos t \operatorname{sen} t} = 4 \operatorname{sen} 3t$

26. $\dfrac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t}{\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t} = 2 \operatorname{sen} t$

27. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 7\theta}{2 \operatorname{sen}^2 2\theta - 1} = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

28. $\dfrac{\operatorname{sen} 6\theta + \operatorname{sen} 4\theta}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 5\theta} = 2 \cot \theta$

29. $\dfrac{\cos 2y - \cos 3y}{\operatorname{sen} 3y + \operatorname{sen} 2y} = \dfrac{\operatorname{sen} y}{1 + \cos y}$

30. $\dfrac{\operatorname{sen} 5y - \operatorname{sen} 4y}{\cos 5y + \cos 4y} = \dfrac{1 - \cos y}{\operatorname{sen} y}$

31. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$

32. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 4x$

33. $\operatorname{sen}^2 t \cos^4 t = \dfrac{2 + \cos 2t - 2\cos 4t - \cos 6t}{32}$

34. $\operatorname{sen}^3 t \cos^3 t = \dfrac{3 \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} 6t}{32}$

En los ejercicios 35 a 42, utilice el método del ejemplo 4 para dibujar la gráfica de la función en el intervalo indicado. Compruebe la gráfica en la graficadora.

35. $f(t) = \operatorname{sen} 21\pi t + \operatorname{sen} 19\pi t; [0, 2]$

36. $f(t) = \cos 9\pi t + \cos 11\pi t; [0, 2]$

37. $f(t) = \cos 9\pi t - \cos 11\pi t, [0, 2]$

38. $f(t) = \operatorname{sen} 21\pi t - \operatorname{sen} 19\pi t; [0, 2]$

39. $f(t) = 2\cos 80\pi t + 2\cos 100\pi t; [0, \frac{1}{5}]$

40. $f(t) = 2\operatorname{sen} 80\pi t + 2\operatorname{sen} 100\pi t; [0, \frac{1}{5}]$

41. $f(t) = 3\operatorname{sen} 95t - 3\operatorname{sen} 105t; [0, \frac{2}{5}]$

42. $f(t) = 3\cos 95t - 3\cos 105t; [0, \frac{2}{5}]$

En los ejercicios 43 a 46, verifique la igualdad si α, β y γ son los ángulos de un triángulo.

43. $\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma = 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma$

44. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$

45. $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$

46. $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \gamma = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma$

47. Dos diapasones se activan al mismo tiempo y cada uno produce un sonido con la misma amplitud de presión de 0.02 din/cm^2. Si un diapasón vibra a 252 ciclos por segundo y el otro vibra a 248 ciclos por segundo, una ecuación de la onda sonora producida es

$$f(t) = 0.02 \operatorname{sen} 504\pi t + 0.02 \operatorname{sen} 496\pi t$$

donde $f(t)$ dinas por centímetro cuadrado es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los t segundos. Escriba esta ecuación como el producto de una función seno y otra coseno. Compruebe la respuesta al verificar en la graficadora que las gráficas de ambas ecuaciones sean las mismas.

48. Una nota emitida por cierto instrumento musical es tal que el tono fundamental alcanza una frecuencia de 250 ciclos por segundo y el único sobretono importante es el primero. Si las amplitudes de presión del tono fundamental y del sobretono son de 0.04 din/cm^2 cada una, una ecuación de la onda sonora que emite tal instrumento para esta nota es

$$f(t) = 0.04 \operatorname{sen} 500\pi t + 0.04 \operatorname{sen} 1\,000\pi t$$

donde $f(t)$ dinas por centímetro cuadrado es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano a los t segundos. Escriba esta ecuación como el producto de una función seno y otra coseno. Compruebe la respuesta en la graficadora al verificar que las gráficas de ambas ecuaciones sean las mismas.

9.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

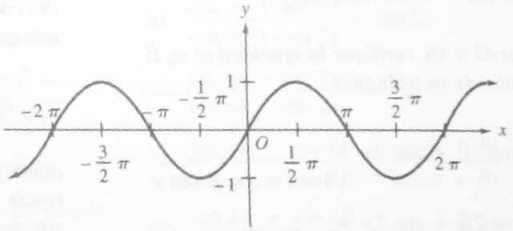
OBJETIVOS

1. **Definir la función seno inverso.**
2. **Definir la función coseno inverso.**
3. **Definir la función tangente inversa.**
4. **Definir la función cotangente inversa.**
5. **Definir la función secante inversa.**
6. **Definir la función cosecante inversa.**
7. **Dibujar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.**

8. **Calcular valores de las funciones trigonométricas inversas en una calculadora.**
9. **Encontrar valores de función exactos que implican funciones trigonométricas inversas.**
10. **Probar identidades que implican funciones trigonométricas inversas.**
11. **Resolver enunciados de problemas cuyos modelos matemáticos implican funciones trigonométricas inversas.**

Antes de iniciar el estudio de las funciones trigonométricas inversas, si lo desea, puede revisar la Sección 6.1 donde se introdujeron las funciones inversas. Se mostró ahí que una función uno a uno tiene una inversa, y se aplicó la prueba de la recta horizontal para determinar si una función es uno a uno.

La Figura 9.7 muestra la gráfica de la función seno. Ésta no es uno a uno porque cada número de su contradominio es el valor de función de más de un número de su dominio. Por tanto, la función seno no tiene inversa. Sin embargo, observe en la Figura 9.7 que en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, cada recta horizontal intersecta esta porción de la gráfica en no más de un punto. De modo que de la prueba de la recta horizontal, la función F para la cual



$y = \operatorname{sen} x$

FIGURA 9.7

$$F(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad -\tfrac{1}{2}\pi \leq x \leq \tfrac{1}{2}\pi \tag{1}$$

es uno a uno y, por tanto, tiene una función inversa. El dominio de F es el intervalo cerrado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, y su contradominio es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. La gráfica de F se presenta en la Figura 9.8. La inversa de la función definida por (1) se denomina *función seno inverso* y se denota por el símbolo sen^{-1}. A continuación, se presenta la definición formal.

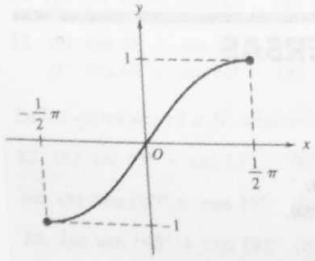


FIGURA 9.8

DEFINICIÓN La función seno inverso

La **función seno inverso,** denotada por sen^{-1}, está definida como sigue:

$$y = \text{sen}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \text{sen } y \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \le y \le \tfrac{1}{2}\pi$$

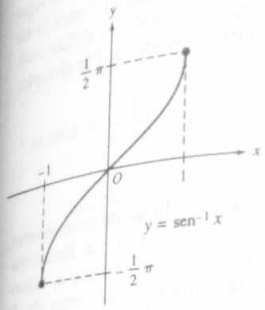


FIGURA 9.9

El dominio de sen^{-1} es el intervalo cerrado $[-1, 1]$, y su contradominio es el intervalo cerrado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

Para dibujar la gráfica de la función seno inverso, sea

$$f(x) = \text{sen}^{-1} x$$

La Tabla 1 proporciona valores de $f(x)$ para algunos valores específicos de x. La gráfica se muestra en la Figura 9.9. Puede verificar esta gráfica en la calculadora gráfica o graficadora.

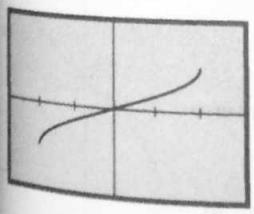
Tabla 1

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{sen}^{-1} x$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$

► EJEMPLO 1 *Dibujo de las gráficas de funciones que implican seno inverso*

Encuentre el dominio y el contradominio de la función definida mediante la ecuación y dibuje la gráfica de la función. Verifique la gráfica en la graficadora.

(a) $f(x) = \text{sen}^{-1} \frac{1}{2} x$ **(b)** $g(x) = 2 \text{ sen}^{-1} 3x$



$[-3, 3]$ por $[-\pi, \pi]$
$f(x) = \text{sen}^{-1} \frac{1}{2} x$

FIGURA 9.10

Solución

(a) Como el dominio de la función seno inverso es $[-1, 1]$, puede obtenerse el dominio de f escribiendo la desigualdad $-1 \le \frac{1}{2} x \le 1$ como $-2 \le x \le 2$. De modo que el dominio es $[-2, 2]$, y su contradominio es $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Con esta información y al localizar algunos puntos, se obtiene la gráfica, la cual es acorde con la de la graficadora, ésta se muestra en la Figura 9.10.

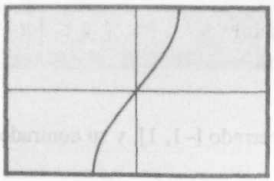
(b) Para el dominio de g, se escribe la desigualdad $-1 \le 3x \le 1$ como $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$. Por tanto, el dominio es $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Debido a que el contradominio de la función seno inverso es $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, el contradominio de g es $[-\pi, \pi]$. Después de localizar algunos puntos

se obtiene la gráfica, la cual es acorde con la de la graficadora. Ésta se muestra en la Figura 9.11. ◂

El uso del símbolo -1 para representar la función seno inverso hace necesario denotar el recíproco de sen x como $(\text{sen } x)^{-1}$ para evitar confusiones. Una convención similar se aplica cuando se utiliza cualquier exponente negativo con una función trigonométrica. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\text{sen } x} = (\text{sen } x)^{-1} \qquad \frac{1}{\text{sen}^2 x} = (\text{sen } x)^{-2} \qquad \frac{1}{\cos^3 x} = (\cos x)^{-3}$$

y así sucesivamente.



[−1, 1] por [−π, π]
$g(x) = 2 \text{ sen}^{-1} 3x$
FIGURA 9.11

La terminología **arco seno** suele utilizarse en lugar de seno inverso, y la notación arc sen x puede emplearse en vez de $\text{sen}^{-1} x$. Esta notación probablemente se deriva del hecho de que si $t = \text{arc sen } u$, entonces sen $t = u$, donde t unidades es la longitud del arco de la circunferencia unitaria para el cual el seno es u.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) $\text{sen}^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$ **(b)** $\text{arc sen } \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$

(c) $\text{sen}^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}\pi$ **(d)** $\text{arc sen}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}\pi$ ◂

Se pueden obtener aproximaciones de los valores de la función seno inverso en la calculadora utilizando la tecla $\boxed{\text{sen}^{-1}}$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Para determinar sen^{-1} 0.8724 en la calculadora, primero se activa el modo de radianes. Después se introduce 0.8724 y enseguida se oprime la tecla $\boxed{\text{sen}^{-1}}$, obteniéndose

$$\text{sen}^{-1} 0.8724 \approx 1.060$$ ◂

De la definición de la función seno inverso

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x \qquad \text{para } x \text{ en } [-1, 1]$$

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } y) = y \qquad \text{para } y \text{ en } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Observe que $\text{sen}^{-1}(\text{sen } y) \neq y$ si y no está en el intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\pi \qquad = -\frac{1}{4}\pi$$

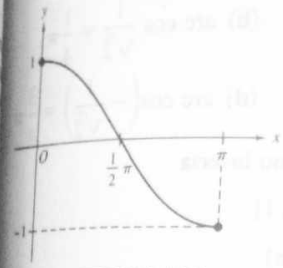


FIGURA 9.12

▶ **EJEMPLO 2** ***Determinación de valores de función que implican seno inverso***

Encuentre: **(a)** $\cos[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})]$; **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}(\cos\frac{2}{3}\pi)$.

Solución Como el contradominio de la función seno inverso es $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$.

(a) $\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\cos\frac{2}{3}\pi\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = -\frac{1}{6}\pi \quad \blacktriangleleft$$

Tabla 2

x	$\cos^{-1} x$
-1	π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$
0	$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{6}\pi$
1	0

El coseno no tiene función inversa porque no es uno a uno. Para definir la función coseno inverso, debe restringirse el coseno al intervalo $[0, \pi]$. Considere la función G definida por

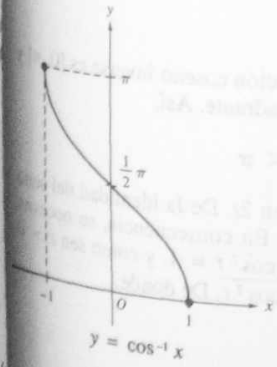
$$G(x) = \cos x \quad \text{y} \quad 0 \le x \le \pi$$

El dominio de G es el intervalo cerrado $[0, \pi]$, y su contradominio es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. La gráfica de G se muestra en la Figura 9.12. En la prueba de la recta horizontal se observa que G es uno a uno. Por tanto, tiene una función inversa denominada *función coseno inversa* y denotada por $\cos^{-1}$.

DEFINICIÓN **La función coseno inversa**

La **función coseno inversa,** denotada por $\cos^{-1}$, se define como sigue:

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y \quad \text{y} \quad 0 \le y \le \pi$$



$y = \cos^{-1} x$

FIGURA 9.13

El dominio de $\cos^{-1}$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$, y su contradominio es el intervalo cerrado $[0, \pi]$.

La Tabla 2 proporciona valores de $\cos^{-1} x$ para algunos valores particulares de x. A partir de ellos se obtiene la gráfica de la función coseno inversa mostrada en la Figura 9.13. Compruebe esta gráfica en la graficadora.

La función coseno inverso también se conoce como función **arco coseno,** y la notación arc cos x puede utilizarse en lugar de $\cos^{-1} x$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$ **(b)** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$

(c) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$ **(d)** $\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$

De la definición de la función coseno inversa

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \qquad \text{para } x \text{ en } [-1, 1]$$

$$\cos^{-1}(\cos y) = y \qquad \text{para } y \text{ en } [0, \pi]$$

Observe que existe otra vez una restricción sobre y a fin de tener la igualdad $\cos^{-1}(\cos y) = y$. Por ejemplo, como $\frac{3}{4}\pi$ está en $[0, \pi]$

$$\cos^{-1}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{4}\pi$$

Sin embargo,

$$\cos^{-1}\left(\cos\frac{5}{4}\pi\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{y} \quad \cos^{-1}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\pi \qquad\qquad = \frac{1}{4}\pi$$

▸ EJEMPLO 3 *Determinación de un valor de función exacto que implica coseno inverso*

Determine el valor exacto de $\operatorname{sen}[2\cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$.

Solución Como se desea obtener una función trigonométrica del número $\cos^{-1}(-\frac{3}{5})$, t representará este número.

$$t = \cos^{-1}(-\tfrac{3}{5})$$

Debido a que el contradominio de la función coseno inversa es $[0, \pi]$ y $\cos t$ es negativo, t está en el segundo cuadrante. Así,

$$\cos t = -\tfrac{3}{5} \qquad \text{y} \qquad \tfrac{1}{2}\pi < t < \pi$$

Se desea encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen} 2t$. De la identidad del seno de valor doble, $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$. En consecuencia, se necesita calcular $\operatorname{sen} t$. De la identidad $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, y como $\operatorname{sen} t > 0$ ya que t está en $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$. De donde,

$$\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - (-\tfrac{3}{5})^2}$$

$$= \tfrac{4}{5}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2t &= 2 \operatorname{sen} t \cos t \\ &= 2(\tfrac{4}{5})(-\tfrac{3}{5}) \\ &= -\tfrac{24}{25} \end{aligned}$$

a partir de lo cual se concluye que

$$\operatorname{sen}[2 \cos^{-1}(-\tfrac{3}{5})] = -\tfrac{24}{25}$$ ◀

▶ EJEMPLO 4 *Demostración de una identidad*

Demuestre la identidad

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{para } |x| \leq 1$$

Solución Sea x en $[-1, 1]$, y sea

$$t = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x) \tag{2}$$

Al aplicar la fórmula de reducción $\cos(\frac{1}{2}\pi - v) = \operatorname{sen} v$ con $v = \operatorname{sen}^{-1} x$ en el miembro derecho de (2), se obtiene

$$t = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$

Como x está en $[-1, 1]$, $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$; por tanto,

$$t = x$$

Al sustituir t por x en (2), se tiene

$$x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x) \tag{3}$$

Debido a que $-\frac{1}{2}\pi \leq \operatorname{sen}^{-1} x \leq \frac{1}{2}\pi$, al sumar $-\frac{1}{2}\pi$ a cada miembro, se obtiene

$$-\pi \leq -\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{sen}^{-1} x \leq 0$$

Si se multiplica cada miembro de esta desigualdad por -1 y se invierte el sentido de los signos de desigualdad se tiene

$$0 \leq \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \leq \pi \tag{4}$$

De (3), (4) y la definición de $\cos^{-1}$, se deduce que

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{para } |x| \leq 1$$

que es lo que se deseaba probar. ◀

Observe en la solución del ejemplo 4 que la identidad depende de considerar el contradominio de la función coseno inversa como $[0, \pi]$.

Para obtener la función tangente inversa, primero se restringe la función tangente al intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Sea H la función definida por

$$H(x) = \tan x \qquad \text{y} \qquad -\tfrac{1}{2}\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi$$

El dominio de H es el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, y su contradominio es el conjunto R de los números reales. Su gráfica se muestra en la Figura 9.14. De la prueba de la recta horizontal, H es uno a uno. Por tanto, tiene una función inversa, denominada *función tangente inversa* y denotada por $\tan^{-1}$

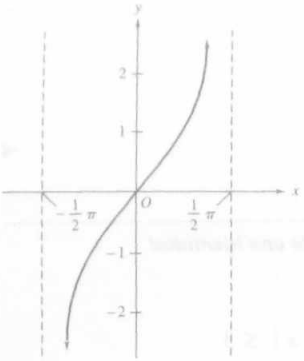


FIGURA 9.14

DEFINICIÓN La función tangente inversa

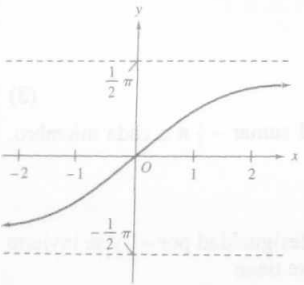
La **función tangente inversa,** denotada por $\tan^{-1}$, se define como sigue:

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y \quad \text{y} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi$$

El dominio de $\tan^{-1}$ es el conjunto R de los números reales y el contradominio es el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

La Figura 9.15 muestra la gráfica de $\tan^{-1}$. Verifíquela en la graficadora.

La función tangente inversa suele referirse como la función arco **tangente** y la notación arc tan x se emplea en lugar de $\tan^{-1} x$.



$y = \tan^{-1} x$

FIGURA 9.15

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) $\tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}\pi$ **(b)** $\text{arc tan}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{6}\pi$ **(c)** $\tan^{-1} 0 = 0$ ◂

De la definición de la función tangente inversa

$\tan(\tan^{-1} x) = x$ para x en R

$\tan^{-1}(\tan y) = y$ para y en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

$$\tan^{-1}(\tan \tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi \qquad \text{y} \qquad \tan^{-1}[\tan(-\tfrac{1}{4}\pi)] = -\tfrac{1}{4}\pi$$

Sin embargo,

$$\tan^{-1}(\tan \tfrac{3}{4}\pi) = \tan^{-1}(-1) \qquad \text{y} \qquad \tan^{-1}(\tan \tfrac{5}{4}\pi) = \tan^{-1}[\quad]$$
$$= -\tfrac{1}{4}\pi \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}\pi \quad ◂$$

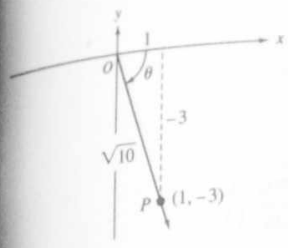


FIGURA 9.16

► EJEMPLO 5 *Determinación de un valor de función exacto que implica arco tangente*

Encuentre el valor exacto de sec[arc tan(−3)].

Solución Se resolverá este problema al considerar arc tan(−3) como un ángulo. Sea

$$\theta = \text{arc tan}(-3)$$

Debido a que el rango de la función arco tangente es $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, y como tan θ es negativo, $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$. De modo que

$$\tan\theta = -3 \qquad \text{y} \qquad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0$$

La Figura 9.16 muestra un ángulo θ que satisface estos requerimientos. Observe que el punto P elegido en el lado terminal de θ es $(1, -3)$. Del teorema de Pitágoras, r es $\sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Por tanto, sec $\theta = \sqrt{10}$. En consecuencia,

$$\sec[\text{arc tan}(-3)] = \sqrt{10}$$ ◄

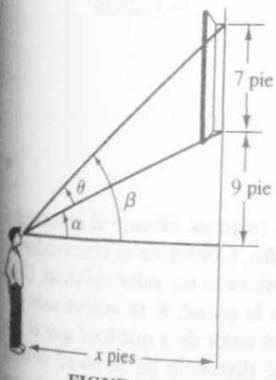


FIGURA 9.17

► EJEMPLO 6 *Solución del enunciado de un problema cuyo modelo matemático implica la función tangente inversa*

Un cuadro de 7 pie de altura se coloca en una pared con su base a 9 pie sobre el nivel de los ojos de un observador. Suponga que el observador está a x pies de la pared y que θ es la medida en radianes del ángulo subtendido por el cuadro en los ojos del observador. (**a**) Defina θ como una función de x. Determine θ cuando (**b**) $x = 10$; (**c**) $x = 12$ y (**d**) $x = 15$.

Solución

(**a**) En la Figura 9.17, α es la medida en radianes del ángulo subtendido por la porción de la pared que está entre el nivel de los ojos del observador y la base del cuadro. Además,

$$\alpha + \theta = \beta$$

donde

$$\theta = \beta - \alpha$$

De la identidad de la tangente de la diferencia,

$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

Observe de la Figura 9.17 que

$$\tan\alpha = \frac{9}{x} \qquad \text{y} \qquad \tan\beta = \frac{16}{x}$$

Al sustituir estos valores en la expresión para $\tan\theta$, se tiene

$$\tan\theta = \frac{\frac{16}{x} - \frac{9}{x}}{1 + \frac{16}{x}\cdot\frac{9}{x}}$$

$$= \frac{16x - 9x}{x^2 + 144}$$

$$= \frac{7x}{x^2 + 144}$$

Por tanto,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7x}{x^2 + 144}$$

(b) Cuando $x = 10$,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{70}{100 + 144}$$

$$= 0.2794$$

(c) Cuando $x = 12$,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{84}{144 + 144}$$

$$= 0.2838$$

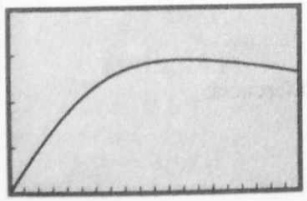
(d) Cuando $x = 15$,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{105}{225 + 144}$$

$$= 0.2772$$

◄

En el ejemplo 6 cuando x es grande (esto es, cuando el observador está muy lejos de la pared), θ es pequeño. Conforme el observador se acerca a la pared, θ aumenta hasta que alcanza un valor máximo. Después, el observador se acerca aún más a la pared, θ se vuelve más pequeño. En Cálculo puede determinarse el valor de x que hará que θ sea máximo. Así puede determinarse a qué distancia de la pared deberá pararse el observador, para que el ángulo subtendido por el cuadro en los ojos de éste sea el máximo. Cuando θ es un máximo, el observador tiene la "mejor vista" del cuadro.



[0, 20] por [0, 0.4]
$\theta = \tan^{-1}\frac{7x}{x^2 + 144}$
FIGURA 9.18

► EJEMPLO 7 *Solución del enunciado de un problema cuyo modelo matemático implica la función tangente inversa*

Utilice una graficadora para estimar, con precisión de pies, a qué distancia de la pared debe situarse el observador del ejemplo 6, para tener la "mejor vista" del cuadro.

Solución La Figura 9.18 muestra la gráfica de

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7x}{x^2 + 144}$$

en el rectángulo de inspección de [0, 20] por [0, 0.4]. Al emplear el rastreo y aumento de la graficadora se estima que el valor máximo de θ ocurre cuando $x = 12$.

Conclusión: Con precisión de pies, el observador debe situarse a 12 pie de la pared para tener la mejor vista del cuadro. ◀

Resulta que la estimación del ejemplo 7 es el valor exacto de x obtenida mediante técnicas de Cálculo. Esto es, la mejor vista del cuadro ocurre cuando el observador está exactamente a 12 pie de la pared.

Antes de definir la función cotangente inversa, se volverá al ejemplo 4 en donde se comprobó la identidad

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{para } |x| \leq 1$$

Esta identidad puede utilizarse para definir la función coseno inverso, y puede demostrarse que el contradominio de $\cos^{-1}$ es $[0, \pi]$. Este procedimiento se aplica al tratar la *función cotangente inversa*.

DEFINICIÓN **La función cotangente inversa**

La **función cotangente inversa,** denotada por $\cot^{-1}$, se define como

$$\cot^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \tan^{-1} x \quad \text{donde } x \text{ es cualquier número real}$$

En la definición, el dominio de $\cot^{-1}$ es el conjunto de todos los números reales. Para obtener el contradominio, se escribe la ecuación de la definición como

$$\tan^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \cot^{-1} x \tag{5}$$

Como

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \tan^{-1} x < \tfrac{1}{2}\pi$$

y al sustituir de (5) en la desigualdad se tiene

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \tfrac{1}{2}\pi - \cot^{-1} x < \tfrac{1}{2}\pi$$

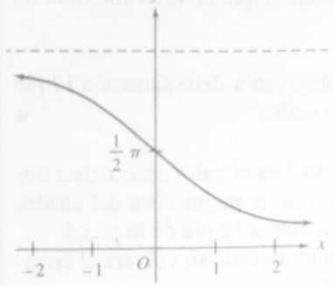
Si se resta $\frac{1}{2}\pi$ de cada miembro, se obtiene

$$-\pi < -\cot^{-1} x < 0$$

Ahora, al multiplicar cada miembro por -1 y al cambiar el sentido de los signos de desigualdad, se tiene

$$0 < \cot^{-1} x < \pi$$

Por tanto, el contradominio de la función cotangente inversa es el intervalo abierto $(0, \pi)$. Su gráfica se presenta en la Figura 9.19.



$y = \cot^{-1} x$

FIGURA 9.19

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

(a) $\tan^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$

(b) $\tan^{-1}(-1) = -\frac{1}{4}\pi$

(c) $\cot^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi - \tan^{-1} 1$
$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi$
$= \frac{1}{4}\pi$

(d) $\cot^{-1}(-1) = \frac{1}{2}\pi - \tan^{-1}(-1)$
$= \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)$
$= \frac{3}{4}\pi$ ◂

▸ EJEMPLO 8 *Determinación de un valor de función exacto que implica cotangente inversa*

Determine el valor exacto de $\cos[\cot^{-1}\frac{3}{4} + \cot^{-1}(-\frac{5}{12})]$.

Solución Sea $\alpha = \cot^{-1}\frac{3}{4}$ y $\beta = \cot^{-1}(-\frac{5}{12})$. Entonces

$$\cot \alpha = \tfrac{3}{4} \quad \text{y} \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi$$
$$\cot \beta = -\tfrac{5}{12} \quad \text{y} \quad \tfrac{1}{2}\pi < \beta < \pi$$

Se desea determinar $\cos(\alpha + \beta)$. De la identidad del coseno de la suma,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \tag{6}$$

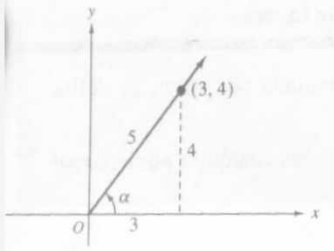


FIGURA 9.20

A fin de determinar sen α y cos α, *véase* la Figura 9.20, la cual muestra un ángulo α del primer cuadrante para el cual $\cot \alpha = \frac{3}{4}$. De la figura,

$$\operatorname{sen} \alpha = \tfrac{4}{5} \qquad \cos \alpha = \tfrac{3}{5} \tag{7}$$

La Figura 9.21 muestra un ángulo β del segundo cuadrante para el cual $\cot \beta = -\frac{5}{12}$. De la figura,

$$\operatorname{sen} \beta = \tfrac{12}{13} \qquad \cos \beta = -\tfrac{5}{13} \tag{8}$$

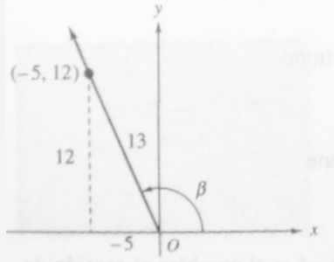


FIGURA 9.21

Si se sustituye de (7) y (8) en (6), se tiene

$$\cos(\alpha + \beta) = \tfrac{3}{5}(-\tfrac{5}{13}) - \tfrac{4}{5}(\tfrac{12}{13})$$
$$= -\tfrac{63}{65}$$ ◂

No hay un acuerdo universal que prevalezca al considerar los contradominio de las funciones secante y cosecante inversas. Sin embargo, en Cálculo, ciertas operaciones se simplifican si la *función secante inversa* se define de modo que si $x \leq -1$, entonces $\pi \leq \sec^{-1} x < \frac{3}{2}\pi$ (*véase* el ejercicio 67). Así, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN **La función secante inversa**

La **función secante inversa,** denotada por $\sec^{-1}$, se define como:

$$y = \sec^{-1} x$$

$$\text{si y sólo si} \quad x = \sec y \quad y \begin{cases} 0 \le y < \frac{1}{2}\pi & \text{si } x \ge 1 \\ \pi \le y < \frac{3}{2}\pi & \text{si } x \le -1 \end{cases}$$

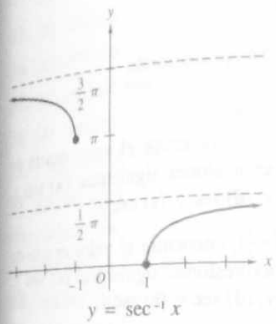


FIGURA 9.22

El dominio de $\sec^{-1}$ es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, y su contradominio es el conjunto $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$. La Figura 9.22 muestra la gráfica de $\sec^{-1}$.

De la definición de la función secante inversa

$$\sec(\sec^{-1} x) = x \qquad \text{para } x \text{ en } (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

$$\sec^{-1}(\sec y) = y \qquad \text{para } y \text{ en } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$$

Ahora se definirá la *función cosecante inversa* en términos de la función secante inversa.

DEFINICIÓN **La función cosecante inversa**

La **función cosecante inversa,** denotada por $\csc^{-1}$, se define como

$$\csc^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x \qquad \text{para } |x| \ge 1$$

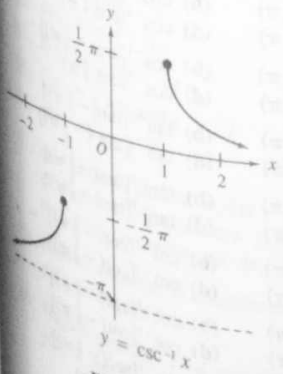


FIGURA 9.23

De la definición, el dominio de $\csc^{-1}$ es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. El contradominio de $\csc^{-1}$ puede determinarse de manera semejante a la empleada para encontrar el contradominio de $\cot^{-1}$. El contradominio de $\csc^{-1}$ es $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$, y se le pedirá mostrar esto en el ejercicio 68. La gráfica de $\csc^{-1}$ se presenta en la Figura 9.23.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7**

(a) $\sec^{-1} 2 = \frac{1}{3}\pi$

(b) $\sec^{-1}(-2) = \frac{4}{3}\pi$

(c) $\csc^{-1} 2 = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1} 2$
$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi$
$= \frac{1}{6}\pi$

(d) $\csc^{-1}(-2) = \frac{1}{2}\pi - \sec^{-1}(-2)$
$= \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\pi$
$= -\frac{5}{6}\pi$ ◀

EJERCICIOS 9.5

En los ejercicios 1 a 6, determine el valor de función exacto. No emplee calculadora.

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$ (c) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ (d) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

2. (a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. (a) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (c) $\sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

4. (a) $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (c) $\csc^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\csc^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

5. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 1$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ (c) $\csc^{-1} 1$ (d) $\csc^{-1}(-1)$ (e) $\operatorname{sen}^{-1} 0$

6. (a) $\cos^{-1} 1$ (b) $\cos^{-1}(-1)$ (c) $\sec^{-1} 1$ (d) $\sec^{-1}(-1)$ (e) $\cos^{-1} 0$

En los ejercicios 7 a 12, utilice una calculadora para aproximar el valor de la función.

7. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 0.4882$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-0.4882)$ (c) $\cos^{-1} 0.4882$ (d) $\cos^{-1}(-0.4882)$

8. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 0.2764$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-0.2764)$ (c) $\cos^{-1} 0.2764$ (d) $\cos^{-1}(-0.2764)$

9. (a) $\tan^{-1} 0.4346$ (b) $\tan^{-1}(-0.4346)$ (c) $\cot^{-1} 0.4346$ (d) $\cot^{-1}(-0.4346)$

10. (a) $\tan^{-1} 2.733$ (b) $\tan^{-1}(-2.733)$ (c) $\cot^{-1} 2.733$ (d) $\cot^{-1}(-2.733)$

11. (a) $\sec^{-1} 2.083$ (b) $\sec^{1}(-2.083)$ (c) $\csc^{-1} 2.083$ (d) $\csc^{-1}(-2.083)$

12. (a) $\sec^{-1} 1.256$ (b) $\sec^{-1}(-1.256)$ (c) $\csc^{-1} 1.256$ (d) $\csc^{-1}(-1.256)$

13. Dado $x = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}$, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes: (a) $\cos x$, (b) $\tan x$, (c) $\cot x$, (d) $\sec x$, (e) $\csc x$.

14. Dado $x = \operatorname{arc}\cos\frac{2}{3}$, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes: (a) $\operatorname{sen} x$, (b) $\tan x$, (c) $\cot x$, (d) $\sec x$, (e) $\csc x$.

15. Haga el ejercicio 13 considerando $x = \operatorname{arc\,sen}(-\frac{1}{3})$.

16. Haga el ejercicio 14 considerando $x = \operatorname{arc}\cos(-\frac{2}{3})$.

17. Dado $y = \tan^{-1}(-2)$, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes: (a) $\operatorname{sen} y$, (b) $\cos y$, (c) $\cot y$, (d) $\sec y$, (e) $\csc y$.

18. Dado $y = \cot^{-1}(-\frac{1}{2})$, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes: (a) $\operatorname{sen} y$, (b) $\cos y$, (c) $\tan y$, (d) $\sec y$, (e) $\csc y$.

19. Dado $t = \csc^{-1}(-\frac{3}{2})$, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes: (a) $\operatorname{sen} t$, (b) $\cos t$, (c) $\tan t$, (d) $\cot t$, (e) $\sec t$.

20. Dado $t = \sec^{-1}(-3)$, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes: (a) $\operatorname{sen} t$, (b) $\cos t$, (c) $\tan t$, (d) $\cot t$, (e) $\csc t$.

En los ejercicios 21 a 46, encuentre el valor de función exacto.

21. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\frac{1}{6}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}[\operatorname{sen}(-\frac{1}{6}\pi)]$ (c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi)$ (d) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\frac{11}{6}\pi)$

22. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}[\operatorname{sen}(-\frac{1}{3}\pi)]$ (c) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi)$ (d) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi)$

23. (a) $\cos^{-1}(\cos\frac{1}{3}\pi)$ (b) $\cos^{-1}[\cos(-\frac{1}{3}\pi)]$ (c) $\cos^{-1}(\cos\frac{2}{3}\pi)$ (d) $\cos^{-1}(\cos\frac{4}{3}\pi)$

24. (a) $\cos^{-1}(\cos\frac{1}{4}\pi)$ (b) $\cos^{-1}[\cos(-\frac{1}{4}\pi)]$ (c) $\cos^{-1}(\cos\frac{3}{4}\pi)$ (d) $\cos^{-1}(\cos\frac{5}{4}\pi)$

25. (a) $\tan^{-1}(\tan\frac{1}{6}\pi)$ (b) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{1}{3}\pi)]$ (c) $\tan^{-1}(\tan\frac{7}{6}\pi)$ (d) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{4}{3}\pi)]$

26. (a) $\tan^{-1}(\tan\frac{1}{3}\pi)$ (b) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{1}{6}\pi)]$ (c) $\tan^{-1}(\tan\frac{4}{3}\pi)$ (d) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{7}{6}\pi)]$

27. (a) $\cot^{-1}(\cot\frac{1}{6}\pi)$ (b) $\cot^{-1}[\cot(-\frac{1}{3}\pi)]$ (c) $\cot^{-1}(\cot\frac{7}{6}\pi)$ (d) $\cot^{-1}[\cot(-\frac{4}{3}\pi)]$

28. (a) $\cot^{-1}(\cot\frac{1}{3}\pi)$ (b) $\cot^{-1}[\cot(-\frac{1}{6}\pi)]$ (c) $\cot^{-1}(\cot\frac{4}{3}\pi)$ (d) $\cot^{-1}[\cot(-\frac{7}{6}\pi)]$

29. (a) $\sec^{-1}(\sec\frac{1}{3}\pi)$ (b) $\sec^{-1}[\sec(-\frac{1}{3}\pi)]$ (c) $\sec^{-1}(\sec\frac{2}{3}\pi)$ (d) $\sec^{-1}(\sec\frac{4}{3}\pi)$

30. (a) $\sec^{-1}(\sec \frac{1}{4}\pi)$ (b) $\sec^{-1}[\sec(-\frac{1}{4}\pi)]$
(c) $\sec^{-1}(\sec \frac{3}{4}\pi)$ (d) $\sec^{-1}(\sec \frac{5}{4}\pi)$

31. (a) $\csc^{-1}(\csc \frac{1}{6}\pi)$ (b) $\csc^{-1}[\csc(-\frac{1}{6}\pi)]$
(c) $\csc^{-1}(\csc \frac{5}{6}\pi)$ (d) $\csc^{-1}(\csc \frac{11}{6}\pi)$

32. (a) $\csc^{-1}(\csc \frac{1}{3}\pi)$ (b) $\csc^{-1}[\csc(-\frac{1}{3}\pi)]$
(c) $\csc^{-1}(\csc \frac{2}{3}\pi)$ (d) $\csc^{-1}(\csc \frac{5}{3}\pi)$

33. (a) $\tan[\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}]$ (b) $\operatorname{sen}[\tan^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{3}]$

34. (a) $\cos[\tan^{-1}(-3)]$ (b) $\tan[\sec^{-1}(-3)]$

35. (a) $\cos[\text{arc sen}(-\frac{1}{2})]$ (b) $\operatorname{sen}[\text{arc cos}(-\frac{1}{2})]$

36. (a) $\tan[\text{arc cot}(-1)]$ (b) $\cot[\text{arc tan}(-1)]$

37. $\cos[2 \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{5}{13})]$

38. $\tan[2 \sec^{-1}(-\frac{5}{4})]$

39. $\operatorname{sen}[\text{arc sen}\frac{2}{3} + \text{arc cos}\frac{1}{3}]$

40. $\cos[\text{arc sin}(-\frac{1}{2}) + \text{arc sin}\frac{1}{4}]$

41. $\cos[\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3} + 2\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$

42. $\tan[\tan^{-1}(-\frac{2}{5}) - \cos^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{2})]$

43. $\tan(\text{arc tan}\frac{3}{4} - \text{arc sen}\frac{1}{2})$

44. $\tan[\text{arc sec}\frac{5}{3} + \text{arc csc}(-\frac{13}{12})]$

45. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{2})$

46. $\operatorname{sen}[\cos^{-1}(-\frac{2}{3}) + 2\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$

47. Compruebe: $\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}} + \cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{4}\pi$

48. Compruebe: $2\tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}(-\frac{1}{7}) = \frac{1}{4}\pi$

En los ejercicios 49 a 56, dibuje la gráfica de la función y verifíquela en la calculadora.

49. $f(x) = 2\operatorname{sen}^{-1} x$

50. $g(x) = \text{arc sen}\,2x$

51. $g(x) = \text{arc tan}\frac{1}{2}x$

52. $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$

53. $h(x) = \cos^{-1} 3x$

54. $h(x) = 2\cos^{-1}\frac{1}{2}x$

55. $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}(x + 3)$

56. $g(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}(x - 2)$

57. (a) Dibuje la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ y compruébela en la graficadora. ¿Cuál es (b) el dominio de f, (c) el contradominio de f?

58. Haga el ejercicio 57 considerando $f(x) = \cos(\cos^{-1} x)$.

59. Haga el ejercicio 57 al considerar $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$.

60. Haga el ejercicio 57 al considerar $f(x) = \cos^{-1}(\cos x)$.

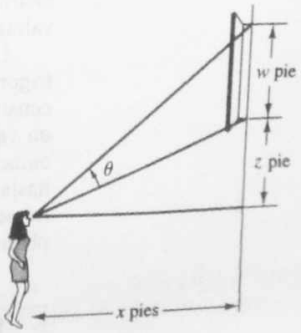
61. Resuelva este problema obteniendo un modelo matemático que implique la función tangente inversa, no olvíde escribir una conclusión: Un letrero de 3 pie de altura se colocó en la pared con su base a 2 pie sobre el nivel de los ojos de una mujer que intenta leerlo. (a) Si la mujer está a x pies de la pared y θ es la medida en radianes del ángulo que subtiende el letrero en los ojos de la mujer, defina θ como una función de x. Determine θ cuando (b) $x = 2$, (c) $x = 3$ y (d) $x = 4$. (e) Utilice una graficadora para estimar, con precisión de centésimos de pie, a qué distancia debe ubicarse la mujer de manera que tenga la "mejor vista" del letrero, es decir, de modo que el ángulo subtendido por el letrero en los ojos de la mujer sea un valor máximo.

62. (a) En el ejemplo 6, muestre que otra ecuación que define a θ en términos de x es

$$\theta = \cot^{-1}\frac{x}{16} - \cot^{-1}\frac{x}{9}$$

Utilice la ecuación del inciso (a) para encontrar θ cuando (b) $x = 10$, (c) $x = 12$, y (d) $x = 15$.

63. Una pintura de w pies de longitud se colocó en una pared con su base a z pies arriba del nivel de los ojos de un observador. Si el observador está a x pies de la pared y θ es la medida en radianes del ángulo que subtiende el cuadro en los ojos del observador, muestre que



$$\theta = \cot^{-1}\frac{x}{w + z} - \cot^{-1}\frac{x}{z}$$

64. En el ejercicio 63 compruebe que otra función que define a θ en términos de w, z y x es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{wx}{x^2 + wz + z^2}\right)$$

En los ejercicios 65 a 67, una expresión algebraica en la variable x se pone en la forma de una expresión trigonométrica en la variable θ mediante una sustitución que implica una función trigonométrica inversa. Este tipo de sustituciones se emplea en Cálculo como una técnica de integración, denominada sustitución trigonométrica, con el fin de determinar ciertas integrales indefinidas.

65. Muestre que la sustitución $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{3}x)$ en la expresión $\sqrt{9 - x^2}$ proporciona $3 \cos \theta$ y explique cómo se aplica el dominio de θ.

66. Muestre que la sustitución $\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{2}x)$ en la expresión $\sqrt{x^2 + 4}$ proporciona $2 \sec \theta$ y explique cómo se aplica el dominio de θ.

67. Muestre que la sustitución $\theta = \sec^{-1}(\frac{1}{5}x)$ en la expresión $\sqrt{x^2 - 25}$ proporciona $5 \tan \theta$ y explique cómo se aplica el dominio de θ.

68. Compruebe que el contradominio de $\csc^{-1}$ es $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$

9.6 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVOS

1. **Resolver ecuaciones trigonométricas que contienen funciones trigonométricas de números reales.**
2. **Resolver ecuaciones trigonométricas que contienen funciones trigonométricas de ángulos.**
3. **Resolver enunciados de problemas que tienen una ecuación trigonométrica como modelo matemático.**

En las primeras cuatro secciones de este capítulo se consideraron las identidades trigonométricas, las cuales son ecuaciones que se satisfacen para todos los números reales, o ángulos, en donde cada miembro de la ecuación está definido. Ahora se discutirán ecuaciones trigonométricas condicionales, las que se satisfacen únicamente por algunos valores particulares de la variable.

Los métodos empleados para encontrar soluciones de ecuaciones trigonométricas son semejantes a los utilizados en la resolución de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, aquí primero se solucionará para un valor de función trigonométrica en particular. Como con las ecuaciones algebraicas, se obtiene una sucesión de ecuaciones equivalentes hasta que se tiene una ecuación para la cual el valor de función trigonométrica es evidente. Las identidades trigonométricas son útiles para obtener las ecuaciones equivalentes.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Para resolver la ecuación

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

para $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$, primero se resuelve para sen x:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x &= 1 \\ \operatorname{sen} x &= \tfrac{1}{2} \\ x &= \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{2} \\ x &= \tfrac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

◄

► EJEMPLO 1 *Solución de una ecuación trigonométrica*

Encuentre la solución de la ecuación si $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$.

(a) $\tan^2 x - 3 = 0$ **(b)** $2 \cos^2 x - 1 = 0$

Solución

(a) $\tan^2 x - 3 = 0$

$\tan^2 x = 3$

Puesto que $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$, $\tan x > 0$; así

$$\begin{aligned} \tan x &= \sqrt{3} \\ x &= \tan^{-1} \sqrt{3} \\ x &= \tfrac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

(b) $2 \cos^2 x - 1 = 0$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

Puesto que $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$, $\cos x > 0$; así

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x &= \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x &= \tfrac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

◄

► EJEMPLO 2 *Solución de una ecuación trigonométrica*

Resuelva la ecuación

$$\cot^2 x - 1 = 0$$

si $0 \le x \le \pi$.

Solución Primero se resuelve para cot x.

$$\begin{aligned} \cot^2 x &= 1 \\ \cot x &= \pm 1 \end{aligned}$$

El valor de x en $[0, \pi]$ para el cual $\cot x = 1$ es $\frac{1}{4}\pi$. El valor de x en $[0, \pi]$ para el cual $\cot x = -1$ es $\frac{3}{4}\pi$. Por tanto, el conjunto solución de la ecuación dada es $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\}$. ◄

Así como en las ecuaciones algebraicas, verifique las respuestas en la calculadora gráfica o graficadora al escribir, primero, la ecuación

en la forma $f(x) = 0$ y, después al trazar la gráfica de f. Las intercepciones x de la gráfica son las soluciones de la ecuación.

▸ EJEMPLO 3 *Solución de una ecuación trigonométrica*

Resuelva la ecuación

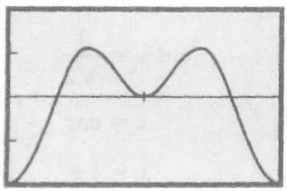
$$2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$$

si $0 \le t < 2\pi$. Verifique la solución en la graficadora.

Solución Primero se sustituye $\operatorname{sen}^2 t$ por $1 - \cos^2 t$, después se resuelve la ecuación cuadrática resultante para $\cos t$ al factorizar el miembro izquierdo.

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos^2 t) - \cos t - 1 &= 0 \\ 2 - 2\cos^2 t - \cos t - 1 &= 0 \\ 2\cos^2 t + \cos t - 1 &= 0 \\ (2\cos t - 1)(\cos t + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos t - 1 = 0 \qquad & \cos t + 1 = 0 \\ \cos t = \tfrac{1}{2} \qquad & \cos t = -1 \end{aligned}$$



[0, 2π] por [−2, 2]
$f(t) = 2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1$
FIGURA 9.24

Los valores de t en $[0, 2\pi)$ para los cuales $\cos t = \frac{1}{2}$ son $\frac{1}{3}\pi$ y $\frac{5}{3}\pi$. El valor de t en $[0, 2\pi)$ para el cual $\cos t = -1$ es π. Por tanto, el conjunto solución de la ecuación proporcionada es $\{\frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi\}$.

La Figura 9.24 muestra la gráfica de

$$f(t) = 2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1$$

en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$ de la graficadora. Al emplear el rastreo y aumento en la graficadora se verifican las soluciones. ◂

▸ EJEMPLO 4 *Solución de una ecuación trigonométrica*

Resuelva la ecuación

$$8\operatorname{sen}^2 \theta + 6\operatorname{sen}\theta - 9 = 0$$

si $0° \le \theta < 360°$. Verifique en la graficadora.

Solución Se factoriza el miembro izquierdo y se iguala cada factor a cero.

$$(2\operatorname{sen}\theta + 3)(4\operatorname{sen}\theta - 3) = 0$$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\theta + 3 = 0 \qquad & 4\operatorname{sen}\theta - 3 = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = -\tfrac{3}{2} \qquad & \operatorname{sen}\theta = \tfrac{3}{4} \\ & \operatorname{sen}\theta = 0.75 \end{aligned}$$

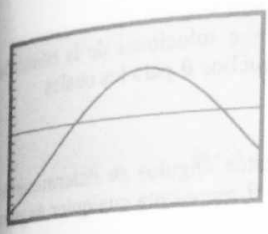
El conjunto solución de $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{2}$ es $\varnothing$ debido a que $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$.

Para la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 0.75$, se tiene un ángulo en el primer cuadrante y otro en el segundo. El ángulo del primer cuadrante es $\operatorname{sen}^{-1} 0.75 \approx 48.6°$, obtenido mediante la calculadora. El ángulo del segundo cuadrante es $180° - 48.6° = 131.4°$. De modo que el conjunto solución es $\{48.6°, 131.4°\}$.

En la graficadora, en el modo de grados, se traza la gráfica de

$$f(\theta) = 8\operatorname{sen}^2\theta + 6\operatorname{sen}\theta - 9$$

en el rectángulo de inspección de $[0°, 150°]$ por $[-10, 10]$ obteniéndose la gráfica mostrada en la Figura 9.25. ◀



$[0°, 150°]$ por $[-10, 10]$
$f(\theta) = 8\operatorname{sen}^2\theta + 6\operatorname{sen}\theta - 9$
FIGURA 9.25

▶ EJEMPLO 5 *Solución de una ecuación trigonométrica*

Resuelva la ecuación

$$\sec^2 x - \tan x = 1$$

si $0 \leq x < 2\pi$.

Solución Se utiliza la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ y se resuelve la ecuación que resulta para $\tan x$ mediante factorización.

$$(1 + \tan^2 x) - \tan x = 1$$
$$\tan^2 x - \tan x = 0$$
$$\tan x(\tan x - 1) = 0$$

$$\tan x = 0 \qquad \tan x - 1 = 0$$
$$x = 0 \quad x = \pi \qquad \tan x = 1$$
$$x = \tfrac{1}{4}\pi \quad x = \tfrac{5}{4}\pi$$

El conjunto solución es $\{0, \frac{1}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi\}$. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Suponga que se desea determinar todas las soluciones reales de la ecuación del ejemplo 3. Esto es, se tiene

$$2\operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0 \qquad t \in R$$

Se procede como en el ejemplo 3, y para $t \in [0, 2\pi)$ las soluciones son $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$ y π. Puesto que el periodo del coseno es 2π, todas las soluciones reales se obtienen al sumar a cada uno de estos números $k \cdot 2\pi$, donde k es cualquier entero. Así, el conjunto solución para $t \in R$ es

$$\{t \mid t = \tfrac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi\} \cup \{t \mid t = \tfrac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi\} \cup \{t \mid t = \pi + k \cdot 2\pi\}$$

donde $k \in Z$. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Para obtener todos los ángulos θ, que son soluciones de la ecuación del ejemplo 4, primero se determinan aquellos θ para los cuales

$$8 \operatorname{sen}^2 \theta + 6 \operatorname{sen} \theta - 9 = 0$$

y $0° \leq \theta < 360°$. En el ejemplo 4 estos ángulos se determinaron, siendo 48.6° y 131.4°. De modo que si θ representa cualquier ángulo, el conjunto solución es

$$\{\theta \mid \theta \approx 48.6° + k \cdot 360°\} \cup \{\theta \mid \theta \approx 131.4° + k \cdot 360°\} \quad k \in Z$$

◂

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

La ecuación del ejemplo 5 es

$$\sec^2 x - \tan x = 1$$

y si $x \in [0, 2\pi)$, el conjunto solución es $\{0, \frac{1}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi\}$. Si no existe restricción sobre x, entonces como el periodo de la tangente es π, todas las soluciones de esta ecuación están en el conjunto

$$\{x \mid x = k\pi\} \cup \{x \mid x = \tfrac{1}{4}\pi + k\pi\} \quad k \in Z$$

◂

▸ EJEMPLO 6 *Determinación de todas las soluciones de una ecuación trigonométrica*

Determine todas las soluciones de la ecuación

$$4 \operatorname{sen} 2\theta - 3 \cos \theta = 0$$

si θ es cualquier ángulo. Exprese las soluciones en grados.

Solución Se inicia al aplicar la identidad del seno del valor doble.

$$4(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) - 3 \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta(8 \operatorname{sen} \theta - 3) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \qquad 8 \operatorname{sen} \theta - 3 = 0$$

$$\operatorname{sen} \theta = \tfrac{3}{8}$$

$$\operatorname{sen} \theta = 0.375$$

El conjunto solución de $\cos \theta = 0$ es $\{\theta \mid \theta = 90° + k \cdot 180°\}$, $k \in Z$. A fin de obtener un ángulo del primer cuadrante para el cual $\operatorname{sen} \theta = 0.375$, se puede emplear una calculadora y obtener $\theta \approx 22.0°$. Un ángulo del segundo cuadrante tal que $\operatorname{sen} \theta = 0.375$

es $180° - 22.0°$, o $158.0°$. Por tanto, el conjunto solución de sen $\theta = 0.375$ es

$$\{\theta \mid \theta \approx 22.0° + k \cdot 360°\} \cup \{\theta \mid \theta \approx 158.0° + k \cdot 360°\} \quad k \in Z$$

Así, el conjunto solución de la ecuación dada es

$$\{\theta \mid \theta = 90° + k \cdot 180°\} \cup \{\theta \mid \theta \approx 22.0° + k \cdot 360°\} \cup \{\theta \mid \theta \approx 158.0° + k \cdot 360°\}$$

donde $k \in Z$. ◄

► EJEMPLO 7 *Solución del enunciado de un problema que tiene una ecuación trigonométrica como modelo matemático*

Un generador produce una corriente alterna de 30 ciclos descrita por la ecuación

$$I(t) = 40 \operatorname{sen} 60\pi(t - \tfrac{7}{72})$$

donde $I(t)$ amperes es la corriente a los t segundos. Encuentre el menor valor positivo de t para el cual la corriente es de 20 ampere, y verifique la respuesta en la graficadora.

Solución Si $I(t)$ se sustituye por 20 en la ecuación, se obtiene

$$40 \operatorname{sen} 60\pi(t - \tfrac{7}{72}) = 20$$

$$\operatorname{sen} 60\pi(t - \tfrac{7}{72}) = \tfrac{1}{2}$$

$$60\pi(t - \tfrac{7}{72}) = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad \text{o} \quad 60\pi(t - \tfrac{7}{72}) = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad k \in Z$$

$$t - \tfrac{7}{72} = \tfrac{1}{360} + k \cdot \tfrac{1}{30} \qquad t - \tfrac{7}{72} = \tfrac{1}{72} + k \cdot \tfrac{1}{30}$$

$$t = \tfrac{1}{10} + k \cdot \tfrac{1}{30} \qquad t = \tfrac{1}{9} + k \cdot \tfrac{1}{30}$$

$$t = \tfrac{3}{30} + k \cdot \tfrac{1}{30} \qquad t = \tfrac{10}{90} + k \cdot \tfrac{3}{90}$$

El menor valor positivo de t obtenido a partir de $t = \frac{3}{30} + k \cdot \frac{1}{30}$ ocurre cuando $k = -2$, este valor de t es $\frac{1}{30}$. El menor valor positivo de t obtenido a partir de $t = \frac{10}{90} + k \cdot \frac{3}{90}$ ocurre cuando $k = -3$, este valor de t es $\frac{1}{90}$.

Conclusión: El menor valor positivo de t para el cual la corriente es de 20 ampere es $\frac{1}{90}$.

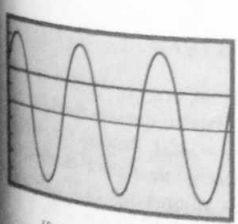


FIGURA 9.26

La Figura 9.26 muestra la gráfica de la ecuación dada así como la recta $f(t) = 20$ en el rectángulo de inspección de $[0, 0.1]$ por $[-50, 50]$ de la graficadora. Al utilizar el rastreo y el aumento de la graficadora, la coordenada t del punto de intersección de la curva y la recta es 0.011 con dos dígitos significativos. Este resultado es acorde con la respuesta $\frac{1}{90}$. ◄

► EJEMPLO 8 *Solución de una ecuación trigonométrica al aplicar la fórmula cuadrática*

Encuentre las soluciones de la ecuación

$$3 \tan t - \cot t - 5 = 0$$

si $0 \leq t < 2\pi$.

Solución Si se sustituye $\cot t = \dfrac{1}{\tan t}$, se obtiene una ecuación equivalente que contiene únicamente una función.

$$3 \tan t - \cot t - 5 = 0$$

$$3 \tan t - \frac{1}{\tan t} - 5 = 0$$

$$3 \tan^2 t - 1 - 5 \tan t = 0$$

$$3 \tan^2 t - 5 \tan t - 1 = 0$$

Ésta es una ecuación cuadrática, la cual se resuelve aplicando la fórmula cuadrática.

$$\tan t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$$\approx \frac{5 \pm 6.083}{6}$$

$$\tan t \approx \frac{5 + 6.083}{6} \qquad \tan t \approx \frac{5 - 6.083}{6}$$

$$\approx 1.847 \qquad \approx -0.180$$

Para $\tan t \approx 1.847$ se obtiene, en una calculadora, $\tan^{-1} 1.847 \approx 1.07$. De modo que una solución es $t \approx 1.07$. Puesto que t está en $[0, 2\pi)$; otra solución es $t \approx 3.14 + 1.07$, es decir $t \approx 4.21$. Para $\tan t \approx -0.180$, primero se determina en una calculadora una $\bar{t}$ para la cual $\bar{t} = \tan^{-1} 0.180$; ésta es, $\bar{t} \approx 0.18$. Existen dos valores de t en $[0, 2\pi)$ para los que $\tan t \approx 0.180$; éstos son $t \approx 3.14 - 0.18$, o $t \approx 2.96$, y $t \approx 6.28 - 0.18$, o $t \approx 6.10$. En consecuencia, el conjunto solución de la ecuación dada es $\{1.07, 2.96, 4.21, 6.10\}$. ◄

La ecuación del ejemplo siguiente implica una función trigonométrica de valor múltiple.

▸ EJEMPLO 9 *Solución de una ecuación trigonométrica que implica una función de valor múltiple*

Determine todos los valores de x en $[0, 2\pi)$ para los cuales

$$\tan 3x = 1$$

Solución Si $0 \leq x < 2\pi$, entonces $0 \leq 3x < 6\pi$. Por tanto, para determinar todos los valores de x en $[0, 2\pi)$, que son soluciones de la ecuación, primero deben determinarse todos los valores de $3x$ en $[0, 6\pi)$ para los que

$$\tan 3x = 1$$

Ellos son

$$3x = \tfrac{1}{4}\pi \quad 3x = \tfrac{5}{4}\pi \quad 3x = \tfrac{9}{4}\pi \quad 3x = \tfrac{13}{4}\pi \quad 3x = \tfrac{17}{4}\pi \quad 3x = \tfrac{21}{4}\pi$$

Al dividir ambos miembros de cada una de estas ecuaciones entre 3, se obtienen todas las soluciones de la ecuación dada en $[0, 2\pi)$, éstos son

$$x = \tfrac{1}{12}\pi \quad x = \tfrac{5}{12}\pi \quad x = \tfrac{3}{4}\pi \quad x = \tfrac{13}{12}\pi \quad x = \tfrac{17}{12}\pi \quad x = \tfrac{7}{4}\pi \quad \blacktriangleleft$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Para determinar todas las soluciones de la ecuación del ejemplo 9, primero se obtiene el valor de $3x$ en $[0, \pi)$ que satisfaga la ecuación. Esto es

$$3x = \tfrac{1}{4}\pi$$

Debido a que el periodo de la tangente es π, todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$3x = \tfrac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \qquad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{12}\pi + k \cdot \tfrac{1}{3}\pi \qquad k \in Z \quad \blacktriangleleft$$

▸ EJEMPLO 10 *Solución de una ecuación trigonométrica que implica una función de valor múltiple*

Encuentre las soluciones de la ecuación

$$2 \operatorname{sen} 2\theta \cos 3\theta + \cos 3\theta = 0$$

si $0° \leq \theta < 360°$.

Solución Al factorizar $\cos 3\theta$ en el miembro izquierdo de la ecuación, se obtiene

$$\cos 3\theta(2 \operatorname{sen} 2\theta + 1) = 0$$

$$\cos 3\theta = 0 \qquad 2 \operatorname{sen} 2\theta + 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = -\tfrac{1}{2}$$

Primero se encuentran las soluciones de $\cos 3\theta = 0$. Como $0° \le \theta < 360°$, entonces $0° \le 3\theta < 1\,080°$. Las soluciones son

$$3\theta = 90° \quad 3\theta = 270° \quad 3\theta = 450° \quad 3\theta = 630° \quad 3\theta = 810° \quad 3\theta = 990°$$

Por tanto,

$$\theta = 30° \quad \theta = 90° \quad \theta = 150° \quad \theta = 210° \quad \theta = 270° \quad \theta = 330°$$

Ahora se determinarán las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2\theta = -\frac{1}{2}$. Como $0° \le \theta < 360°$, entonces $0° \le 2\theta < 720°$. Las soluciones son

$$2\theta = 210° \quad 2\theta = 330° \quad 2\theta = 570° \quad 2\theta = 690°$$

De donde,

$$\theta = 105° \quad \theta = 165° \quad \theta = 285° \quad \theta = 345°$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación dada es

$$\{30°, 90°, 105°, 150°, 165°, 210°, 270°, 285°, 330°, 345°\} \blacktriangleleft$$

EJERCICIOS 9.6

En los ejercicios 1 a 10, encuentre la solución de la ecuación si $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$.

1. (a) $\operatorname{sen} x - 1 = 0$ (b) $2\cos x - 1 = 0$
2. (a) $\cos x - 1 = 0$ (b) $\tan x - 1 = 0$
3. (a) $2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$ (b) $3\cot^2 x - 1 = 0$
4. (a) $\cot^2 x - 3 = 0$ (b) $4\cos^2 x - 3 = 0$
5. (a) $\sec^2 x - 1 = 0$ (b) $\csc^2 x - 2 = 0$
6. (a) $\csc^2 x - 1 = 0$ (b) $\sec^2 x - 2 = 0$
7. (a) $\operatorname{sen} x \cos x = 0$ (b) $\cos x \cot x = 0$
8. (a) $\tan x \sec x = 0$ (b) $\operatorname{sen} x \tan x = 0$
9. (a) $4\operatorname{sen}^3 x - 3\operatorname{sen} x = 0$
   (b) $\tan^3 x - \tan x = 0$
10. (a) $4\cos^3 x - \cos x = 0$
    (b) $3\csc^3 x - 4\csc x = 0$

En los ejercicios 11 a 18, determine las soluciones de la ecuación si $0 \le t < 2\pi$.

11. (a) $4\operatorname{sen}^2 t - 1 = 0$ (b) $\tan^2 t - 1 = 0$
12. (a) $\sec^2 t - 4 = 0$ (b) $3\tan^2 t - 1 = 0$
13. (a) $2\cos^2 t + 3\cos t + 1 = 0$
    (b) $2\operatorname{sen}^2 t - 5\operatorname{sen} t - 3 = 0$
14. (a) $2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t - 1 = 0$
    (b) $2\cos^2 t + 3\cos t - 2 = 0$
15. (a) $\sec^2 t - 2\tan t = 0$
    (b) $\tan^2 t - \sec t = 1$
16. (a) $\tan t + \cot t + 2 = 0$
    (b) $\cot^2 t + \csc t = 1$
17. (a) $\operatorname{sen} t + \cos t = 0$
    (b) $2\operatorname{sen} t + \sec t = 0$
18. (a) $\tan t - \cot t = 0$
    (b) $\tan t + \sec t = 0$

En los ejercicios 19 a 22, encuentre las soluciones de la ecuación si $0 \le t < 2\pi$. *Compruebe las respuestas en la graficadora*

19. $\operatorname{sen}^2 t + 5\cos t + 2 = 0$
20. $3\sec^2 t + \tan t - 5 = 0$

21. $3 \tan^2 t - \tan t - 3 = 0$

22. $10 \cos^2 t - 4 \cos t - 5 = 0$

En los ejercicios 23 a 28, determine todos los ángulos θ que son soluciones de la ecuación si $0° \leq \theta < 360°$. Verifique las respuestas en la graficadora.

23. $9 \cos^2 \theta + 6 \cos \theta - 8 = 0$

24. $5 \operatorname{sen}^2 \theta - 11 \operatorname{sen} \theta + 2 = 0$

25. $2 \operatorname{sen} 2\theta - 3 \operatorname{sen} \theta = 0$

26. $2 \cos 2\theta + 3 \cos \theta + 1 = 0$

27. $\tan \theta - 3 \cot \theta = 2$

28. $2 \tan^2 \theta - \sec \theta = 1$

En los ejercicios 29 a 34, encuentre todas las soluciones reales de las ecuaciones del ejercicio indicado.

29. Ejercicio 11 **30.** Ejercicio 14

31. Ejercicio 15 **32.** Ejercicio 16

33. Ejercicio 19 **34.** Ejercicio 20

En los ejercicios 35 a 40, halle todos los ángulos θ que son soluciones de la ecuación del ejercicio indicado. Exprese las soluciones en grados.

35. Ejercicio 23 **36.** Ejercicio 24

37. Ejercicio 25 **38.** Ejercicio 26

39. Ejercicio 27 **40.** Ejercicio 28

En los ejercicios 41 a 48, determine todos los valores de x en $[0, 2\pi)$ que son soluciones de la ecuación.

41. (a) $\tan 3x = -1$ (b) $\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}$

42. (a) $\cot 3x = \sqrt{3}$ (b) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$

43. (a) $\cot 4x = -\sqrt{3}$ (b) $\sec 5x = 2$

44. (a) $\cot 4x = -1$ (b) $\csc 5x = \sqrt{2}$

45. (a) $\operatorname{sen}^2 2x = 1$ (b) $\cos \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$

46. (a) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$ (b) $\operatorname{sen} \frac{1}{3}x = 1$

47. (a) $\tan^2 \frac{1}{2}x = 3$ (b) $\csc \frac{1}{3}x = 2$

48. (a) $\sec^2 \frac{1}{2}x = 2$ (b) $\cot \frac{1}{2}x = -1$

En los ejercicios 49 a 52, encuentre todas las soluciones reales de las ecuaciones del ejercicio indicado.

49. Ejercicio 41 **50.** Ejercicio 42

51. Ejercicio 45 **52.** Ejercicio 46

En los ejercicios 53 al 56, encuentre todos los ángulos θ que son soluciones de la ecuación si $0° \leq \theta < 360°$.

53. $2 \cos 3\theta \operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta = 0$

54. $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta = -1$

55. $\tan 2\theta + 5 = 3 \sec^2 2\theta$

56. $\cot^2 4\theta - 1 = \csc 4\theta$

En los ejercicios 57 a 62, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función de cada miembro de la ecuación y determine si ésta es una identidad. (b) Si la ecuación es una identidad, pruébela algebraicamente. Si la ecuación no es una identidad, resuélvala para todos los valores de x en $[0, 2\pi)$ y compruebe las soluciones en la graficadora.

57. $\cot x + \tan x = \csc x \sec x$

58. $1 - \tan^2 x = \tan x \sec x$

59. $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$

60. $\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos x \cos 3x$

61. $\operatorname{sen}^2 4x + \cos^2 2x = 1$

62. $\tan 2x - \tan x = \tan x \sec 2x$

Los ejercicios 63 a 68 son enunciados de problemas que tienen una ecuación trigonométrica como modelo matemático. No olvide escribir una conclusión.

63. En un circuito eléctrico, la fuerza electromotriz es $E(t)$ volts, donde $E(t) = 2 \cos 50\pi t$. Encuentre el menor valor positivo de t para el cual la fuerza electromotriz es (a) 2 volts y (b) –2 volts. (c) Verifique las respuestas para los incisos (a) y (b) en la graficadora.

64. Realice el ejercicio 63 considerando $E(t) = 4 \operatorname{sen} 120\pi t$.

65. Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$f(t) = 10 \operatorname{sen} \tfrac{3}{4}\pi(t - 3)$$

donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. Determine el valor positivo menor de t para el cual el desplazamiento del cuerpo por arriba de su posición es (a) 5 cm y (b) 6 cm. (c) Compruebe las respuestas para los incisos (a) y (b) en la graficadora.

66. Haga el ejercicio 65 si $f(t) = 10 \cos \frac{5}{6}\pi(t - \frac{2}{5})$.

67. Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$y = 2 \operatorname{sen} 4\pi(t + \tfrac{1}{8})$$

donde y centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. (a) Resuelva la ecuación para t. (b) Emplee la ecuación del inciso (a) para determinar los tres valores positivos menores de t para los cuales el cuerpo está 1 cm arriba de su posición central. (c) Verifique las respuestas para el inciso (b) en la graficadora.

68. Una corriente alterna de 60 ciclos está descrita por la ecuación $x = 20 \operatorname{sen} 120\pi(t - \frac{11}{720})$ donde x amperes es la corriente a los t segundos. (a) Resuelva la ecuación para t. (b) Emplee la ecuación del inciso (a) para determinar los tres valores positivos menores de t para los cuales la corriente es 10 ampere. (c) Verifique las respuestas para el inciso (b) en la graficadora.

69. Explique por qué la ecuación $\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{4} = 0$ tiene cuatro soluciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$ mientras que la ecuación $x^2 - (\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2})^2 = 0$ tiene sólo dos soluciones en ese intervalo. Incluya las soluciones en la explicación.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 9

▶ VISIÓN RETROSPECTIVA

9.1 Se destacó un resumen paso a paso de las sugerencias para probar identidades trigonométricas y se aplicó a los ejemplos. Ciertos ejercicios y ejemplos requirieron la determinación de que una ecuación particular fuese una identidad.

9.2 Primero se obtuvo la identidad del coseno de la diferencia, obtenida al utilizar la fórmula de la distancia aplicada a puntos de la circunferencia unitaria. La identidad del coseno de la suma se dedujo de esta identidad. Las identidades del seno de la suma y la diferencia se derivaron de las correspondientes del coseno al aplicar identidades de las cofunciones. Las identidades de la tangente de la suma y de la diferencia se dedujeron al emplear la identidad fundamental que expresa la tangente como la razón del seno al coseno. Se aplicaron las identidades de la suma y la diferencia para calcular valores de función exactos y para probar otras identidades. También se probó el teorema que permite escribir una expresión de la forma $A \operatorname{sen} bt + B \cos bt$ como $a \operatorname{sen}(bt + c)$.

9.3 Como casos especiales de las identidades del seno, coseno y tangente de la suma, se obtuvieron las identidades de valor doble. Después se emplearon estas identidades para derivar otras identidades de valor múltiple. Se mostró cómo las identidades para $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en términos de $\cos 2x$, se utilizaron para expresar una potencia par del seno o coseno en términos de valores de la función coseno con exponentes no mayores que 1, procedimiento útil en Cálculo. Otra sustitución útil en Cálculo, mencionada aquí, es la sustitución $z = \tan \frac{1}{2} x$, la cual reduce una función racional de sen x y cos x a una función racional de z.

9.4 Se discutieron las identidades del producto de seno y coseno. Aunque no se utilizaron tanto, como aquellas de las secciones 9.2 y 9.3, en ocasiones son necesarias en Cálculo para escribir una expresión trigonométrica que implica el producto de funciones seno y coseno como una suma o diferencia. También se trataron las identidades de suma y diferencia de seno y coseno. En un ejemplo se aplicó la identidad de la suma de seno para expresar la suma de dos funciones seno, con diferente periodo pero con igual amplitud, como el producto de funciones seno y coseno. La gráfica en ese ejemplo mostró el principio de superposición que tiene aplicaciones en varios campos, incluyendo televisión, radio y comunicaciones telefónicas.

9.5 Se destacaron las definiciones y gráficas de las funciones trigonométricas inversas. Se determina-

ron valores de función exactos que implican estas funciones y se probaron identidades concernientes a ellas. Se enfatizó que la elección excepcional del contradominio de la función secante inversa se hizo de modo que ciertas operaciones en Cálculo se simplificaran. Un ejemplo mostró cómo la función tangente inversa se puede utilizar para determinar la posición de un observador que proporciona la "mejor vista" de un objeto.

9.6 Para resolver ecuaciones trigonométricas que implican números reales o ángulos, se aplicaron las funciones trigonométricas inversas. Se mostró cómo obtener soluciones de ecuaciones trigonométricas cuando la variable se restringe a un intervalo particular así como la forma de obtener todas las soluciones de una ecuación cuando no hay restricción sobre el dominio de la incógnita. Se incluyeron algunas ecuaciones que contienen funciones de valor múltiple. Las discusiones de esta sección, así como en otras secciones del capítulo, se aumentaron por las aplicaciones en los ejemplos y ejercicios. Estas aplicaciones incluyeron fenómenos periódicos, solución de triángulos y problemas relativos al Cálculo.

▶ EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 28, pruebe la identidad.

1. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta = \tan\theta$

2. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x} = \cos x$

3. $\cos^2 y(\tan^2 y + 1) = 1$

4. $\sec^2\alpha \cot^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

5. $\operatorname{sen} x(\csc x - \operatorname{sen} x) = \cos^2 x$

6. $\csc x(\csc x - \operatorname{sen} x) = \cot^2 x$

7. $\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

8. $\dfrac{1 - \cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta} = 2\cos^2\theta - 1$

9. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\csc\alpha - \cot\alpha} = 1 + \cos\alpha$

10. $\dfrac{\cos y}{\sec y - \cos y} = \cot^2 y$

11. $\dfrac{\sec t - 1}{\cos t} = \dfrac{\tan^2 t}{1 + \cos t}$

12. $\dfrac{\tan x}{\sec x - \cos x} = \dfrac{\sec x}{\tan x}$

13. $\sec^2\theta - \csc^2\theta = \tan^2\theta - \cot^2\theta$

14. $\sec^4\beta - \tan^4\beta = 1 + 2\tan^2\beta$

15. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \csc x - \cot x$

16. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \csc x + \cot x$

17. $\dfrac{\cos y}{1 - \tan y} + \dfrac{\operatorname{sen} y}{1 - \cot y} = \operatorname{sen} y + \cos y$

18. $\dfrac{\sec^2\theta + \csc^2\theta}{\sec^2\theta - \csc^2\theta} = \dfrac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta - 1}$

19. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \dfrac{\cot\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$

20. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dfrac{\cot\alpha - \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$

21. $\tan(\theta - \frac{1}{4}\pi) = \dfrac{\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1}$

22. $\operatorname{sen}(\frac{1}{4}\pi + x)\operatorname{sen}(\frac{1}{4}\pi - x) = \frac{1}{2}\cos 2x$

23. $\tan\frac{1}{2}(x - y) = \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y}$

24. $\tan\frac{1}{2}(x + y) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y}$

25. $2\cos 2\theta \cos\theta - \cos 3\theta = \cos\theta$

26. $2\cos 2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 3\theta = -\operatorname{sen}\theta$

27. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$

28. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$

29. Calcule el valor exacto de cos 75° en dos maneras: (a) emplee la identidad del coseno de la suma, (b) utilice una identidad de semiángulo.

30. Calcule el valor exacto de sen 105° de dos formas: (a) aplique la identidad del seno de la suma; (b) utilice una identidad de semiángulo.

31. Calcule el valor exacto de $\tan \frac{7}{12}\pi$ en dos maneras: (a) emplee la identidad de la tangente de la suma; (b) utilice una identidad de semiángulo.

32. Si $\tan x = \frac{4}{5}$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ y $\tan y = -\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$, halle: (a) $\tan(x + y)$; (b) $\tan(x - y)$; (c) el cuadrante que contiene a $x + y$; (d) el cuadrante que contiene a $x - y$.

33. Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13}$ con α en el segundo cuadrante y $\cos \beta = -\frac{7}{25}$ con β en el tercer cuadrante, encuentre: (a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$; (b) $\cos(\alpha + \beta)$; (c) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$; (d) $\cos(\alpha - \beta)$; (e) el cuadrante que contiene a $\alpha + \beta$; (f) el cuadrante que contiene a $\alpha - \beta$.

34. Si $\tan t = \frac{24}{7}$ y $\cos t > 0$, determine $\operatorname{sen} \frac{1}{2}t$.

35. Si $\cos t = -\frac{3}{5}$ y $\operatorname{sen} t < 0$, encuentre $\tan \frac{1}{2}t$.

36. Halle el valor exacto: (a) $\operatorname{sen} \frac{9}{8}\pi \cos \frac{3}{8}\pi$; (b) $\operatorname{sen} 195° - \cos 165°$.

En los ejercicios 37 y 38, escriba la expresión en términos de valores del coseno con exponentes no mayores que 1.

37. $\cos^2 2t \operatorname{sen}^4 2t$

38. $\operatorname{sen}^4 3t$

En los ejercicios 39 y 40, emplee la sustitución $z = \tan \frac{1}{2}x$ para escribir la expresión como una función racional de z.

39. $3 \cos x - 2 \operatorname{sen} x + 3$

40. $\dfrac{2 + \cos x}{\operatorname{sen} 2x}$

En los ejercicios 41 a 44, dibuje la gráfica de la función. Verifique la gráfica en la graficadora.

41. $f(x) = \frac{1}{2}\cos^{-1} 2x$

42. $g(x) = 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}x$

43. $g(x) = \tan^{-1} 3x$

44. $f(x) = 3 \cot^{-1} x$

En los ejercicios 45 a 54, halle las soluciones de la ecuación si $0 \le t < 2\pi$.

45. (a) $2 \cos t - 1 = 0$ (b) $\tan^2 t - 1 = 0$

46. (a) $\cot t + 1 = 0$ (b) $2 \operatorname{sen}^2 t - 1 = 0$

47. $2 \operatorname{sen}^2 t + 3 \operatorname{sen} t - 2 = 0$

48. $\tan^2 t - 3 \sec t + 3 = 0$

49. $\tan t - 2 = 3 \cot t$

50. $6 \cos^2 t - \operatorname{sen} t - 4 = 0$

51. $4 \cos^2 3t - 3 = 0$

52. $4 \operatorname{sen}^2 2t - 1 = 0$

53. $\cot^2 2t = 4$

54. $\tan^2 3t = 2$

En los ejercicios 55 a 58, determine todas las soluciones reales de las ecuaciones del ejercicio indicado.

55. Ejercicio 45

56. Ejercicio 46

57. Ejercicio 49

58. Ejercicio 50

En los ejercicios 59 a 64, encuentre todos los ángulos θ que son soluciones de la ecuación si $0° \le \theta < 360°$.

59. $\tan \theta - \cot \theta = 0$

60. $2 \cos \theta + \sec \theta - 3 = 0$

61. $2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta = 1$

62. $\cot^2 \frac{1}{2}\theta = 3$

63. $\tan^2 \theta + 3 \sec \theta + 3 = 0$

64. $2 \operatorname{sen} 2\theta + 1 = \csc 2\theta$

En los ejercicios 65 a 68, halle todos los ángulos θ que son soluciones de la ecuación del ejercicio indicado. Exprese las soluciones en grados.

65. Ejercicio 59

66. Ejercicio 60

67. Ejercicio 61

68. Ejercicio 62

En los ejercicios 69 a 72, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función de cada miembro de la ecuación y determine si la ecuación es una identidad. (b) Si la ecuación es una identidad, pruébela algebraicamente. Si la ecuación no es una identidad, resuélvala para todos los valores de x en $[0, 2\pi)$ y compruebe las soluciones en la graficadora.

69. $\operatorname{sen} 2x - \cos 2x \tan x = \tan x$

70. $\cos 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

71. $\cos^2 2x + 3 \operatorname{sen} 2x = 3$

72. $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$

En los ejercicios 73 y 74, utilice una calculadora para aproximar el valor de la función.

73. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.6032)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-0.6032)$
(c) $\cos^{-1}(0.6032)$ (d) $\cos^{-1}(-0.6032)$
(e) $\tan^{-1}(0.6032)$ (f) $\tan^{-1}(-0.6032)$

74. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.4833)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-0.4833)$
(c) $\cos^{-1}(0.4833)$ (d) $\cos^{-1}(-0.4833)$
(e) $\tan^{-1}(0.4833)$ (f) $\tan^{-1}(-0.4833)$

75. Dado $x = \operatorname{arc\,sen} \frac{3}{5}$ y $y = \operatorname{arc\,cos}(-\frac{4}{5})$, calcule el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes:
(a) $\cos x$ (b) $\operatorname{sen} y$ (c) $\tan x$ (d) $\tan y$

76. Dado $x = \cos^{-1} \frac{7}{25}$ y $y = \tan^{-1}(-\frac{7}{24})$, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes:
(a) $\operatorname{sen} x$ (b) $\operatorname{sen} y$ (c) $\cos y$ (d) $\tan x$

En los ejercicios 77 a 82, encuentre el valor de función exacto.

77. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\cos \frac{1}{4}\pi)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}[\cos(-\frac{1}{4}\pi)]$
(c) $\cos^{-1}[\operatorname{sen}(-\frac{1}{4}\pi)]$ (d) $\operatorname{sen}^{-1}(\cos \frac{3}{4}\pi)$
(e) $\cos^{-1}(\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi)$

78. (a) $\cos^{-1}(\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi)$ (b) $\cos^{-1}[\operatorname{sen}(-\frac{1}{6}\pi)]$
(c) $\operatorname{sen}^{-1}[\cos(-\frac{1}{6}\pi)]$ (d) $\cos^{-1}(\operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi)$
(e) $\operatorname{sen}^{-1}(\cos \frac{5}{6}\pi)$

79. (a) $\tan^{-1}(\tan \frac{5}{6}\pi)$ (b) $\tan^{-1}(\cot \frac{5}{6}\pi)$
(c) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{5}{6}\pi)]$ (d) $\tan^{-1}[\cot(-\frac{5}{6}\pi)]$

80. (a) $\tan^{-1}(\tan \frac{2}{3}\pi)$ (b) $\tan^{-1}(\cot \frac{2}{3}\pi)$
(c) $\tan^{-1}[\tan(-\frac{2}{3}\pi)]$ (d) $\tan^{-1}[\cot(-\frac{2}{3}\pi)]$

81. (a) $\operatorname{sen}[2 \cos^{-1}(-\frac{12}{13})]$
(b) $\tan[\cos^{-1} \frac{3}{5} + \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{7}{25})]$

82. (a) $\tan[2 \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{24}{25})]$
(b) $\cos[\tan^{-1} \frac{4}{3} - \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{5}{13})]$

En los ejercicios 83 y 84, (a) exprese $f(t)$ en la forma a $\operatorname{sen}(bt + c)$, (b) determine la amplitud, el periodo y el defasamiento de f, (c) dibuje la gráfica de f, y (d) compruebe la gráfica del inciso (c) en la graficadora.

83. $f(t) = 1.47 \operatorname{sen} 2t + 2.65 \cos 2t$

84. $f(t) = 2 \operatorname{sen} 4t - 2\sqrt{3} \cos 4t$

En los ejercicios 85 y 86, emplee el método del ejemplo 4 de la Sección 9.4 para dibujar la gráfica de la función en el intervalo indicado. Verifique la gráfica en la graficadora.

85. $f(t) = \operatorname{sen} 10\pi t + \operatorname{sen} 12\pi t; [0, 2]$

86. $f(t) = 2 \cos 30\pi t - 2 \cos 50\pi t; [0, \frac{1}{5}]$

87. Dado $f(t) = \operatorname{sen} 41\pi t + \operatorname{sen} 39\pi t$, **(a)** exprese $f(t)$ como el producto de funciones seno y coseno. **(b)** Dibuje la gráfica de f correspondiente a medio periodo de la función coseno determinada en el inciso (a) y compruebe la gráfica en la graficadora.

88. En un punto particular del espacio, dos ondas atmosféricas producen presiones de $F(t)$ dinas por centímetro cuadrado y $G(t)$ dinas por centímetro cuadrado a los t segundos, donde $F(t) = 0.02 \operatorname{sen}(200\pi t + \frac{2}{3}\pi)$ y $G(t) = 0.04 \operatorname{sen}(200\pi t - \frac{1}{3}\pi)$. Defina la suma de F y G por una ecuación de la forma

$$f(t) = a \operatorname{sen}(200\pi t + c)$$

Verifique la respuesta trazando las gráficas de $F + G$ y f.

89. Haga el ejercicio 88 si $F(t) = 0.037 \operatorname{sen}(200\pi t + 0.26)$ y $G(t) = 0.024 \operatorname{sen} 200\pi t$.

90. Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$f(t) = -4 \operatorname{sen} 10t - 3 \cos 10t$$

donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. **(a)** Defina $f(t)$ por una ecuación de la forma $f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c)$.

(b) Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia de f. (c) Dibuje la gráfica de f. (d) Compruebe la gráfica del inciso (c) en la graficadora.

91. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación de movimiento

$$s = \operatorname{sen}(6t - \tfrac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(6t + \tfrac{1}{6}\pi)$$

donde s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. (a) Demuestre que el movimiento es armónico simple al definir s mediante una ecuación de la forma $s = a \operatorname{sen}(bt + c)$. (b) Determine la amplitud y frecuencia del movimiento.

92. Haga el ejercicio 91 si $s = 8 \cos^2 6t - 4$.

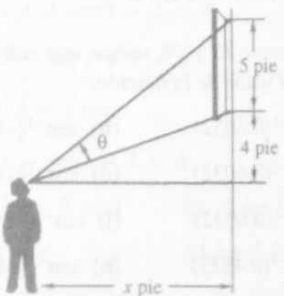
93. Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$y = 4 \operatorname{sen} 2\pi(t + \tfrac{1}{6})$$

donde y centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central t segundos después de iniciado el movimiento y el sentido positivo es hacia arriba. (a) Resuelva la ecuación para t. (b) Utilice la ecuación del inciso (a) para determinar los dos valores positivos menores de t para los cuales el desplazamiento del cuerpo por arriba de su posición central es de 3 cm. (c) Verifique la respuesta del inciso (b) en la graficadora.

94. En un circuito eléctrico la fuerza electromotriz es $E(t)$ volts, donde $E(t) = 20 \cos 120\pi t$. Encuentre el menor valor positivo de t para el cual la fuerza electromotriz es (a) 5 volts y (b) –5 volts. (c) Compruebe las respuestas de los incisos (a) y (b) en la graficadora.

95. Un cuadro de 5 pie de altura se coloca en una pared con su base a 4 pie por arriba del nivel de los ojos de un observador. Sea θ la medida en radianes del ángulo subtendido por el cuadro en los ojos del observador cuando éste se encuentra a x pies de la pared. (a) Defina θ como una función de x. Encuentre θ cuando (b) $x = 5$, (c) $x = 6$ y (d) $x = 7$. (e) Emplee la graficadora para estimar, con precisión de centésimos de pie, a qué distancia debe situarse el observador para que tenga la "mejor vista" del cuadro, esto es, de modo que el ángulo subtendido por el cuadro en los ojos del observador sea el valor máximo.



96. Si t es cualquier número real, A, B y b son constantes, y $A > 0$, compruebe que

$$A \cos bt + B \operatorname{sen} bt = a \cos(bt - c)$$

donde $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $c = \tan^{-1}\left(\dfrac{B}{A}\right)$.

97. Dada $f(t) = \sqrt{3} \cos 2t - \operatorname{sen} 2t$. (a) Utilice la fórmula del ejercicio 96 para definir $f(t)$ mediante una ecuación de la forma $f(t) = a \cos(bt - c)$. (b) Determine la amplitud, periodo y defasamiento de f. (c) Dibuje la gráfica de f. (d) Compruebe las respuestas trazando las gráficas de la ecuación dada y la ecuación del inciso (a).

98. Haga el ejercicio 97 si $f(t) = 4.83 \cos 4\pi t + 5.07 \operatorname{sen} 4\pi t$.

99. Compruebe la identidad

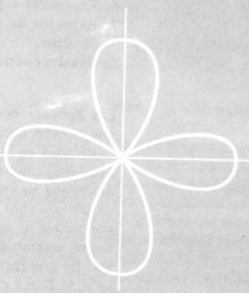
$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y - \operatorname{sen} 2(x + y) = 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$$

100. Pruebe que $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\pi$, si $x > 0$.

[*Sugerencia:* emplee la fórmula de reducción $\cot u = \tan(\frac{1}{2}\pi - u)$]

Capítulo 10

Vectores, ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y números complejos



VISIÓN PRELIMINAR

A partir de este punto, se aplicará la trigonometría aprendida en los tres capítulos previos a vectores y a algunos conceptos algebraicos. El estudio de vectores, presentado aquí, es una breve introducción debido a que serán tratados con mayor detalle en el curso de Cálculo, donde las funciones vectoriales desempeñan un papel importante. Las gráficas de estas funciones pueden representarse por medio de ecuaciones paramétricas, las cuales también se estudian en este capítulo.

SUMARIO

10.1 Vectores
10.2 Funciones vectoriales y ecuaciones paramétricas
10.3 Coordenadas polares
10.4 Gráficas de ecuaciones polares
10.5 Forma polar de números complejos
10.6 Potencias y raíces de números complejos y teorema de De Moivre

10.1 VECTORES

OBJETIVOS

1. **Definir un vector.**
2. **Calcular la magnitud de un vector.**
3. **Calcular el ángulo director de un vector.**
4. **Encontrar la suma de dos vectores dados.**
5. **Encontrar la diferencia de dos vectores dados.**
6. **Encontrar el producto de un escalar y un vector.**
7. **Expresar un vector en términos de su magnitud y su ángulo director.**
8. **Resolver enunciados de problemas que implican vectores.**

Las aplicaciones matemáticas suelen relacionarse con cantidades que poseen tanto magnitud como dirección. Un ejemplo de tales cantidades es la *velocidad.* Por ejemplo, la velocidad de un avión tiene magnitud (la rapidez con que éste vuela) y dirección, la cual determina su curso. Otros ejemplos de tales cantidades son *fuerza, desplazamiento* y *aceleración.* Los físicos e ingenieros entienden por vector al segmento rectilíneo dirigido, y a las cantidades que tienen magnitud y dirección son denominadas **cantidades vectoriales.** En contraste, una cantidad que tiene magnitud pero no dirección se llama **cantidad escalar.** Ejemplos de cantidades escalares son longitud, área, volumen y rapidez. El estudio de los vectores se denomina **análisis vectorial.**

El estudio del análisis vectorial se puede hacer de forma geométrica o analítica. Si el estudio es geométrico, primero se define el segmento rectilíneo dirigido del punto P al punto Q y se denota por $\overrightarrow{PQ}$. El punto P se denomina **punto inicial,** y el punto Q se llama **punto terminal.** Se dice que dos segmentos rectilíneos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son **iguales** si éstos tienen la misma *longitud* y la misma *dirección*, y se escribe $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (*véase* la Figura 10.1). El segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se denomina **vector** de P a Q. Un vector se representa mediante una sola letra en tipo negro tal como **A**. En algunos libros se emplea una letra en tipo cursivo con una flecha arriba para denotar un vector, por ejemplo $\vec{A}$. Cuando trabaje con vectores, puede usar esa notación o $\underline{A}$ a fin de distinguir el símbolo para un vector del símbolo asignado para un número real.

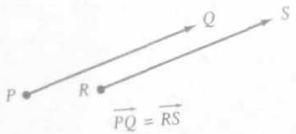


FIGURA 10.1

Al continuar con el estudio geométrico del análisis vectorial, observe que si el segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es el vector **A**, y $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, entonces el segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{RS}$ es también el vector **A**. Por esto se considera que un vector permanece sin cambio si se mueve paralelamente a sí mismo. Con esta interpretación de un vector se puede suponer, por conveniencia, que cada vector tiene su punto inicial en algún punto de referencia fijo. Si referimos este punto como el origen de un sistema coordenado cartesiano rectangular, puede definirse un vector analíticamente en términos de números reales. Tal definición permite el estudio del análisis vectorial desde

un punto de vista puramente analítico y este estudio es el que se presenta en Cálculo. Un vector en el plano se denota por un par ordenado de números reales. La notación $\langle x, y \rangle$ se emplea en lugar de (x, y) para evitar la confusión de un vector con un punto. La definición formal de vector es la siguiente.

DEFINICIÓN **Vector**

Un vector en el plano es un par ordenado de números reales $\langle x, y \rangle$. Los números x y y se denominan **componentes** del vector.

Se dice que dos vectores son **iguales** si y sólo si tienen los mismos componentes.

Existe una correspondencia uno a uno entre los vectores $\langle x, y \rangle$ del plano y los puntos (x, y) del plano. Sea el vector **A** el par ordenado de números reales $\langle a_1, a_2 \rangle$. Si A es el punto (a_1, a_2), entonces el vector **A** puede representarse geométricamente por el segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{OA}$. Tal segmento rectilíneo dirigido se denomina **representación** del vector **A**. Cualquier segmento rectilíneo dirigido que sea igual a $\overrightarrow{OA}$ también es una representación del vector **A**. La representación particular de un vector que tiene su punto inicial en el origen se denomina **representación posicional** o de **posición** del vector.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

El vector $\langle 2, 3 \rangle$ tiene como representación de posición el segmento rectilíneo dirigido del origen al punto (2, 3). La representación de $\langle 2, 3 \rangle$ cuyo punto inicial es (h, k) tiene como punto terminal $(h + 2, k + 3)$; *véase* la Figura 10.2. ◀

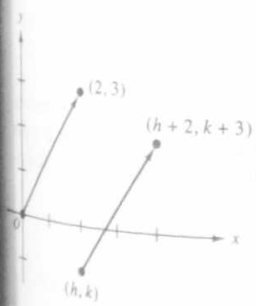


FIGURA 10.2

El vector $\langle 0, 0 \rangle$ se denomina **vector cero** y se denota por **0**; esto es,

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$$

Cualquier punto es una representación del vector cero.

La **magnitud** de un vector **A** es la longitud de cualesquiera de sus representaciones y se denota por $\|\mathbf{A}\|$. La **dirección** de un vector, diferente del vector cero, es la dirección de cualesquiera de sus representaciones.

TEOREMA 1

Si **A** es el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

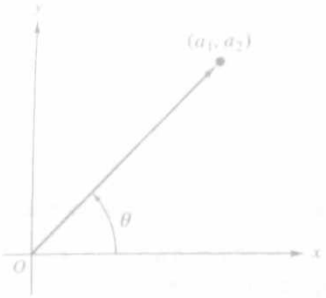


FIGURA 10.3

Demostración Como $\|\mathbf{A}\|$ es la longitud de cualesquiera de las representaciones de $\mathbf{A}$, será la longitud de su representación de posición, la cual es la distancia del origen al punto (a_1, a_2). De la fórmula de la distancia

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\end{aligned}$$

Observe que $\|\mathbf{A}\|$ es un número no negativo y no un vector. Del Teorema 1, se deduce que

$$\|\mathbf{0}\| = 0$$

esto es, la magnitud del vector cero es 0.

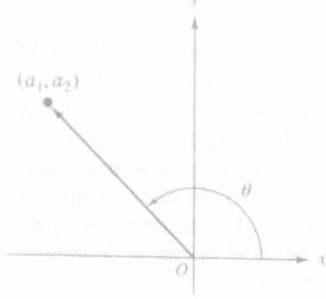


FIGURA 10.4

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Si $\mathbf{A} = \langle -3, 5 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{34}\end{aligned}$$

El **ángulo director** de cualquier vector, diferente del vector cero, es el ángulo θ medido a partir del lado positivo del eje x, en sentido contrario al del giro de las manecillas del reloj hasta la representación de posición del vector. Si θ está medido en radianes, entonces $0 \leq \theta < 2\pi$. Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1} \qquad \text{si } a_1 \neq 0$$

Si $a_1 = 0$ y $a_2 > 0$, entonces $\theta = \frac{1}{2}\pi$; si $a_1 = 0$ y $a_2 < 0$, entonces $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Las figuras 10.3 a 10.5 muestran el ángulo director θ para vectores específicos cuyas representaciones de posición están dibujadas en ellas.

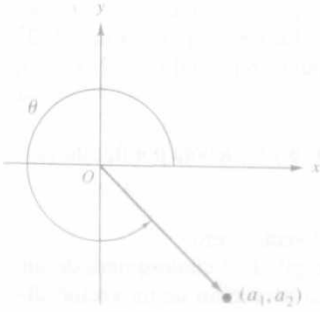


FIGURA 10.5

▸ EJEMPLO 1 *Determinación del ángulo director de un vector*

Determine la medida en radianes del ángulo director de cada uno de los siguientes vectores: **(a)** $\langle -1, 1 \rangle$, **(b)** $\langle 0, -5 \rangle$, **(c)** $\langle 1, -2 \rangle$.

Solución La representación de posición de los vectores en (a), (b) y (c) se muestra en las figuras 10.6, 10.7 y 10.8, respectivamente.

(a) $\tan\theta = \frac{1}{-1}$

$= -1$

Como $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$, entonces $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

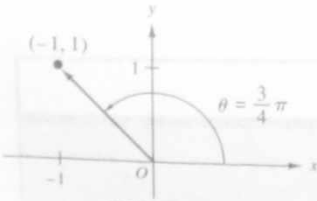


FIGURA 10.6

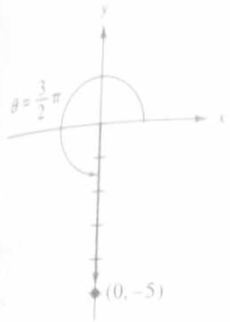


FIGURA 10.7

(b) Debido a que $a_1 = 0$, $\tan\theta$ no existe. Por tanto, como $a_2 < 0$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

(c) $\tan\theta = \frac{-2}{1}$
$= -2$

Como $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$, $\theta = 5.176$. ◀

Observe que si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y θ es el ángulo director de $\mathbf{A}$, entonces

$$a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos\theta \quad \text{y} \quad a_2 = \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Si el vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ entonces la representación de $\mathbf{A}$ cuyo punto inicial es (x, y) tiene como punto terminal $(x + a_1, y + a_2)$. La Figura 10.9 muestra cinco representaciones del vector $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$. En cada caso $\mathbf{A}$ transforma el punto (x_i, y_i) en el punto $(x_i + a_1, y_i + a_2)$.

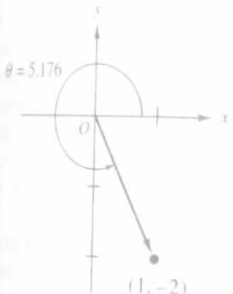


FIGURA 10.8

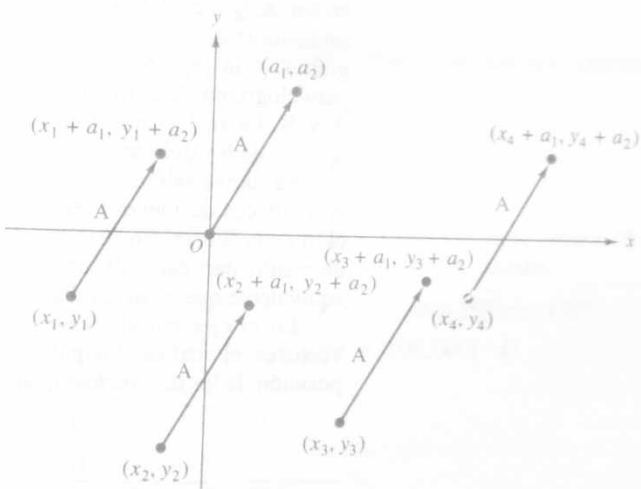


FIGURA 10.9

La siguiente definición proporciona el método para sumar dos vectores.

DEFINICIÓN Suma de dos vectores

La **suma** de dos vectores $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ es el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definido por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Si $\mathbf{A} = \langle 3, -1 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -4, 5 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 3 + (-4), -1 + 5 \rangle \\ &= \langle -1, 4 \rangle \end{aligned}$$

◂

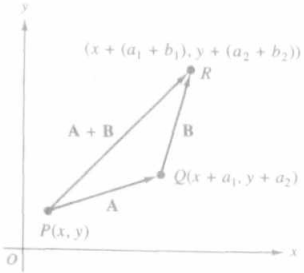


FIGURA 10.10

La interpretación geométrica de la suma de dos vectores se muestra en la Figura 10.10. Sea $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ y P el punto (x, y). Entonces $\mathbf{A}$ transforma el punto P en el punto $(x + a_1, y + a_2) = Q$. El vector $\mathbf{B}$ transforma el punto Q en el punto $((x + a_1) + b_1, (y + a_2) + b_2)$ o, equivalentemente $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$. Además,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

Por tanto, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ transforma el punto P en $(x + (a_1 + b_1), y + (a_2 + b_2)) = R$. Así, en la Figura 10.10, $\overrightarrow{PQ}$ es una representación del vector $\mathbf{A}$, $\overrightarrow{QR}$ es del vector $\mathbf{B}$, y $\overrightarrow{PR}$ es del vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Las representaciones de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son lados adyacentes de un paralelogramo, y la representación del vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es una diagonal del paralelogramo. Esta diagonal se denomina **resultante** de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. La regla para la adición de vectores recibe algunas veces el nombre de **ley del paralelogramo.**

La fuerza es una cantidad vectorial donde la magnitud se expresa en unidades de fuerza y el ángulo director se determina por la dirección de la fuerza. En física se demuestra que dos fuerzas aplicadas en un punto particular de un objeto pueden sustituirse por una fuerza equivalente que es su resultante.

En el ejemplo siguiente se hace referencia al **ángulo entre dos vectores,** el cual es el ángulo determinado por las representaciones de posición de los dos vectores, tal que $0° \leq \theta \leq 180°$.

▸ EJEMPLO 2 *Solución del enunciado de un problema que implica vectores*

Dos fuerzas de magnitudes de 200 lb y 250 lb forman un ángulo de 60° entre sí y se aplican a un cuerpo en el mismo punto. Encuentre (**a**) la magnitud de la fuerza resultante y (**b**) el ángulo que forma la resultante con la fuerza de 200 lb.

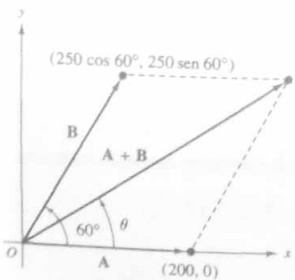


FIGURA 10.11

Solución *Véase* la Figura 10.11, donde los ejes se eligieron de modo que la representación de posición de la fuerza de 200 lb esté a lo largo del lado positivo del eje x. El vector $\mathbf{A}$ representa esta fuerza y $\mathbf{A} = \langle 200, 0 \rangle$. El vector $\mathbf{B}$ representa la fuerza de 250 lb. De las fórmulas (1), si $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} b_1 &= 250 \cos 60° & b_2 &= 250 \operatorname{sen} 60° \\ &= 125 & &= 216.5 \end{aligned}$$

De modo que $\mathbf{B} = \langle 125, 216.5 \rangle$. La fuerza resultante es $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, y

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle 200, 0 \rangle + \langle 125, 216.5 \rangle$$
$$= \langle 325, 216.5 \rangle$$

(a) $$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{(325)^2 + (216.5)^2}$$
$$= 390.5$$

Conclusión: La magnitud de la fuerza resultante es 390.5 lb.

(b) Si θ es el ángulo que el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ forma con $\mathbf{A}$, entonces

$$\tan \theta = \frac{216.5}{325}$$
$$\tan \theta = 0.6662$$
$$\theta = 33.67°$$

Conclusión: La fuerza resultante forma un ángulo de 33.67° con la fuerza de 200 lb. ◀

El siguiente ejemplo ilustrativo ofrece una solución alternativa para el ejemplo 2.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

De la Figura 10.11 se tiene el triángulo mostrado en la Figura 10.12. Al aplicar la ley de los cosenos a este triángulo, se obtiene

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 = (200)^2 + (250)^2 - 2(200)(250)\cos 120°$$
$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 = 40{,}000 + 62{,}500 - 100{,}000(-\tfrac{1}{2})$$
$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 = 152{,}500$$
$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{152{,}500}$$
$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = 390.5$$

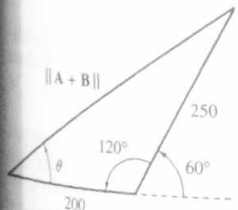


FIGURA 10.12

Se puede aplicar la ley de los senos al triángulo de la Figura 10.12.

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{250} = \frac{\operatorname{sen} \theta\, 120°}{390.5}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{250 \operatorname{sen} 120°}{390.5}$$
$$\operatorname{sen} \theta = 0.5544$$
$$\theta = 33.67°$$ ◀

Si $\mathbf{V}$ es el vector velocidad, entonces $\|\mathbf{V}\|$ es la rapidez, una cantidad escalar. En el siguiente ejemplo, que trata sobre la navegación marina, se hace referencia a la velocidad de una lancha con relación al agua y a la velocidad de la corriente del agua. La resultante de estas dos velocidades es la velocidad de la lancha en relación con la tierra firme.

▸ EJEMPLO 3 *Solución del enunciado de un problema que implica vectores*

Una lancha sale de la ribera sur de un río con un enfilamiento (o curso relativo) al norte y con una velocidad de 8 mi/h relativa al agua. Si la velocidad de la corriente es 3 mi/h hacia el este, ¿cuál es la rapidez de la lancha en relación con tierra firme y cuál es su curso?

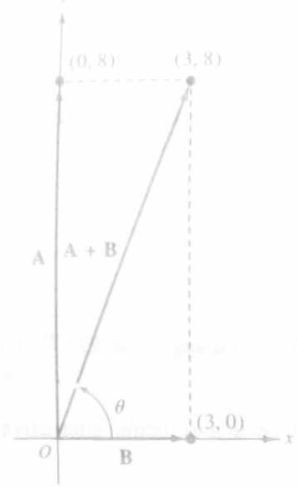


FIGURA 10.13

Solución *Véase* la Figura 10.13, que muestra las representaciones de posición de los vectores **A**, **B** y **A** + **B**. El vector **A** representa la velocidad de la lancha relativa al agua. Como **A** tiene una magnitud de 8 y un ángulo director de 90°, $\mathbf{A} = \langle 0, 8 \rangle$. El vector **B** representa la velocidad de la corriente en relación con tierra firme, la cual tiene una magnitud de 3 y un ángulo director de 0°. De modo que $\mathbf{B} = \langle 3, 0 \rangle$. La resultante de **A** y **B** es **A** + **B**, la cual es la velocidad de la lancha en relación con tierra firme.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \langle 0, 8 \rangle + \langle 3, 0 \rangle \\ &= \langle 3, 8 \rangle \\ \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| &= \sqrt{3^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{73} \\ &\approx 8.54 \end{aligned}$$

Si θ es el ángulo director de **A** + **B**, entonces

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tfrac{8}{3} \\ \tan \theta &= 2.667 \\ \theta &= 69.4° \end{aligned}$$

Conclusión: La lancha navega con una rapidez de 8.54 mi/h en relación con tierra firme en la dirección de 69.4° con respecto a la ribera sur o, equivalentemente, un curso de 20.6°. ◂

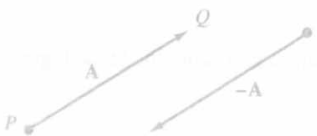


FIGURA 10.14

Si **A** es el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$, entonces el **negativo** de **A**, denotado por **−A**, es el vector $\langle -a_1, -a_2 \rangle$. Si el segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es una representación del vector **A**, entonces el segmento rectilíneo dirigido $\overrightarrow{QP}$ es una representación de **−A**. Cualquier segmento rectilíneo dirigido que sea paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que tenga la misma longitud que $\overrightarrow{PQ}$ y sentido contrario al de $\overrightarrow{PQ}$, es también una representación de **−A**. *Véase* la Figura 10.14.

Ahora se definirá la sustracción de dos vectores.

DEFINICIÓN **Diferencia de dos vectores**

La **diferencia** de dos vectores **A** y **B**, denotada por **A** − **B**, es el vector que se obtiene al sumar **A** al negativo de **B**; esto es,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ entonces $-\mathbf{B} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$, y de la definición

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

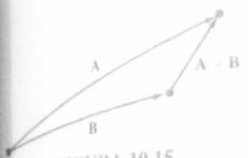


FIGURA 10.15

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5**

Si $\mathbf{A} = \langle 4, -2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 6, -3 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \langle 4, -2 \rangle - \langle 6, -3 \rangle \\ &= \langle 4, -2 \rangle + \langle -6, 3 \rangle \\ &= \langle -2, 1 \rangle \end{aligned}$$

◁

Para interpretar geométricamente la diferencia de dos vectores, considere las representaciones de los vectores **A** y **B** que tienen el mismo punto inicial. Entonces, el segmento rectilíneo dirigido desde el punto final de la representación de **B** hasta el punto final de la representación de **A** es una representación de **A** − **B**. Esto obedece la ley del paralelogramo **B** + (**A** − **B**) = **A**. *Véase* la Figura 10.15.

El ejemplo siguiente implica la diferencia de dos vectores y se refiere a la navegación aérea. La *velocidad al aire* de un avión es su velocidad con relación al aire en que navega, y la *velocidad a tierra* es su velocidad considerada con respecto al suelo. Cuando hay viento, la velocidad del avión relativa al suelo es la resultante del vector que representa la velocidad del viento y el vector representante de la velocidad del avión relativa al aire.

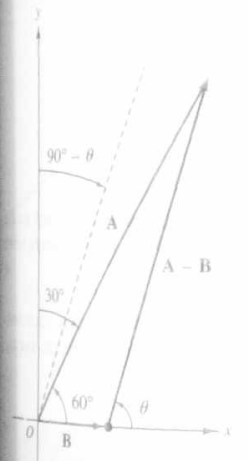


FIGURA 10.16

▶ **EJEMPLO 4** ***Solución del enunciado de un problema que implica vectores***

Un avión vuela con una velocidad al aire de 300 mi/h. Si el aire sopla hacia el este a 50 mi/h, ¿cuál debe ser el enfilamiento del avión para que su curso sea de 30°? ¿Cuál sería la velocidad a tierra del avión si vuela con este curso?

Solución Consulte la Figura 10.16, la cual muestra las representaciones de posición de los vectores **A** y **B** así como la de **A** − **B**. El vector **A** representa la velocidad del avión relativa al suelo con un curso de 30°. El ángulo director de **A** es 60°, el cual es 90° − 30°. El vector **B** representa la velocidad del viento. Como **B** tiene una magnitud de 50 y un ángulo director de 0°, entonces $\mathbf{B} = \langle 50, 0 \rangle$. El vector **A** − **B** representa la velocidad del avión relativa al aire; así, $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = 300$. Sea θ el ángulo director de **A** − **B**. De la Figura 10.16 se obtiene el triángulo mostrado en la Figura 10.17. Al aplicar la ley de los senos a este triángulo, se obtiene

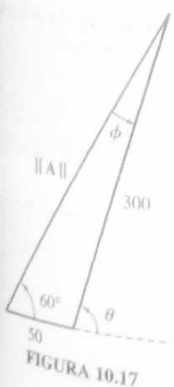


FIGURA 10.17

$$\frac{\operatorname{sen}\phi}{50} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{300}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{50 \operatorname{sen} 60^\circ}{300}$$

$$\operatorname{sen}\phi = 0.1443$$

$$\phi = 8.3^\circ$$

Por tanto,

$$\theta = 60^\circ + 8.3^\circ$$

$$= 68.3^\circ$$

Al aplicar otra vez ley de los senos al triángulo de la Figura 10.17, se tiene

$$\frac{\|\mathbf{A}\|}{\operatorname{sen}(180^\circ - \theta)} = \frac{300}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$\|\mathbf{A}\| = \frac{300 \operatorname{sen} 111.7^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$\|\mathbf{A}\| = 322$$

Conclusión: El enfilamiento del avión debe ser $90^\circ - \theta$, el cual es de 21.7° y si el avión vuela con este curso, su velocidad a tierra será de 322 mi/h. ◂

La *multiplicación por un escalar* es otra operación con vectores. A continuación se dará la definición de la multiplicación de un vector por un escalar.

DEFINICIÓN **Multiplicación por un escalar**

Si c es un escalar y $\mathbf{A}$ es el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$, entonces el **producto** de c y $\mathbf{A}$, denotado por $c\mathbf{A}$, es un vector y está dado por

$$c\mathbf{A} = c\langle a_1, a_2 \rangle$$

$$= \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Si $\mathbf{A} = \langle 4, -5 \rangle$, entonces

$$3\mathbf{A} = 3\langle 4, -5 \rangle$$

$$= \langle 12, -15 \rangle$$

◂

▸ EJEMPLO 5 *Multiplicación de un vector por el escalar 0 y multiplicación del vector cero por un escalar*

Si **A** es cualquier vector y c es cualquier escalar muestre que

(a) $0(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ **(b)** $c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Solución Se aplica la definición de multiplicación por un escalar.

$$\begin{aligned} \textbf{(a)}\ 0(\mathbf{A}) &= 0\langle a_1, a_2\rangle & \textbf{(b)}\ c(\mathbf{0}) &= c\langle 0, 0\rangle \\ &= \langle 0, 0\rangle & &= \langle 0, 0\rangle \\ &= \mathbf{0} & &= \mathbf{0} \end{aligned}$$ ◂

La magnitud del vector $c\mathbf{A}$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{A}\| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ &= |c|\|\mathbf{A}\| \end{aligned}$$

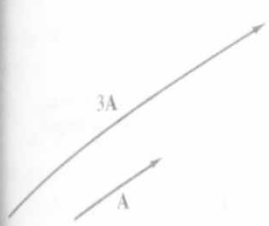


FIGURA 10.18

Por consiguiente, la magnitud de $c\mathbf{A}$ es el valor absoluto de c por la magnitud de **A.**

Las figuras 10.18 y 10.19 muestran la interpretación geométrica del vector $c\mathbf{A}$. Si $c > 0$, entonces $c\mathbf{A}$ es un vector cuya representación tiene una longitud de c veces la magnitud de **A** y la misma dirección que **A;** un ejemplo de esto se observa en la Figura 10.18, donde $c = 3$. Si $c < 0$, entonces $c\mathbf{A}$ es un vector cuya representación tiene una longitud que es $|c|$ veces la magnitud de **A** y con dirección opuesta a la de **A.** Esto se muestra en la Figura 10.19, donde $c = -\frac{1}{2}$.

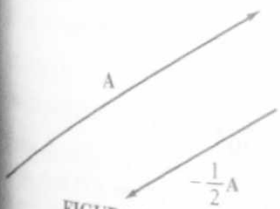


FIGURA 10.19

Ahora se considerará un vector arbitrario y debe escribirse en una forma especial.

$$\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle$$

$$\langle a_1, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle \qquad (2)$$

Como la magnitud de cada uno de los vectores $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ es una unidad, se denominan **vectores unitarios.** A continuación se introduce la notación para estos dos vectores unitarios:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

Con esta notación, se tiene de (2)

$$\boxed{\langle a_1, a_2\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}} \qquad (3)$$

FIGURA 10.20

Las representaciones de posición de los vectores **i** y **j** se muestran en la Figura 10.20.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

De (3),

$$\langle 3, -4 \rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$ ◂

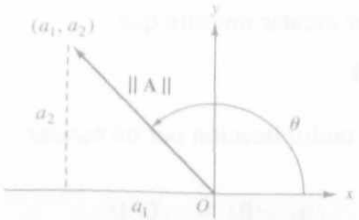


FIGURA 10.21

Sea $\mathbf{A}$ el vector $\langle a_1, a_2 \rangle$ y θ el ángulo director de $\mathbf{A}$. *Véase* la Figura 10.21, donde el punto (a_1, a_2) está en el segundo cuadrante y la representación de posición de $\mathbf{A}$ se muestra. Como $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, $a_1 = \|\mathbf{A}\| \cos\theta$ y $a_2 = \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen}\theta$, entonces puede escribirse

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| \cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{A}\| \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \tag{4}$$

Esta ecuación expresa el vector $\mathbf{A}$ en términos de su magnitud, ángulo director y de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

▸ EJEMPLO 6 *Expresión de un vector en términos de su magnitud y el seno y coseno de su ángulo director*

Exprese el vector $\langle -5, -2 \rangle$ en la forma de (4).

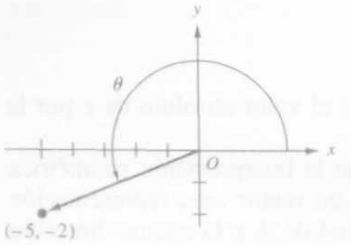


FIGURA 10.22

Solución Consulte la Figura 10.22, la cual muestra la posición del vector $\langle -5, -2 \rangle$.

$$\|\langle -5, -2 \rangle\| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \qquad \cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} \qquad \operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{29}}$$

Por tanto, de (4) se tiene

$$\langle -5, -2 \rangle = \sqrt{29}\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$ ◂

EJERCICIOS 10.1

En los ejercicios 1 y 2, dibuje la representación de posición del vector $\mathbf{A}$*, así como la representación particular que pasa por el punto P; encuentre la magnitud de* $\mathbf{A}$*.*

1. (a) $\mathbf{A} = \langle 3, 4 \rangle$, $P = (2, 1)$
   (b) $\mathbf{A} = \langle 0, -2 \rangle$, $P = (-3, 4)$
2. (a) $\mathbf{A} = \langle -2, 5 \rangle$, $P = (3, -4)$
   (b) $\mathbf{A} = \langle 4, 0 \rangle$, $P = (2, 6)$

En los ejercicios 3 y 4, calcule el vector $\mathbf{A}$ *que tiene a* $\overrightarrow{PQ}$ *como una representación. Dibuje* $\overrightarrow{PQ}$ *y la representación de posición de* $\mathbf{A}$*.*

3. (a) $P = (3, 7)$, $Q = (5, 4)$
   (b) $P = (-3, 5)$, $Q = (-5, -2)$
4. (a) $P = (5, 4)$, $Q = (3, 7)$
   (b) $P = (-5, -3)$, $Q = (0, 3)$

En los ejercicios 5 y 6, encuentre el punto S tal que $\overrightarrow{PQ}$ *y* $\overrightarrow{RS}$ *son cada uno representaciones del mismo vector.*

5. (a) $P = (2, 5)$, $Q = (1, 6)$, $R = (-3, 2)$
   (b) $P = (0, 3)$, $Q = (5, -2)$, $R = (7, 0)$
6. (a) $P = (-1, 4)$, $Q = (2, -3)$, $R = (-5, -2)$
   (b) $P = (-2, 0)$, $Q = (-3, -4)$, $R = (4, 2)$

En los ejercicios 7 y 8, encuentre la suma de los pares de vectores e ilustre el proceso geométricamente.

7. (a) $\langle 2, 4\rangle, \langle -3, 5\rangle$ (b) $\langle -3, 0\rangle, \langle 4, -5\rangle$

8. (a) $\langle 0, 3\rangle, \langle -2, 3\rangle$ (b) $\langle 2, 5\rangle, \langle 2, 5\rangle$

En los ejercicios 9 y 10, reste el segundo vector del primero e ilustre el proceso geométricamente.

9. (a) $\langle 4, 5\rangle, \langle -3, 2\rangle$ (b) $\langle -3, -4\rangle, \langle 6, 0\rangle$

10. (a) $\langle 0, 5\rangle, \langle 2, 8\rangle$ (b) $\langle 3, 7\rangle, \langle 3, 7\rangle$

En los ejercicios 11 y 12, calcule el vector o escalar si $\mathbf{A} = \langle 2, 4\rangle$, $\mathbf{B} = \langle 4, -3\rangle$ *y* $\mathbf{C} = \langle -3, 2\rangle$.

11. (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\|\mathbf{C} - \mathbf{B}\|$ (c) $\|7\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$

12. (a) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ (b) $\|\mathbf{C}\|$ (c) $\|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}\|$

En los ejercicios 13 a 16, determine el vector o escalar indicado, si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

13. (a) $5\mathbf{A}$ (b) $-6\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (d) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|$

14. (a) $-2\mathbf{A}$ (b) $3\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ (d) $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$

15. (a) $\|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ (b) $5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$
(c) $\|5\mathbf{A} - 6\mathbf{B}\|$ (d) $\|5\mathbf{A}\| - \|6\mathbf{B}\|$

16. (a) $\|\mathbf{A}\| - \|\mathbf{B}\|$ (b) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$
(c) $\|3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}\|$ (d) $\|3\mathbf{B}\| - \|2\mathbf{A}\|$

En los ejercicios 17 a 20, determine los componentes del vector cuya magnitud y ángulo director se indican.

17. $18; \frac{1}{3}\pi$ 18. $24; 41.2°$

19. $35; 250°$ 20. $110; \frac{1}{3}\pi$

En los ejercicios 21 a 24, escriba el vector dado en la forma $r(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$, *donde* r *es la magnitud y* θ *el ángulo director.*

21. (a) $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (b) $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

22. (a) $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (b) $2\sqrt{5}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

23. (a) $-4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$ (b) $-16\mathbf{i}$

24. (a) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ (b) $2\mathbf{j}$

Los ejercicios 25 a 35 son enunciados de problemas que implican vectores. Asegúrese de escribir una conclusión.

25. Dos fuerzas de magnitudes de 60 lb y 80 lb forman un ángulo de 30° entre sí y se aplican a un cuerpo en el mismo punto. Encuentre (**a**) la magnitud de la fuerza resultante y (**b**) con precisión de grados, el ángulo que forma la resultante con la fuerza de 60 lb. Utilice el método del ejemplo 2.

26. Dos fuerzas de magnitudes de 340 lb y 475 lb forman un ángulo de 34.6° entre sí y se aplican a un cuerpo en el mismo punto. Encuentre (**a**) la magnitud de la fuerza resultante y (**b**) con precisión de décimos de grado, el ángulo que forma la resultante con la fuerza de 475 lb. Emplee el método del ejemplo 2.

27. Haga el ejercicio 25 mediante el método del ejemplo ilustrativo 4.

28. Realice el ejercicio 26 mediante el método del ejemplo ilustrativo 4.

29. Una fuerza de 112 lb de magnitud y una de 84 lb se aplican a un cuerpo en el mismo punto, donde la fuerza resultante tiene una magnitud de 162 lb. Halle, con precisión de décimos de grado, el ángulo formado por la resultante y la fuerza de 112 lb.

30. Una fuerza de 22 lb y otra de 34 lb se aplican a un cuerpo en el mismo punto y forman un ángulo θ entre sí. Si la fuerza resultante tiene una magnitud de 46 lb, determine θ con precisión de grados.

31. Un nadador que puede nadar a una velocidad de 1.5 mi/h con respecto al agua, parte de la ribera sur de un río y se dirige al norte directamente a través del río. Si la corriente del río fluye hacia el este a 0.8 mi/h: (**a**) ¿En qué dirección va el nadador? (**b**) ¿Cuál es la velocidad del nadador con respecto a tierra? (**c**) Si la distancia a través del río es de 1 milla, ¿qué tan lejos río abajo el nadador alcanza la otra orilla?

32. Suponga que el nadador del ejercicio 31 desea alcanzar el punto directamente al norte a través del río. (**a**) ¿En qué dirección debe dirigirse el nadador? (**b**) ¿Cuál será la velocidad del nadador con respecto a tierra si elige esta dirección?

33. En un avión que tiene una velocidad al aire de 250 mi/h, un piloto desea volar hacia el norte. Si el viento sopla hacia el este a 60 mi/h, (**a**) ¿cuál debe ser el enfilamiento del avión? (**b**) ¿Cuál será la velocidad del avión con respecto al suelo si vuela con este curso?

34. Un avión tiene una velocidad al aire de 350 mi/h, para que el curso del avión sea el norte, su enfilamiento debe ser de 340°. Si el viento sopla del oeste,

(a) ¿cuál es la magnitud de su velocidad? (b) ¿Cuál es la velocidad del avión con respecto al suelo?

35. Una lancha puede desplazarse a 15 nudos con respecto al agua. En un río cuya corriente es de 3 nudos hacia el oeste, la lancha tiene un enfilamiento hacia el sur. ¿Cuál es la velocidad de la lancha con respecto a tierra y cuál es su curso?

36. Sean $\overrightarrow{PQ}$ una representación del vector $\mathbf{A}$, $\overrightarrow{QR}$ una representación de $\mathbf{B}$ y $\overrightarrow{RS}$ una representación del vector $\mathbf{C}$. Pruebe que si $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{RS}$ son lados de un triángulo, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

37. Explique la diferencia entre cantidad vectorial y cantidad escalar. En la explicación emplee la velocidad y la rapidez como ejemplos.

10.2 FUNCIONES VECTORIALES Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

OBJETIVOS

1. **Definir una función vectorial.**
2. **Determinar el dominio de una función vectorial.**
3. **Aprender acerca de ecuaciones paramétricas.**
4. **Dibujar la gráfica de una ecuación vectorial o de su par de ecuaciones paramétricas equivalente.**
5. **Encontrar una ecuación cartesiana de una gráfica a partir de su ecuación vectorial o del par de ecuaciones paramétricas equivalente.**
6. **Trazar la gráfica de una ecuación vectorial o de su par de ecuaciones paramétricas equivalente.**
7. **Resolver enunciados de problemas que implican el movimiento de un proyectil.**
8. **Deducir las ecuaciones paramétricas de una cicloide.**

Suponga que una partícula se desplaza de modo que las coordenadas (x, y) de su posición en cualquier instante t están dadas por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Entonces, para cada número t en el dominio común de f y g existe un vector $f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, y los puntos finales de las representaciones de posición de estos vectores describen la curva C recorrida por la partícula. Esto lleva a considerar una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo contradominio es un conjunto de vectores. Dicha función se denomina *función de valor vectorial* (o de forma breve, *función vectorial*)

DEFINICIÓN **Función vectorial**

Sean f y g dos funciones reales de variable real t. Entonces, para cada número t en el dominio común de f y g existe un vector $\mathbf{R}$ definido por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

y $\mathbf{R}$ se denomina **función vectorial.**

▶ EJEMPLO 1 *Determinación del dominio de una función vectorial*

Determine el dominio de la función vectorial **R** definida por

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-2}\,\mathbf{i} + (t-3)^{-1}\mathbf{j}$$

Solución Sean

$$f(t) = \sqrt{t-2} \quad \text{y} \quad g(t) = (t-3)^{-1}$$

El dominio de **R** es el conjunto de valores de t para los cuales tanto $f(t)$ como $g(t)$ están definidas. Como $f(t)$ está definida para $t \geq 2$ y $g(t)$ está definida para todos los números reales excepto 3, el dominio de **R** es $\{t \mid t \geq 2, t \neq 3\}$. ◀

La ecuación $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ se denomina **ecuación vectorial,** y define una curva C. La misma curva C también está definida por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t) \tag{1}$$

que reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas** de C. La variable t es un **parámetro.** La curva C también se denomina **gráfica;** esto es, el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen (1) es la gráfica de la función vectorial **R.**

Una ecuación vectorial de una curva, así como sus ecuaciones paramétricas, dan a la curva una dirección en cada punto. Esto es, si se piensa que la curva es descrita por una partícula, se puede considerar el sentido positivo, a lo largo de la curva, como el sentido en el cual se mueve la partícula cuando el parámetro t se incrementa. En un caso como éste, t puede tomarse como la medida del tiempo, y el vector $\mathbf{R}(t)$ se denomina **vector de posición.** Algunas veces a $\mathbf{R}(t)$ se le llama **radio vector.**

Si el parámetro t se elimina del par de ecuaciones (1), se obtienen una ecuación en x y y, denominada **ecuación cartesiana** de C.

▶ EJEMPLO 2 *Dibujo de la gráfica de una ecuación vectorial y determinación de la ecuación cartesiana de la gráfica*

Dada la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

(a) dibuje la gráfica de esta ecuación y **(b)** determine una ecuación cartesiana de la gráfica.

Solución

(a) El dominio de **R** es el conjunto de todos los números reales. Los valores de x y y para valores especiales de t pueden tabularse. Se determinará la magnitud del vector de posición. Para cada t,

$$\|\mathbf{R}(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t}$$
$$= 2\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}$$
$$= 2$$

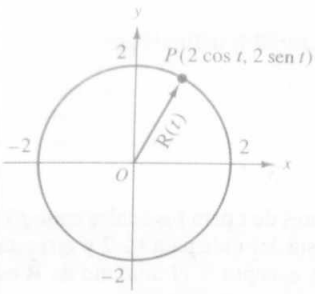


FIGURA 10.23

Por tanto, el punto final de la representación de cada vector $\mathbf{R}(t)$ está a dos unidades del origen. Si t toma todos los valores en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$, se obtiene una circunferencia que tiene su centro en el origen y radio 2. Ésta es toda la gráfica porque cualquier valor de t dará un punto de dicha circunferencia. La circunferencia se muestra en la Figura 10.23. Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son

$$x = 2\cos t \quad \text{y} \quad y = 2\operatorname{sen} t$$

(b) Se puede determinar una ecuación cartesiana de la gráfica eliminando t de las dos ecuaciones paramétricas, al elevar al cuadrado ambos miembros de cada ecuación y sumar se obtiene

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\operatorname{sen} t)^2$$
$$x^2 + y^2 = 4(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

En el ejemplo 2 para la gráfica de la ecuación vectorial dada, o el par de ecuaciones paramétricas equivalente, se elimina el parámetro t y se obtiene una ecuación cartesiana de la gráfica. Con frecuencia no puede eliminarse el parámetro y, por tanto, debe obtenerse la gráfica directamente de las ecuaciones paramétricas.

A fin de dibujar la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas, es útil encontrar las rectas tangentes de la gráfica. En general, no puede realizarse esto sin aplicar técnicas de Cálculo. Aquí se ha restringido el estudio a localizar puntos cuyas coordenadas x y y se encuentran a partir de los valores del parámetro, y a determinar ciertas características de la gráfica partiéndose de la forma de las ecuaciones paramétricas.

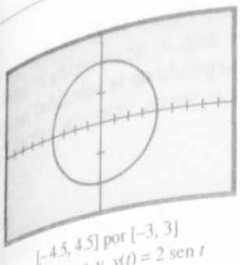
Para trazar la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas en la calculadora gráfica o graficadora, debe consultarse el manual del usuario para cada graficadora particular. Algunas graficadoras requieren que se active el modo paramétrico. Otras, pueden utilizar un formato de trazado paramétrico. En cualquier caso, se necesitará introducir a la graficadora las ecuaciones que definen a $x(t)$ y $y(t)$. Además, se deben indicar los valores mínimo y máximo de t a considerar. Se denotarán estos valores por t mín y t máx.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

A fin de trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2 se introduce

$$x(t) = 2\cos t \quad \text{y} \quad y(t) = 2\operatorname{sen} t$$

y sean t mín = 0 y t máx = 2π. En el rectángulo de inspección de [−4.5, 4.5] por [−3, 3] se obtiene la circunferencia mostrada en la Figura 10.24. ◀



[−4.5, 4.5] por [−3, 3]
$x(t) = 2\cos t$ y $y(t) = 2\operatorname{sen} t$
FIGURA 10.24

▸ EJEMPLO 3 *Dibujo de la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas y determinación de una ecuación cartesiana de la gráfica*

(a) Dibuje la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 3t^2 \quad \text{y} \quad y = 4t^3$$

y compruebe la gráfica en la graficadora. (b) Determine una ecuación cartesiana de la gráfica.

Solución

(a) Observe que x es no negativa. Así, la gráfica se restringe a los cuadrantes primero y cuarto. La Tabla 1 presenta valores de x y y para ciertos valores de t. Se localizan los puntos que tienen las coordenadas x y y correspondientes y se obtiene la gráfica de la Figura 10.25. La localización de puntos cercanos al origen nos induce a creer que la recta tangente en el origen es horizontal, pero no podemos asegurar que éste sea el caso sin técnicas de Cálculo.

La Figura 10.26 muestra la gráfica trazada en el rectángulo de inspección de [0, 3] por [−1, 1] con t mín = −2 y t máx = 2.

Tabla 1

t	x	y
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	3	4
2	12	32
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
−1	3	−4
−2	12	−32

(b) De las dos ecuaciones paramétricas, se obtiene $x^3 = 27t^6$ y $y^2 = 16t^6$. Al resolver cada una de estas ecuaciones para t, se tiene

$$t^6 = \frac{x^3}{27} \quad \text{y} \quad t^6 = \frac{y^2}{16}$$

Si se igualan estos dos valores para t^6, se obtiene

$$\frac{x^3}{27} = \frac{y^2}{16}$$
$$16x^3 = 27y^2$$

la cual es la ecuación cartesiana deseada. ◀

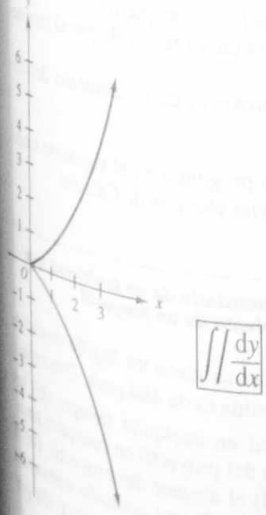
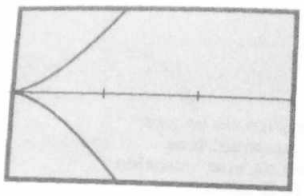


FIGURA 10.25

En Cálculo, los vectores se emplean para deducir ecuaciones del movimiento de un proyectil bajo la suposición de que el proyectil se desplaza en un plano vertical, en donde la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la originada por la gravedad. Se despreciará la fuerza atribuida a la resistencia del aire, la cual para cuerpos pesados que se desplazan a velocidades pequeñas, no ejerce un efecto notable. No puede presentarse una discusión completa aquí, sin embargo, se dará una introducción a este tema.

El sentido positivo se considera vertical hacia arriba y horizontal hacia la derecha, y los ejes coordenados se colocan de manera que el



[0, 3] por [−1, 1]
$x(t) = 3t^2$ y $y(t) = 4t^3$
FIGURA 10.26

arma esté ubicada en el origen. Consulte la Figura 10.27. Si el proyectil se dispara desde un arma que tiene un ángulo de elevación α medido en radianes y el número de pies por segundo de la velocidad inicial o *velocidad de salida* se denota por v_0, el vector velocidad inicial $\mathbf{V}_0$ está dado por

$$\mathbf{V}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j} \tag{2}$$

Sean t segundos el tiempo transcurrido desde que el arma fue disparada, x pies la distancia horizontal del proyectil desde el punto de partida y y pies la distancia vertical del proyectil a los t segundos. Entonces, si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición del proyectil a los t segundos, se demuestra en Cálculo que

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2} gt^2 \mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t \tag{3}$$

donde g pie/s^2 es la constante de aceleración debida a la gravedad. Un valor aproximado para g, al nivel del mar, es 32. Al sustituir el valor de $\mathbf{V}_0$ de (2) en (3) se obtiene

$$\mathbf{R}(t) = -\tfrac{1}{2} gt^2 \mathbf{j} + (v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j})t$$

$$\mathbf{R}(t) = tv_0 \cos \alpha \mathbf{i} + (tv_0 \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2)\mathbf{j} \tag{4}$$

La ecuación (4) da el vector de posición del proyectil a los t segundos. A partir de esta ecuación se puede explicar el movimiento del proyectil. Generalmente nos interesan las siguientes preguntas:

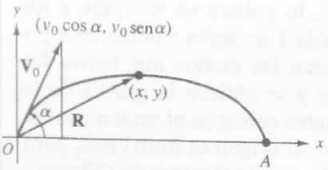


FIGURA 10.27

1. ¿Cuál es el alcance del proyectil? El alcance es la distancia $|OA|$ a lo largo del eje x. *Véase* la Figura 10.27.
2. ¿Cuál es el tiempo total de recorrido, es decir, el tiempo que tarda el proyectil para ir de O a A?
3. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?
4. ¿Cuál es la ecuación cartesiana de la curva recorrida por el proyectil?
5. ¿Cuál es el vector velocidad del proyectil en el momento del impacto?

Se contestarán las primeras cuatro preguntas en el siguiente ejemplo. Para resolver la última son necesarias técnicas de Cálculo.

► EJEMPLO 4 *Solución del enunciado de un problema que implica movimiento de un proyectil*

Se dispara un proyectil con un arma, la cual tiene un ángulo de elevación de $\frac{1}{6}\pi$ radianes. Su velocidad de salida es de 480 pie/s. Determine: **(a)** el vector de posición del proyectil en cualquier tiempo; **(b)** las ecuaciones paramétricas de la posición del proyectil en cualquier tiempo; **(c)** el tiempo total de recorrido; **(d)** el alcance del proyectil; **(e)** la altura máxima alcanzada por el proyectil; **(f)** una ecuación cartesiana de la curva recorrida por el proyectil. **(g)** Trace la curva recorrida por el proyectil.

Solución De (2) con $v_0 = 480$ y $\alpha = \frac{1}{6}\pi$, el vector velocidad inicial es

$$\mathbf{V}_0 = 480 \cos \tfrac{1}{6}\pi\mathbf{i} + 480 \operatorname{sen} \tfrac{1}{6}\pi\mathbf{j}$$
$$= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 240\mathbf{j}$$

(a) Se puede obtener el vector de posición a los t segundos al aplicar (4); así,

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

Al considerar $g = 32$ se tiene

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - 16t^2)\mathbf{j} \qquad (5)$$

(b) Si (x, y) es la posición del proyectil a los t segundos, entonces las ecuaciones paramétricas de la posición del proyectil son

$$x = 240\sqrt{3}t \quad \text{y} \quad y = 240t - 16t^2 \qquad (6)$$

(c) Para determinar el tiempo de recorrido, se debe encontrar t cuando $y = 0$. Al considerar $y = 0$ en la segunda ecuación de (6), se tiene

$$240t - 16t^2 = 0$$
$$t(240 - 16t) = 0$$
$$t = 0 \quad t = 15$$

El valor $t = 0$ corresponde al momento de dispararse el proyectil. El valor $t = 15$ proporciona el tiempo de recorrido.

Conclusión: El tiempo total de recorrido es 15 s.

(d) Para encontrar el alcance, se determina x cuando $t = 15$. De la primera ecuación de (6) con $t = 15$, se obtiene $x = 3\,600\sqrt{3}$.

Conclusión: El alcance es $3\,600\sqrt{3}$ pie $\approx$ 6 235 pie.

(e) La altura máxima se alcanza cuando y tiene su máximo valor. De la segunda ecuación de (6)

$$y = 240t - 16t^2$$

Debido a que la gráfica de esta ecuación es una parábola abierta hacia abajo, el valor máximo de y se tiene en el vértice, el cual, del Teorema 1 de la Sección 4.3, está en $t = -\frac{240}{2(-16)}$ o en $t = \frac{15}{2}$, y es un medio del tiempo total de recorrido. Cuando $t = \frac{15}{2}$, $y = 900$.

Conclusión: La altura máxima alcanzada es 900 pie.

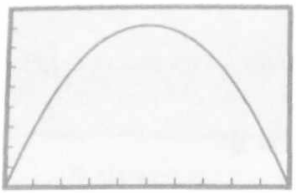
(f) Para encontrar la ecuación cartesiana de la curva recorrida por el proyectil, se elimina t entre las ecuaciones paramétricas (6). De la primera de estas ecuaciones, $t = x/(240\sqrt{3})$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, se tiene

$$y = 240\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right) - 16\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{10\,800}x^2$$

la cual es una ecuación de una parábola. Puesto que t se restringió al intervalo [0, 15], la curva recorrida por el proyectil es la porción de la parábola en dicho intervalo.

(g) Se traza la curva recorrida por el proyectil empleando las ecuaciones paramétricas (6) con t mín = 0 y t máx = 15. Como el valor máximo de x es 6 235 y el valor máximo de y es 900 se elige el rectángulo de inspección de [0, 6 240] por [0, 1 000]. Así, se obtiene la Figura 10.28. ◀



[0, 6 240] por [0, 1 000]
$x(t) = 240\sqrt{3}\,t$ y $y(t) = 240t - 16t^2$
FIGURA 10.28

Ahora se mostrará cómo las ecuaciones paramétricas pueden emplearse para definir una curva que está descrita por un movimiento físico. La curva considerada es la **cicloide,** la cual se describe por un punto de una circunferencia a medida que ésta rueda sobre una recta. Suponga que la circunferencia tiene radio a. Sea el eje x la recta fija sobre la que rueda la circunferencia, siendo el origen uno de los puntos en los cuales el punto dado P, hace contacto con el eje x. *Véase* la Figura 10.29, la cual muestra la circunferencia después de haber rodado un ángulo de t radianes. De la Figura 10.29, donde $\mathbf{V}(\overrightarrow{OT})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{TA})$, $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ y $\mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$ son los vectores que tienen los segmentos rectilíneos dirigidos indicados como representaciones, se tiene

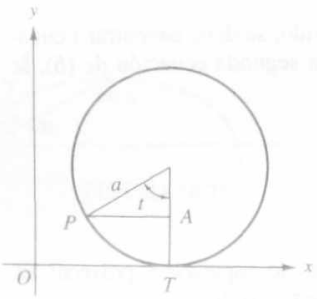


FIGURA 10.29

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OT}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{TA}) + \mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) \tag{7}$$

La longitud del arco PT es $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{OT})\| = at$. Como la dirección de $\mathbf{V}(\overrightarrow{OT})$ es a lo largo del eje x,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{OT}) = at\,\mathbf{i} \tag{8}$$

También, $\|\mathbf{V}(\overrightarrow{TA})\| = a - a\cos t$. Debido a que la dirección de $\mathbf{V}(\overrightarrow{TA})$ es la misma que la dirección de $\mathbf{j}$,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{TA}) = a(1 - \cos t)\mathbf{j} \tag{9}$$

$\|\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})\| = -a \operatorname{sen} t$, y la dirección de $\mathbf{V}(\overrightarrow{AP})$ es la misma que la dirección de $-\mathbf{i}$; por tanto,

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) = -a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i}$$

Al sustituir de las ecuaciones (8) y (9) en (7) se obtiene

$$at\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} - a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} = \mathbf{V}(\overrightarrow{OP})$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(\overrightarrow{OP}) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$$

Ésta es la ecuación vectorial de la cicloide. En consecuencia, las ecuaciones de la cicloide son

$$x = a(t - \operatorname{sen} t) \quad \text{y} \quad y = a(1 - \cos t) \tag{10}$$

donde t es cualquier número real. En la Figura 10.30 se muestra una porción de la cicloide.

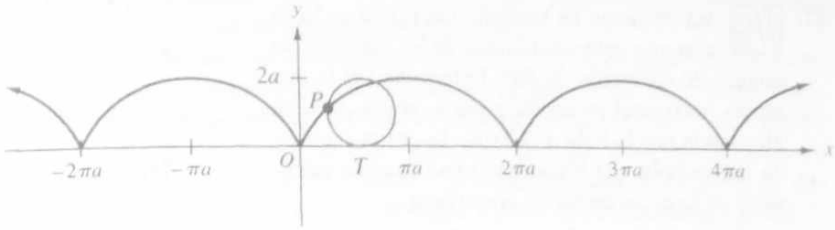


FIGURA 10.30

EJERCICIOS 10.2

En los ejercicios 1 a 10, halle el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{R}(t) = (1/t)\mathbf{i} + \sqrt{4 - t}\,\mathbf{j}$
2. $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{t^2 + 1}\,\mathbf{j}$
3. $\mathbf{R}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$
4. $\mathbf{R}(t) = (e^t + 1)^{-1}\mathbf{i} + (e^t - 1)^{-1}\mathbf{j}$
5. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \tan t\,\mathbf{j}$
6. $\mathbf{R}(t) = \sec t\,\mathbf{i} + \csc t\,\mathbf{j}$
7. $\mathbf{R}(t) = (\operatorname{sen}^{-1} t)\mathbf{i} + (\cos^{-1} t)\mathbf{j}$
8. $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 1)\mathbf{i} + (\tan^{-1} t)\mathbf{j}$
9. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\,\mathbf{i} + \sqrt{t^2 + 2t - 8}\,\mathbf{j}$
10. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t - 4}\,\mathbf{i} + \sqrt{4 - t}\,\mathbf{j}$

En los ejercicios 11 a 16, dibuje la gráfica de la ecuación vectorial y encuentre una ecuación cartesiana de la gráfica.

11. $\mathbf{R}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
12. $\mathbf{R}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
13. $\mathbf{R}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad t \in [0, \pi]$
14. $\mathbf{R}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} \quad t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$
15. $\mathbf{R}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$
16. $\mathbf{R}(t) = (1 - t^2)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$

En los ejercicios 17 a 20, (a) dibuje la gráfica de las ecuaciones paramétricas y verifique la gráfica en la graficadora; (b) halle una ecuación cartesiana de la gráfica.

17. $x = 3 - 2t,\ y = 4 + t$
18. $x = 2t - 5,\ y = t + 1$
19. $x = 2t^3,\ y = 4t^2$
20. $x = 2t^2,\ y = 3t^3$

En los ejercicios 21 y 22, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de las ecuaciones paramétricas en un rectángulo de inspección apropiado para t en el intervalo indicado; (b) encuentre una ecuación cartesiana de la gráfica. (Sugerencia: aplique la identidad pitagórica fundamental.)

21. $x = 9\cos t$ y $y = 4\operatorname{sen} t;\ t \in [0, 2\pi]$
22. $x = 4\cos t$ y $y = 25\operatorname{sen} t;\ t \in [0, 2\pi]$

$\iint \frac{dy}{dx}$ *En los ejercicios 23 y 24, un proyectil se mueve de modo que las coordenadas de su posición a los t segundos están dadas por las ecuaciones paramétricas. Determine: (a) el tiempo total de recorrido; (b) el alcance del proyectil; (c) la altura máxima alcanzada por el proyectil; (d) una ecuación cartesiana de la curva recorrida por el proyectil. (e) Trace la curva recorrida por el proyectil.*

23. $x = 60t,\ y = 8t - 16t^2$
24. $x = 40t,\ y = 56t - 16t^2$
25. $\iint \frac{dy}{dx}$ Un proyectil es disparado desde un arma con un ángulo de elevación de $\frac{1}{4}\pi$ radianes y su velocidad de salida es 2 500 pie/s. Halle: **(a)** el vector de posición del proyectil en cualquier instante; **(b)** las ecuaciones paramétricas de la posición del proyectil en cualquier instante; **(c)** el tiempo total de recorrido; **(d)** el alcance del proyectil; **(e)** la altura máxima alcanzada por el proyectil, **(f)** una ecuación cartesiana de la curva recorrida por el proyectil. **(g)** Trace la curva que recorre el proyectil.

26. Haga el ejercicio 25, si el ángulo de elevación es de $\frac{1}{3}\pi$ radianes y la velocidad de salida es de 160 pie/s.

27. En un juego de béisbol, una pelota se batea con una velocidad inicial de 98 pie/s con un ángulo de elevación de 58°. Determine (a) la distancia horizontal recorrida y (b) la altura máxima alcanzada por la bola. (c) Trace la curva recorrida por la bola. (d) Encuentre una ecuación cartesiana de la curva recorrida por la bola.

28. La velocidad de disparo de un arma es de 160 pie/s. ¿A qué ángulo de elevación debe dispararse el arma a fin de que un proyectil dé en un objeto que se encuentra al mismo nivel del arma y a una distancia de 400 pie?

29. Una cicloide es generada por la trayectoria de un punto de una circunferencia de 4 unidades de radio que rueda a lo largo del eje x. (a) Escriba las ecuaciones paramétricas de la cicloide donde el parámetro t es el número de radianes del ángulo que ha rodado la circunferencia. (b) Dibuje la cicloide para $-2\pi \le t \le 4\pi$.

30. Haga el ejercicio 29 si el radio de la circunferencia es de 3 unidades.

31. Una *hipocicloide* es la curva trazada por un punto P de una circunferencia de radio b que rueda dentro de una circunferencia de radio a, donde $a > b$. Si el origen está en el centro de la circunferencia fija, entonces $A(a, 0)$ es uno de los puntos en que el punto P hace contacto con la circunferencia fija, B es el punto móvil de tangencia de ambas circunferencias y el parámetro t es el número de radianes del ángulo AOB, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\frac{a - b}{b}t$$

y

$$y = (a - b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a - b}{b}t$$

Trace la hipocicloide si $a = 6$ y $b = 2$ y $-2\pi \le t \le 2\pi$.

32. Si $a = 4b$ en el ejercicio 31, se tiene una *hipocicloide de cuatro cúspides*. Muestre que las ecuaciones paramétricas de esta curva son

$$x = a\cos^3 t \quad \text{y} \quad y = a\operatorname{sen}^3 t$$

Trace la hipocicloide de cuatro cúspides si $a = 3$ y $-2\pi \le t \le 2\pi$.

33. (a) Trace las ecuaciones paramétricas

$$x = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

para $-3 \le t \le 3$ en un rectángulo de inspección apropiado. (b) Siga las instrucciones del inciso (a) para las ecuaciones paramétricas

$$x = -\tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

(c) Trace los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas dados en los incisos (a) y (b) en el mismo rectángulo de inspección. (d) Describa las gráficas obtenidas en los incisos (a), (b) y (c) y discuta sus relaciones. La gráfica obtenida en el inciso (c) se denomina *hipérbola equilátera* y se estudiará en la Sección 11.2.

10.3 COORDENADAS POLARES

OBJETIVOS

1. **Definir las coordenadas polares de un punto.**
2. **Localizar un punto a partir de sus coordenadas polares y encontrar otros conjuntos de coordenadas polares del punto.**
3. **Obtener las ecuaciones que relacionan a las coordenadas cartesianas rectangulares y coordenadas polares de un punto.**
4. **Encontrar las coordenadas polares de un punto a partir de sus coordenadas cartesianas rectangulares.**
5. **Encontrar la ecuación cartesiana de una gráfica a partir de su ecuación polar.**
6. **Encontrar la ecuación polar de una gráfica a partir de su ecuación cartesiana.**

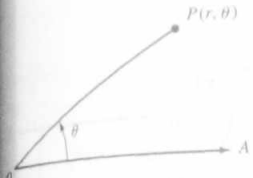


FIGURA 10.31

Hasta ahora se ha localizado un punto en el plano mediante sus coordenadas cartesianas rectangulares. Sin embargo, otros sistemas de coordenadas dan la posición de un punto en el plano. El sistema coordenado polar es uno de ellos, y es importante debido a que ciertas curvas tienen ecuaciones simples en este sistema.

Las coordenadas cartesianas son números, la abscisa y la ordenada, los cuales representan distancias dirigidas desde dos rectas fijas. Las coordenadas polares constan de una distancia dirigida y una medida de un ángulo, el cual se considera con respecto a un punto fijo y un rayo fijo (o semirrecta). El punto fijo llamado **polo** (u origen), se designa por medio de la letra O. El rayo fijo es denominado **eje polar** (o recta polar) y se representa con OA. El rayo OA generalmente se dibuja de forma horizontal y se extiende a la derecha indefinidamente. *Véase* la Figura 10.31.

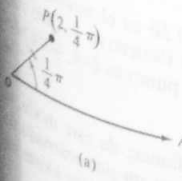
Sea P cualquier punto del plano diferente de O. Sea θ la medida en radianes del ángulo dirigido AOP, positiva cuando se mide en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj y negativo cuando es en el sentido del giro de las manecillas del reloj, teniendo como su lado inicial al rayo OA y el rayo OP como su lado terminal. Entonces, si r es la distancia no dirigida desde O a P (esto es, $r = |\overline{OP}|$), un conjunto de coordenadas polares para P está dado por r y θ, y se escriben estas coordenadas como (r, θ).

► EJEMPLO 1 *Localización de puntos a partir de sus coordenadas polares*

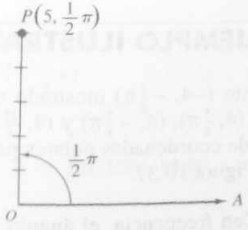
Localice cada uno de los puntos siguientes que tienen el conjunto indicado de coordenadas polares: **(a)** $(2, \frac{1}{4}\pi)$; **(b)** $(5, \frac{1}{2}\pi)$; **(c)** $(1, \frac{2}{3}\pi)$; **(d)** $(3, \frac{7}{6}\pi)$; **(e)** $(4, -\frac{1}{3}\pi)$; **(f)** $(\frac{5}{2}, -\pi)$.

Solución

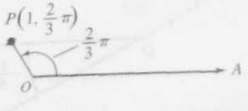
(a) El punto $(2, \frac{1}{4}\pi)$ se determina al trazar primero el ángulo cuya medida en radianes es $\frac{1}{4}\pi$, el cual tiene su vértice en el polo y su lado inicial está sobre el eje polar. El punto en el lado terminal, que está a 2 unidades del polo, es $(2, \frac{1}{4}\pi)$. *Véase* la Figura 10.32(a). De manera semejante se obtienen los puntos que se muestran en la Figura 10.32 (b)-(f). ◄



(a)

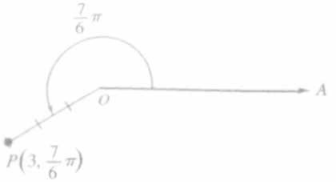


(b)

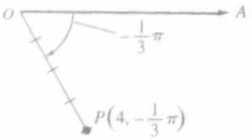


(c)

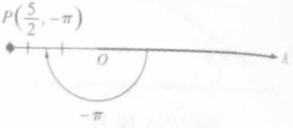
FIGURA 10.32



(d)



(e)



(f)

FIGURA 10.32

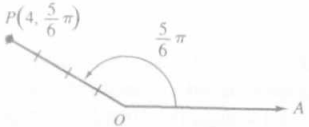


FIGURA 10.33

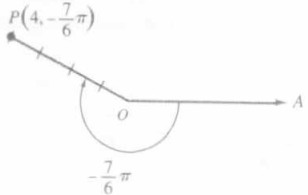


FIGURA 10.34

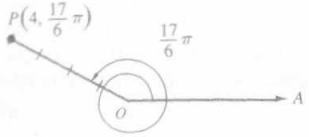


FIGURA 10.35

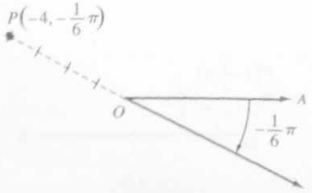


FIGURA 10.36

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La Figura 10.33 muestra el punto $(4, \frac{5}{6}\pi)$. Otro conjunto de coordenadas polares para este punto es $(4, -\frac{7}{6}\pi)$; *véase* la Figura 10.34. Además, las coordenadas polares $(4, \frac{17}{6}\pi)$ también producen el mismo punto, como se muestra en la Figura 10.35. ◂

En realidad, las coordenadas $(4, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$, donde k es cualquier entero, proporcionan el mismo punto que $(4, \frac{5}{6}\pi)$. De esta manera un punto dado tiene una cantidad ilimitada de conjuntos de coordenadas polares. Esto no ocurre en el sistema coordenado cartesiano rectangular en el cual existe una correspondencia uno a uno entre las coordenadas y las posiciones de los puntos en el plano, mientras que tal correspondencia no existe entre las coordenadas polares y la posición de los puntos en el plano. Un ejemplo adicional se obtiene al considerar conjuntos de coordenadas polares para el polo. Si $r = 0$ y θ es cualquier número real, se tiene el polo, el cual es representado por $(0, \theta)$.

Ahora se considerarán coordenadas polares en las que r es negativo. En este caso, en lugar de encontrarse el punto en el lado terminal del ángulo, el punto está en la prolongación del lado terminal; éste es el rayo desde el polo que se prolonga en sentido opuesto al lado terminal. En consecuencia, si P está en la prolongación del lado terminal del ángulo cuya medida en radianes es θ, un conjunto de coordenadas polares de P es (r, θ), donde $r = -|\overline{OP}|$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

El punto $(-4, -\frac{1}{6}\pi)$ mostrado en la Figura 10.36 es el mismo que el punto $(4, \frac{5}{6}\pi)$, $(4, -\frac{7}{6}\pi)$ y $(4, \frac{17}{6}\pi)$ del ejemplo ilustrativo 1. Otro conjunto de coordenadas polares para este mismo punto es $(-4, \frac{11}{6}\pi)$; *véase* la Figura 10.37. ◂

Con frecuencia, el ángulo se mide en radianes; de este modo, el conjunto de coordenadas polares de un punto es un par ordenado de números reales. Para cada par ordenado de números reales existe un

único punto que tiene este conjunto de coordenadas polares. Sin embargo, se ha visto que un punto particular puede ser determinado por un número ilimitado de pares ordenados de números reales. Si el punto P no es el polo, y r y θ se restringen de modo que $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$, entonces existe un único conjunto de coordenadas polares para P.

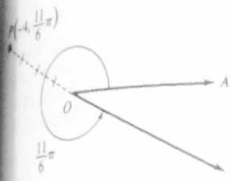


FIGURA 10.37

► EJEMPLO 2 *Localización de un punto a partir de sus coordenadas polares y determinación de otros conjuntos de coordenadas polares para el punto*

(a) Localice el punto cuyas coordenadas polares son $(3, -\frac{2}{3}\pi)$. Encuentre otro conjunto de coordenadas polares de este punto para el cual (b) $r < 0$ y $0 < \theta < 2\pi$; (c) $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$; (d) $r < 0$ y $-2\pi < \theta < 0$.

Solución

(a) El punto se localiza al dibujar el ángulo cuya medida en radianes es $-\frac{2}{3}\pi$ en el sentido del giro de las manecillas del reloj desde el eje polar. Puesto que $r > 0$, P está sobre el lado terminal del ángulo, a tres unidades del polo; *véase* la Figura 10.38(a).

Las respuestas a (b), (c) y (d) son, respectivamente $(-3, \frac{1}{3}\pi)$, $(3, \frac{4}{3}\pi)$ y $(-3, -\frac{5}{3}\pi)$. Éstos se muestran en la Figura 10.38(b)-(d). ◄

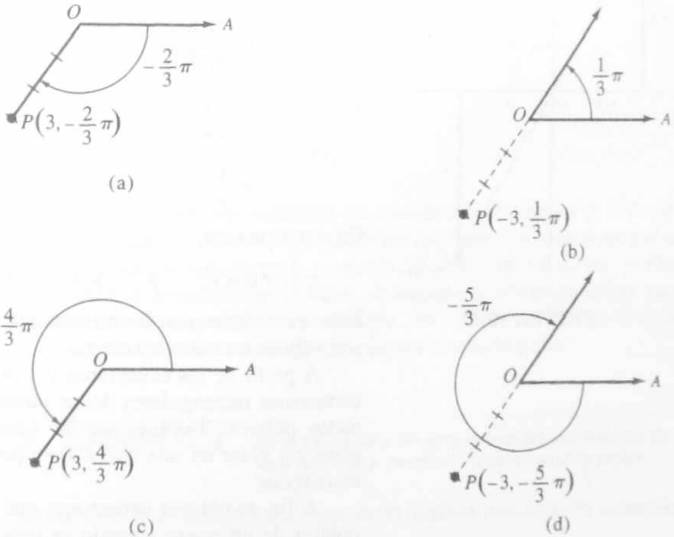


FIGURA 10.38

A menudo se desea obtener tanto las coordenadas cartesianas como las coordenadas polares de un punto. A fin de lograr esto, se hace coincidir el origen del primer sistema con el polo del segundo

sistema, el eje polar con la parte positiva del eje x y el rayo para el que $\theta = \frac{1}{2}\pi$ con la parte positiva del eje y.

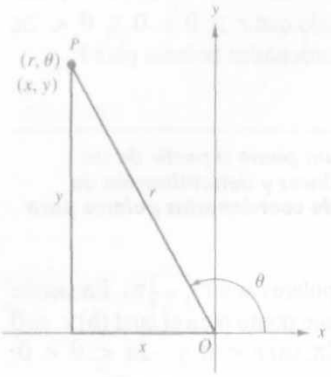


FIGURA 10.39

Suponga que P es un punto cuya representación en el sistema coordenado cartesiano rectangular es (x, y) y (r, θ) es una representación en coordenadas polares de P. Se distinguirán dos casos: $r > 0$ y $r < 0$. En el primer caso, si $r > 0$, entonces el punto P está en el lado terminal del ángulo de θ radianes, y $r = |\overline{OP}|$. La Figura 10.39 muestra tal caso. Así,

$$\cos\theta = \frac{x}{|\overline{OP}|} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{|\overline{OP}|}$$

$$= \frac{x}{r} \qquad = \frac{y}{r}$$

De donde,

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{1}$$

En el segundo caso si $r < 0$, entonces el punto P está en la prolongación del lado terminal y $r = -|\overline{OP}|$. *Véase* la Figura 10.40. Por tanto, si Q es el punto $(-x, -y)$,

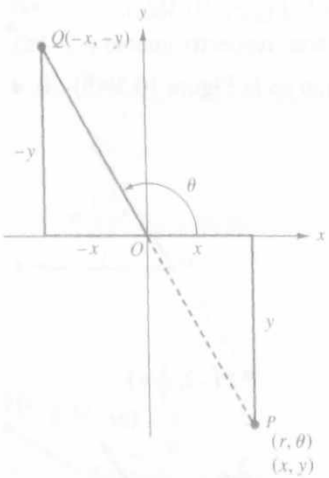


FIGURA 10.40

$$\cos\theta = \frac{-x}{|\overline{OQ}|} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{-y}{|\overline{OQ}|}$$

$$= \frac{-x}{|\overline{OP}|} \qquad = \frac{-y}{|\overline{OP}|}$$

$$= \frac{-x}{-r} \qquad = \frac{-y}{-r}$$

$$= \frac{x}{r} \qquad = \frac{y}{r}$$

En consecuencia,

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Estas ecuaciones son las mismas que las ecuaciones (1), de modo que son válidas en todos los casos.

A partir de las ecuaciones (1) se pueden obtener las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto cuando se conocen sus coordenadas polares. También de las ecuaciones se puede encontrar una ecuación polar de una curva si se proporciona su ecuación cartesiana rectangular.

A fin de obtener ecuaciones que den un conjunto de coordenadas polares de un punto, cuando se conocen sus coordenadas cartesianas rectangulares, se elevan al cuadrado ambos miembros de cada ecuación en (1) y se obtiene

$$x^2 = r^2\cos^2\theta \quad \text{y} \quad y^2 = r^2\,\text{sen}^2\,\theta$$

Al igualar la suma de los miembros izquierdos de estas ecuaciones a la suma de los miembros derechos, se tiene

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Si se dividen las ecuaciones en (1), se tiene

$$\frac{r \operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{3}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

El punto cuyas coordenadas polares son $(-6, \frac{7}{4}\pi)$ se muestra en la Figura 10.41. Se determinarán sus coordenadas cartesianas rectangulares. De (1),

$$x = r\cos 3 \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$
$$= -6\cos\tfrac{7}{4}\pi \qquad = -6\operatorname{sen}\tfrac{7}{4}\pi$$
$$= -6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad = -6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -3\sqrt{2} \qquad = 3\sqrt{2}$$

Por tanto, el punto es $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. ◄

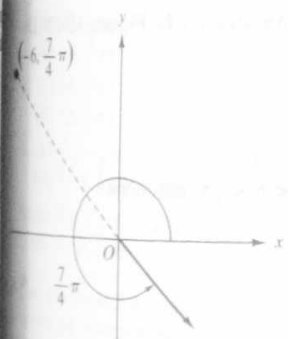


FIGURA 10.41

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares r y θ consta de todos aquellos puntos y sólo aquellos que tienen al menos un par de coordenadas que satisfacen la ecuación. Si una ecuación de una gráfica está dada en coordenadas polares, se denomina **ecuación polar** para distinguirla de una ecuación cartesiana. En la Sección 10.4 se discutirán métodos para obtener la gráfica de una ecuación polar.

► EJEMPLO 3 *Determinación de una ecuación cartesiana de una gráfica a partir de una ecuación polar*

Determine la ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar

$$r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$$

Solución Debido a que $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ se tiene $\operatorname{sen} 2\theta = 2(y/r)(x/r)$, además $r^2 = x^2 + y^2$. Al sustituir esto en la ecuación polar dada, se obtiene

$$x^2 + y^2 = 4(2)\frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$$

▸ EJEMPLO 4 *Determinación de las coordenadas de un punto a partir de sus coordenadas cartesianas rectangulares*

Determine (r, θ) si $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$, para el punto cuya representación en coordenadas cartesianas rectangulares es $(-\sqrt{3}, -1)$.

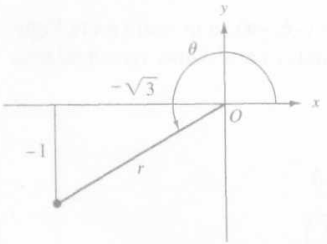


FIGURA 10.42

Solución El punto $(-\sqrt{3}, -1)$ se muestra en la Figura 10.42. De (2), como $r > 0$,

$$r = \sqrt{3 + 1}$$
$$= 2$$

De (3), $\tan\theta = -1/(-\sqrt{3})$, y ya que $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, entonces

$$\theta = \tfrac{7}{6}\pi$$

Por tanto, el punto es $(2, \frac{7}{6}\pi)$.

▸ EJEMPLO 5 *Determinación de una ecuación polar de una gráfica a partir de su ecuación cartesiana*

Determine una ecuación polar de la gráfica cuya ecuación cartesiana es

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Solución Si se sustituye $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

se tiene

$$r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\,\theta - 4r\cos\theta = 0$$
$$r^2 - 4r\cos\theta = 0$$
$$r(r - 4\cos\theta) = 0$$

Por tanto,

$$r = 0 \quad \text{o} \quad r - 4\cos\theta = 0$$

La gráfica de $r = 0$ es el polo. Sin embargo, el polo es un punto de la gráfica de $r - 4 \cos \theta = 0$ porque $r = 0$ cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Por tanto, una ecuación polar de la gráfica es

$$r = 4 \cos \theta$$

La gráfica de $x^2 + y^2 - 4x = 0$ es una circunferencia. La ecuación puede escribirse como

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

la cual es la ecuación de la circunferencia de centro $(2, 0)$ y radio 2. ◀

EJERCICIOS 10.3

En los ejercicios 1 a 4, localice el punto que tiene el conjunto de coordenadas polares indicado.

1. (a) $(3, \frac{1}{6}\pi)$ (b) $(2, \frac{2}{3}\pi)$ (c) $(1, \pi)$ (d) $(4, \frac{5}{4}\pi)$ (e) $(5, \frac{11}{6}\pi)$
2. (a) $(4, \frac{1}{3}\pi)$ (b) $(3, \frac{3}{4}\pi)$ (c) $(1, \frac{7}{6}\pi)$ (d) $(2, \frac{3}{2}\pi)$ (e) $(5, \frac{5}{3}\pi)$
3. (a) $(1, -\frac{1}{4}\pi)$ (b) $(3, -\frac{5}{6}\pi)$ (c) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$ (d) $(-3, \frac{5}{6}\pi)$ (e) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$
4. (a) $(5, -\frac{2}{3}\pi)$ (b) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$ (c) $(-5, \frac{2}{3}\pi)$ (d) $(-2, \frac{7}{6}\pi)$ (e) $(-4, -\frac{5}{4}\pi)$

En los ejercicios 5 a 10, localice el punto que tiene el conjunto de coordenadas polares indicado; después, encuentre otro conjunto de coordenadas polares para el mismo punto para el cual (a) $r < 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ y $-2\pi < \theta \le 0$; y (c) $r < 0$ y $-2\pi < \theta \le 0$.

5. $(4, \frac{1}{4}\pi)$
6. $(3, \frac{5}{6}\pi)$
7. $(2, \frac{1}{2}\pi)$
8. $(3, \frac{3}{2}\pi)$
9. $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$
10. $(2, \frac{4}{3}\pi)$

11. Localice el punto cuyas coordenadas polares son $(2, -\frac{1}{4}\pi)$. Encuentre otro conjunto de coordenadas polares para este punto de modo que **(a)** $r < 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$; **(b)** $r < 0$ y $-2\pi < \theta \le 0$; **(c)** $r > 0$ y $2\pi \le \theta < 4\pi$.

12. Localice el punto cuyas coordenadas polares son $(-3, -\frac{2}{3}\pi)$. Encuentre otro conjunto de coordenadas polares para este punto de modo que **(a)** $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$; **(b)** $r > 0$ y $-2\pi < \theta \le 0$; **(c)** $r < 0$ y $2\pi \le \theta < 4\pi$.

En los ejercicios 13 a 20, localice el punto que tiene el conjunto de coordenadas polares indicado; después, escriba otros dos conjuntos de coordenadas polares para el mismo punto, uno con el mismo valor de r y el otro con un r de signo contrario.

13. $(3, -\frac{2}{3}\pi)$
14. $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$
15. $(-4, \frac{5}{6}\pi)$
16. $(-2, \frac{4}{3}\pi)$
17. $(-2, -\frac{5}{4}\pi)$
18. $(-3, -\pi)$
19. $(2, 6)$
20. $(5, \frac{1}{6}\pi)$

En los ejercicios 21 y 22, encuentre las coordenadas cartesianas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas polares se proporcionan.

21. **(a)** $(3, \pi)$ **(b)** $(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi)$ **(c)** $(-4, \frac{2}{3}\pi)$ **(d)** $(-1, -\frac{7}{6}\pi)$
22. **(a)** $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$ **(b)** $(-1, \frac{1}{4}\pi)$ **(c)** $(2, -\frac{7}{6}\pi)$ **(d)** $(2, \frac{7}{4}\pi)$

En los ejercicios 23 y 24, determine un conjunto de coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas rectangulares se proporcionan. Considere $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$.

23. **(a)** $(1, -1)$ **(b)** $(-\sqrt{3}, 1)$ **(c)** $(2, 2)$ **(d)** $(-5, 0)$
24. **(a)** $(3, -3)$ **(b)** $(-1, \sqrt{3})$ **(c)** $(0, -2)$ **(d)** $(-2, -2\sqrt{3})$

En los ejercicios 25 a 34, encuentre una ecuación polar de la gráfica que tiene la ecuación cartesiana indicada.

25. $x^2 + y^2 = a^2$
26. $x + y = 1$
27. $y^2 = 4(x + 1)$
28. $x^3 = 4y^2$
29. $x^2 = 6y - y^2$
30. $x^2 - y^2 = 16$
31. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
32. $2xy = a^2$
33. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

En los ejercicios 35 a 44, halle una ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar indicada.

35. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

36. $r^2 \cos 2\theta = 10$

37. $r^2 = \cos \theta$

38. $r^2 = 4 \cos 2\theta$

39. $r^2 = \theta$

40. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

41. $r \cos \theta = -1$

42. $r^6 = r^2 \cos 2\theta$

43. $r = \dfrac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

44. $r = \dfrac{4}{3 - 2 \cos \theta}$

45. Explique por qué existe una correspondencia uno a uno entre la posición de un punto en el plano y sus coordenadas cartesianas rectangulares, y por qué no existe tal correspondencia con las coordenadas polares del punto. En la explicación proporcione dos puntos como ejemplos: uno en el primer cuadrante y el otro en el segundo cuadrante.

10.4 GRÁFICAS DE ECUACIONES POLARES

OBJETIVOS

1. **Encontrar ecuaciones polares de rectas.**
2. **Encontrar ecuaciones polares de circunferencias.**
3. **Aprender pruebas de simetría para gráficas polares.**
4. **Describir propiedades de caracoles y rosas a partir de sus ecuaciones polares.**
5. **Dibujar y trazar gráficas polares.**

En la Sección 10.3 se dijo que la gráfica de una ecuación polar, denominada **gráfica polar,** consta de aquellos puntos y sólo aquellos que al menos tienen un par de coordenadas polares que sastisfacen la ecuación. En esta sección, se discutirán propiedades de tales gráficas y se obtendrán hechas a mano y en la calculadora gráfica o graficadora.

La ecuación

$$\theta = C$$

donde C es una constante, es satisfecha por todos los puntos cuyas coordenadas polares son (r, C) sin importar el valor de r. Por tanto, la gráfica de esta ecuación es una recta que contiene al polo y forma un ángulo de C radianes con el eje polar. *Véase* la Figura 10.43. La misma recta está dada por la ecuación

$$\theta = C \pm k\pi$$

donde k es cualquier entero.

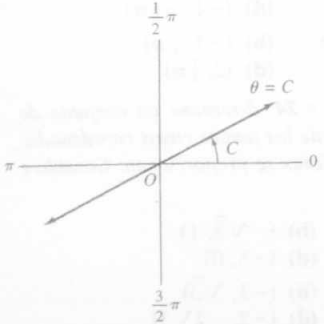


FIGURA 10.43

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) La gráfica de la ecuación

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi$$

se muestra en la Figura 10.44. Es la recta que contiene al polo y forma un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ radianes con el eje polar. La misma recta está dada por las ecuaciones

$$\theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{9}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{7}{4}\pi$$

y así sucesivamente.

(b) La Figura 10.45 muestra la gráfica de la ecuación

$$\theta = \tfrac{2}{3}\pi$$

Es la recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ radianes con el eje polar. Otras ecuaciones de esta recta son

$$\theta = \tfrac{5}{3}\pi \qquad \theta = \tfrac{8}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{1}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{4}{3}\pi$$

y así sucesivamente. ◀

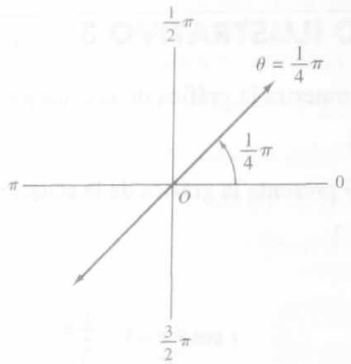


FIGURA 10.44

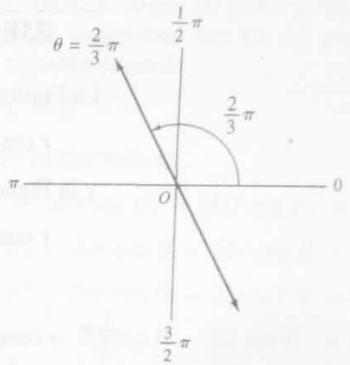


FIGURA 10.45

En general, la forma polar de la ecuación de una recta no es tan simple como la forma cartesiana. Sin embargo, si la recta es paralela al eje polar o al eje $\frac{1}{2}\pi$, la ecuación es bastante simple.

Si la recta es paralela al eje polar y contiene al punto B cuyas coordenadas cartesianas son $(0, b)$, de modo que las coordenadas polares de B son $(b, \frac{1}{2}\pi)$, entonces una ecuación cartesiana es $y = b$. Si se sustituye y por $r \operatorname{sen} \theta$, se tiene

$$r \operatorname{sen} \theta = b$$

la cual es la ecuación polar de cualquier recta paralela al eje polar. Si b es positivo, la recta está arriba del eje polar. Si b es negativo, la recta se encuentra debajo del eje polar.

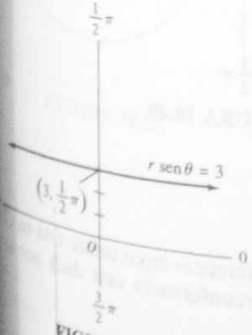


FIGURA 10.46

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

En la Figura 10.46 se tiene la gráfica de la ecuación

$$r \operatorname{sen} \theta = 3$$

y en la Figura 10.47 se presenta la gráfica de la ecuación

$$r \operatorname{sen} \theta = -3$$

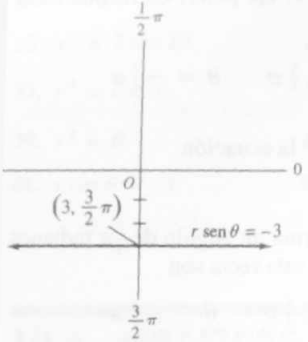


FIGURA 10.47

Ahora considere una recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$ o, equivalentemente, perpendicular al eje polar. Si la recta pasa por el punto A cuyas coordenadas cartesianas son $(a, 0)$ y sus coordenadas polares son $(a, 0)$, entonces una ecuación cartesiana de esta recta es $x = a$. Al sustituir x por $r \cos \theta$, se obtiene

$$r \cos \theta = a$$

la cual es la ecuación polar de cualquier recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$. Si a es positivo, la recta está a la derecha del eje $\frac{1}{2}\pi$. Si a es negativo, la recta se encuentra a la izquierda del eje $\frac{1}{2}\pi$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La Figura 10.48 muestra la gráfica de la ecuación

$$r \cos \theta = 3$$

y la Figura 10.49 presenta la gráfica de la ecuación

$$r \cos \theta = -3$$

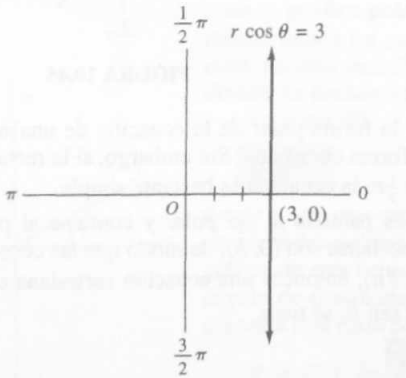


FIGURA 10.48

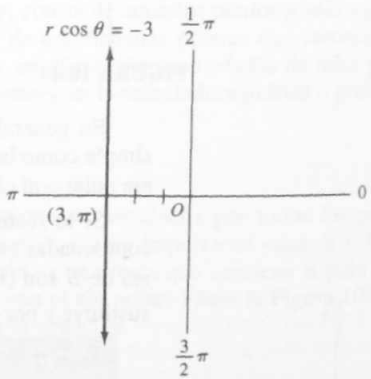


FIGURA 10.49

La gráfica de la ecuación

$$r = C$$

donde C es una constante, es una circunferencia cuyo centro está en el polo y su radio es $|C|$. La misma circunferencia está dada por la ecuación

$$r = -C$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

En la Figura 10.50 se tiene la gráfica de la ecuación

$$r = 4$$

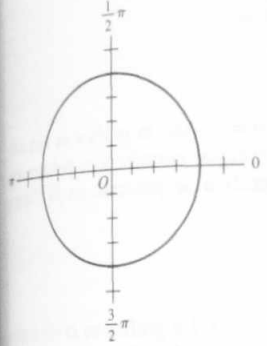


FIGURA 10.50

Es una circunferencia con centro en el polo y radio 4. La misma circunferencia está dada por la ecuación

$$r = -4$$

aunque el uso de tal ecuación no es común. ◀

Como con la recta, la ecuación polar general de una circunferencia no es tan simple como la forma cartesiana. Sin embargo, ciertos casos especiales de la ecuación de una circunferencia ameritan considerarse en forma polar.

Si una circunferencia contiene al origen (el polo) y tiene su centro en el punto cuyas coordenadas cartesianas son (a, b), entonces una ecuación cartesiana de esta circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

Una ecuación polar de esta circunferencia es

$$(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$r^2 - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$r(r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$r = 0 \qquad r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta = 0$$

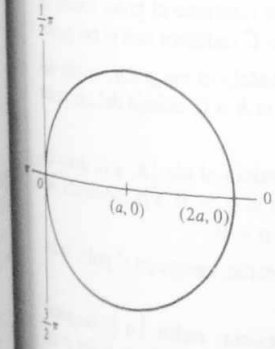


FIGURA 10.51

Como la gráfica de la ecuación $r = 0$ es el polo y el polo ($r = 0$ cuando $\theta = \tan^{-1}(-a/b)$) está en la gráfica de $r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta = 0$, una ecuación polar de la circunferencia es

$$r = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta$$

Cuando $b = 0$ en esta ecuación, se tiene

$$r = 2a\cos\theta$$

Ésta es una ecuación polar de la circunferencia de radio $|a|$ unidades, tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$ y con su centro en el eje polar o en su prolongación. Si $a > 0$, la circunferencia está a la derecha del polo como en la Figura 10.51, y si $a < 0$, la circunferencia se encuentra a la izquierda del polo.

Si $a = 0$ en la ecuación $r = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$r = 2b\operatorname{sen}\theta$$

la cual es la ecuación polar de la circunferencia de radio $|b|$ unidades, tangente al eje polar y con su centro en el eje $\frac{1}{2}\pi$ o en su prolongación. Si $b > 0$, la circunferencia está arriba del polo, y si $b < 0$, la circunferencia está debajo del polo.

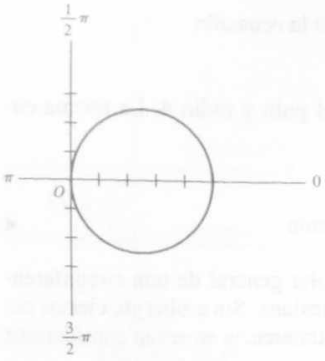


FIGURA 10.52

▶ EJEMPLO 1 *Dibujo de gráficas polares*

Dibuje la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes: **(a)** $r = 5 \cos \theta$; **(b)** $r = -6 \operatorname{sen} \theta$.

Solución

(a) La ecuación

$$r = 5 \cos \theta$$

es de la forma $r = 2a \cos \theta$ con $a = \frac{5}{2}$. Así, la gráfica es una circunferencia con centro en el punto cuyas coordenadas polares son $(\frac{5}{2}, 0)$ y tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$. La gráfica se presenta en la Figura 10.52.

(b) La ecuación

$$r = -6 \operatorname{sen} \theta$$

es de la forma $r = 2b \operatorname{sen} \theta$ con $b = -3$. La gráfica es la circunferencia con centro en el punto cuyas coordenadas polares son $(3, \frac{3}{2}\pi)$ y tangente al eje polar. La gráfica se muestra en la Figura 10.53. ◀

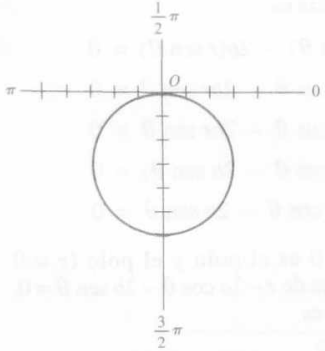


FIGURA 10.53

Resumen de ecuaciones polares de rectas y circunferencias

C, a y b son constantes

$\theta = C$	Recta que contiene al polo; forma un ángulo de C radianes con el eje polar.
$r \operatorname{sen} \theta = b$	Recta paralela al eje polar; arriba del eje polar si $b > 0$, debajo del eje polar si $b < 0$.
$r \cos \theta = a$	Recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$; a la derecha del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a > 0$, a la izquierda del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a < 0$.
$r = C$	Circunferencia; centro en el polo; radio C.
$r = 2a \cos \theta$	Circunferencia; radio $\lvert a \rvert$; tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$; centro en el eje polar o en su prolongación.
$r = 2b \operatorname{sen} \theta$	Circunferencia; radio $\lvert b \rvert$; tangente al eje polar; centro en el eje $\frac{1}{2}\pi$ o en su prolongación.

Antes de discutir otras gráficas polares, se estudiarán las propiedades de simetría. Las siguientes pruebas de simetría pueden demos-

trarse a partir de la definición de simetría de una gráfica dada en la Sección 1.5.

Pruebas de simetría

Una gráfica polar es

(i) simétrica con respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$;
(ii) simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$;
(iii) simétrica con respecto al polo si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta)$ o $(r, \pi + \theta)$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Para la gráfica de la ecuación

$$r = 4 \cos 2\theta$$

se efectuarán las pruebas de simetría con respecto al eje polar, al eje $\frac{1}{2}\pi$ y al polo.

Para la prueba de simetría con respecto al eje polar, se sustituye (r, θ) por $(r, -\theta)$ y se obtiene $r = 4 \cos(-2\theta)$, la cual es equivalente a $r = 4 \cos 2\theta$. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

Para la prueba de simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$, se sustituye (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ en la ecuación dada y se obtiene $r = 4 \cos(2(\pi - \theta))$ o equivalentemente, $r = 4 \cos(2\pi - 2\theta)$, la cual equivale a $r = 4 \cos 2\theta$. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$.

Para la prueba de simetría con respecto al polo, se sustituye (r, θ) por $(-r, \theta)$ y se obtiene la ecuación $-r = 4 \cos 2\theta$, la cual no es equivalente a la ecuación dada. Pero se debe determinar también si el otro conjunto de coordenadas funciona. Al sustituir (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ se obtiene $r = 4 \cos 2(\pi + \theta)$ o, equivalentemente, $r = 4 \cos(2\pi + 2\theta)$, la cual equivale a la ecuación $r = 4 \cos 2\theta$. Por tanto, la gráfica es simétrica con respecto al polo. ◀

Cuando se dibuja una gráfica polar, se determina si contiene al polo sustituyendo 0 por r en la ecuación y resolviéndola para θ.

► EJEMPLO 2 *Dibujo de gráficas polares*

Dibuje la gráfica de la ecuación

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

Tabla 1

θ	r
0	-1
$\frac{1}{6}\pi$	$1 - \sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	0
$\frac{1}{2}\pi$	1
$\frac{2}{3}\pi$	2
$\frac{5}{6}\pi$	$1 + \sqrt{3}$
π	3

Solución Debido a que se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, -\theta)$, la gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

Si $r = 0$, se obtiene $\cos\theta = \frac{1}{2}$, y si $0 \le \theta \le \pi$, entonces $\theta = \frac{1}{3}\pi$. En consecuencia, el punto $(0, \frac{1}{3}\pi)$, el polo, está en la gráfica. La Tabla 1 presenta coordenadas de algunos otros puntos de la gráfica. A partir de estos puntos se dibuja la mitad de la gráfica; el resto se obtiene de la simetría con respecto al eje polar. La gráfica se muestra en la Figura 10.54. ◂

En la Figura 10.54, la gráfica se dibujó en un sistema de coordenadas polares. Se le pedirá que dibuje algunas gráficas polares en un sistema de coordenadas polares en los ejercicios 39 a 48.

Las ecuaciones paramétricas pueden emplearse para trazar gráficas polares en una graficadora. El teorema siguiente muestra cómo definir una gráfica mediante un par de ecuaciones paramétricas.

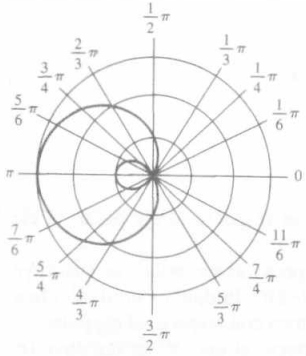


FIGURA 10.54

TEOREMA 1

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ está definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t)\cos t \quad \text{y} \quad y = f(t)\operatorname{sen} t$$

Demostración Sea (x, y) la representación cartesiana de un punto P cuya representación polar es (r, θ). Entonces

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Como $r = f(\theta)$, se tiene

$$x = f(\theta)\cos\theta \quad \text{y} \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Al sustituir θ por t, de modo que ahora el parámetro sea t, se obtiene

$$x = f(t)\cos t \quad \text{y} \quad y = f(t)\operatorname{sen} t$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Para trazar la gráfica del ejemplo 2 en la graficadora, se utilizan las ecuaciones del Teorema 1:

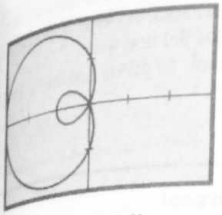
$$x = f(t)\cos t \quad \text{y} \quad y = f(t)\operatorname{sen} t$$

donde $f(\theta) = 1 - 2\cos\theta$; es decir,

$$x = (1 - 2\cos t)\cos t \quad \text{y} \quad y = (1 - 2\cos t)\operatorname{sen} t$$

Con la graficadora en los modos paramétrico y de radianes, y $0 \le t \le 2\pi$, se elige $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$ como rectángulo de inspección y se ob-

tiene la gráfica mostrada en la Figura 10.55, la cual es acorde con la curva de la Figura 10.54. ◀



[-3, 3] por [-2, 2]
$r = 1 - 2\cos\theta$
FIGURA 10.55

La gráfica polar del ejemplo 2 y la del ejemplo ilustrativo 6 se denomina *limaçon*, una palabra francesa que proviene del latín *limax* y que significa caracol. Un **caracol** (o **limaçon**) es la gráfica de una ecuación de la forma

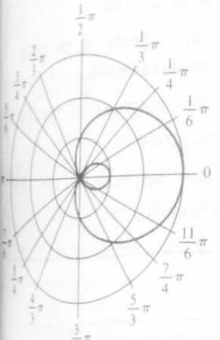
$$r = a \pm b\cos\theta \quad \text{o} \quad r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Existen cuatro tipos de caracoles, que dependen de la razón a/b.

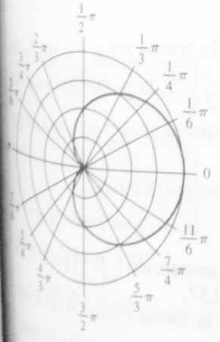
Tipos de caracoles

De la ecuación $r = a + b\cos\theta$, donde $a > 0$ y $b > 0$.

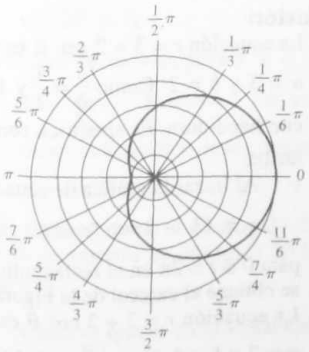
1. $0 < \dfrac{a}{b} < 1$ **Caracol con un lazo.** *Véase* la Figura 10.56(a).
2. $\dfrac{a}{b} = 1$ **Cardioide.** *Véase* la Figura 10.56(b).
3. $1 < \dfrac{a}{b} < 2$ **Caracol con hendidura.** *Véase* la Figura 10.56(c).
4. $2 \leq \dfrac{a}{b}$ **Caracol convexo** (sin hendidura). *Véase* la Figura 10.56(d).



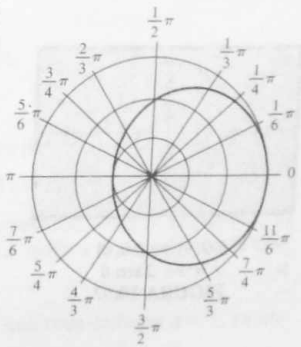
$0 < \dfrac{a}{b} < 1$
caracol con un lazo
(a)



$\dfrac{a}{b} = 1$
cardioide
(b)



$1 < \dfrac{a}{b} < 2$
caracol con hendidura
(c)



$2 \leq \dfrac{a}{b}$
caracol convexo
(d)

FIGURA 10.56

$\iint \frac{dy}{dx}$ Cuando estudie Cálculo, donde se tratan las rectas tangentes horizontales y verticales de gráficas polares, será evidente el porqué los caracoles del tipo 3 tienen hendidura y los del tipo 4 no.

A partir de la ecuación de un caracol, se puede determinar su simetría y la dirección en la que apunta.

Simetría y dirección de un caracol

$a > 0$ y $b > 0$

$r = a + b\cos\theta$	Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la derecha.
$r = a - b\cos\theta$	Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda.
$r = a + b\,\text{sen}\,\theta$	Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba.
$r = a - b\,\text{sen}\,\theta$	Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo.

▶ EJEMPLO 3 *Descripción y trazado de caracoles*

Para cada uno de los caracoles siguientes, determine el tipo, su simetría y la dirección en la que apunta. Trace el caracol: **(a)** $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$; **(b)** $r = 2 + 2\cos\theta$; **(c)** $r = 2 - \text{sen}\,\theta$.

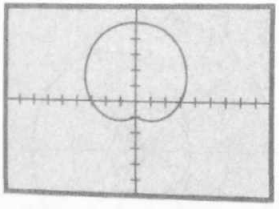
Solución

(a) La ecuación $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$ es de la forma $r = a + b\,\text{sen}\,\theta$ con $a = 3$ y $b = 2$. Como $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ y $1 < \frac{3}{2} < 2$, la gráfica es un caracol con hendidura. Es simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ y apunta hacia arriba.

Al trazar la gráfica de ecuaciones paramétricas

$$x = (3 + 2\,\text{sen}\,t)\cos t \quad \text{y} \quad y = (3 + 2\,\text{sen}\,t)\,\text{sen}\,t$$

para $0 \le t \le 2\pi$ en el rectángulo de inspección $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$, se obtiene el caracol de la Figura 10.57.

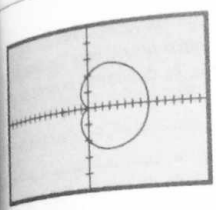


[−9, 9] por [−6, 6]
$r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$
FIGURA 10.57

(b) La ecuación $r = 2 + 2\cos\theta$ es de la forma $r = a + b\cos\theta$ con $a = 2$ y $b = 2$. Como $\frac{a}{b} = 1$, la gráfica es una cardioide. Es simétrica con respecto al eje polar y apunta a la derecha.

Se traza la cardioide a partir de las ecuaciones paramétricas

$$x = (2 + 2\cos t)\cos t \quad \text{y} \quad y = (2 + 2\cos t)\,\text{sen}\,t$$



[–7.5, 7.5] por [–5, 5]
$r = 2 + 2\cos\theta$
FIGURA 10.58

para $0 \le t \le 2\pi$ en el rectángulo de inspección [–7.5, 7.5] por [–5, 5] como se muestra en la Figura 10.58.

(c) La ecuación $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$ es de la forma $r = a - b \operatorname{sen}\theta$ con $a = 2$ y $b = 1$. Como $\frac{a}{b} = 2$, la gráfica es un caracol convexo. Es simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ y apunta hacia abajo.

La gráfica se muestra en la Figura 10.59, trazada a partir de las ecuaciones paramétricas

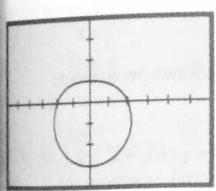
$$x = (2 - \operatorname{sen} t)\cos t \quad \text{y} \quad y = (2 - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t$$

para $0 \le t \le 2\pi$ en el rectángulo de inspección [–6, 6] por [–4, 4]. ◀

La gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a\cos n\theta \quad \text{o} \quad r = a\operatorname{sen} n\theta$$

es una **rosa,** con n hojas si n es impar y $2n$ hojas si n es par. La longitud de una hoja es $|a|$.



[–6, 6] por [–4, 4]
$r = 2 - \operatorname{sen}\theta$
FIGURA 10.59

► EJEMPLO 4 *Descripción y trazado de una gráfica polar*

Describa y trace la gráfica de la ecuación

$$r = 4\cos 2\theta$$

Solución La ecuación es de la forma $r = a\cos n\theta$ donde $n = 2$. Como n es par, la gráfica es una rosa de cuatro hojas. La longitud de una hoja es 4. En el ejemplo ilustrativo 5, se probó que la gráfica es simétrica con respecto al eje polar, el eje $\frac{1}{2}\pi$ y el polo. La gráfica contiene al polo porque cuando $r = 0$ se tiene

$$\cos 2\theta = 0$$

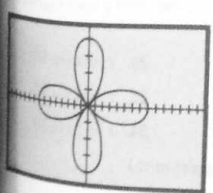
de lo cual se obtiene, para $0 \le \theta \le 2\pi$,

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{7}{4}\pi$$

Se traza la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 4\cos 2t\cos t \quad \text{y} \quad y = 4\cos 2t\operatorname{sen} t$$

para $0 \le t \le 2\pi$ en el rectángulo de inspección [–7.5, 7.5] por [–5, 5] como se muestra en la Figura 10.60. La gráfica es acorde con la descripción. ◀



[–7.5, 7.5] por [–5, 5]
$r = 4\cos 2\theta$
FIGURA 10.60

Observe que si en la ecuación de una rosa se toma $n = 1$, se obtiene

$$r = a\cos\theta \quad \text{o} \quad r = a\operatorname{sen}\theta$$

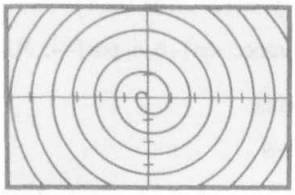
la cual es una ecuación de una circunferencia. Por tanto, una circunferencia se considera como una rosa de una hoja.

Otras gráficas polares que ocurren con frecuencia son las *espirales* (*véase* los ejercicios 25 a 28) y las *lemniscatas* (*véase* los ejercicios 29 a 32). La gráfica del ejemplo siguiente se denomina *espiral de Arquímedes*.

▸ EJEMPLO 5 *Descripción y trazado de una gráfica polar*

Describa y trace la gráfica de la ecuación

$$r = \theta \qquad \theta \geq 0$$



[−42, 42] por [−28, 28]
$r = \theta \quad \theta \geq 0$
FIGURA 10.61

Solución Primero observe que no existe simetría para la gráfica. Además, conforme θ crece también lo hace r. Cuando $r = 0$, $\theta = 0$; de modo que el polo está en la gráfica. Cuando $\theta = n\pi$, donde n es cualquier entero, la gráfica intersecta al eje polar o a su prolongación, y cuando $\theta = \frac{1}{2}n\pi$, donde n es cualquier entero impar, la gráfica interseca al eje $\frac{1}{2}\pi$ o a su prolongación.

Ahora se traza la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = t\cos t \qquad \text{y} \qquad y = t\,\text{sen}\,t$$

para $t \geq 0$ en el rectángulo de inspección [−42, 42] por [−28, 28]. Se obtiene la gráfica de la Figura 10.61, la cual es acorde con la descripción. ◂

EJERCICIOS 10.4

En los ejercicios 1 a 8, dibuje la gráfica de la ecuación.

1. (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$ (b) $r = \frac{1}{3}\pi$
2. (a) $\theta = \frac{3}{4}\pi$ (b) $r = \frac{3}{4}\pi$
3. (a) $\theta = 2$ (b) $r = 2$
4. (a) $\theta = -3$ (b) $r = -3$
5. (a) $r\cos\theta = 4$ (b) $r = 4\cos\theta$
6. (a) $r\,\text{sen}\,\theta = 2$ (b) $r = 2\,\text{sen}\,\theta$
7. (a) $r\,\text{sen}\,\theta = -4$ (b) $r = -4\,\text{sen}\,\theta$
8. (a) $r\cos\theta = -5$ (b) $r = -5\cos\theta$

En los ejercicios 9 a 18, determine el tipo de caracol, su simetría y la dirección en la que apunta. Trace el caracol.

9. $r = 4(1 - \cos\theta)$
10. $r = 3(1 - \text{sen}\,\theta)$
11. $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$
12. $r = 3(1 + \cos\theta)$
13. $r = 2 - 3\,\text{sen}\,\theta$
14. $r = 4 - 3\,\text{sen}\,\theta$
15. $r = 3 - 2\cos\theta$
16. $r = 3 - 4\cos\theta$
17. $r = 4 + 2\,\text{sen}\,\theta$
18. $r = 6 + 2\cos\theta$

En los ejercicios 19 a 38, describa y trace la gráfica de la ecuación.

19. $r = 2\,\text{sen}\,3\theta$
20. $r = 4\,\text{sen}\,5\theta$
21. $r = 2\cos 4\theta$
22. $r = 3\cos 2\theta$
23. $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$
24. $r = 3\cos 3\theta$
25. $r = e^{\theta}$ (espiral logarítmica)
26. $r = e^{\theta/3}$ (espiral logarítmica)
27. $r = \dfrac{1}{\theta}$ (espiral recíproca)
28. $r = 2\theta$ (espiral de Arquímedes)
29. $r^2 = 9\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)
30. $r^2 = 16\cos 2\theta$ (lemniscata)
31. $r^2 = -25\cos 2\theta$ (lemniscata)
32. $r^2 = -4\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)

33. $r = 2 \operatorname{sen} \theta \tan \theta$ (cisoide)

34. $r^2 = 8\theta$ (espiral de Fermat)

35. $r = 2 \sec \theta - 1$ (concoide de Nicómedes)

36. $r = 2 \csc \theta + 3$ (concoide de Nicómedes)

37. $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$

38. $r = 2\,|\cos \theta|$

39. Las gráficas polares se pueden trazar sobre papel para gráficas polares que emplea un sistema de coordenadas polares tal como en la Figura 10.54. Construya uno de estos sistemas con regla, compás y transportador. En este sistema trace la gráfica de $r = 1 + 4 \operatorname{sen} \theta$.

En los ejercicios 40 a 48, siga las instrucciones del ejercicio 39 para trazar la gráfica de la ecuación polar.

40. $r = 5 - 3 \operatorname{sen} \theta$

41. $r = 4 - \cos \theta$

42. $r = 3 + 5 \cos \theta$

43. $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$

44. $r = 6(1 - \cos \theta)$

45. $r = 4 + 3 \cos \theta$

46. $r = 3 + \operatorname{sen} \theta$

47. $r = 3 \cos 5\theta$

48. $r = 2 \operatorname{sen} 4\theta$

En los ejercicios 49 a 52, trace las gráficas de las dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección. Después utilice el rastreo y el aumento de la graficadora para aproximar a dos dígitos significativos las coordenadas cartesianas rectangulares de los puntos de intersección de las gráficas.

49. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 2(1 + \cos \theta) \end{cases}$

50. $\begin{cases} r = 5 \cos \theta \\ r = 5 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

51. $\begin{cases} r = 2 \cos 2\theta \\ r = 2 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

52. $\begin{cases} r = 2 \operatorname{sen} 3\theta \\ r = 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

En los ejercicios 53 a 56, determine algebraicamente las coordenadas polares de los puntos de intersección de las gráficas del ejercicio indicado y compare las respuestas con las coordenadas cartesianas rectangulares encontradas algebraicamente. (Sugerencia: iguale los dos valores de r en términos de θ y resuelva la ecuación trigonométrica resultante.)

53. Ejercicio 49

54. Ejercicio 50

55. Ejercicio 51

56. Ejercicio 52

10.5 FORMA POLAR DE NÚMEROS COMPLEJOS

OBJETIVOS

1. **Representar números complejos como puntos en el plano complejo.**
2. **Encontrar el valor absoluto de un número complejo.**
3. **Aprender la forma polar de un número complejo.**
4. **Expresar un número complejo en forma polar estándar.**
5. **Obtener fórmulas para el producto y el cociente de dos números complejos expresados en forma polar.**
6. **Expresar en forma cartesiana el producto de dos números complejos dados en forma polar.**
7. **Expresar en forma cartesiana el cociente de dos números complejos dados en forma polar.**

En capítulos anteriores se vio cómo los números complejos pueden considerarse para uso "real" cuando surgen de manera natural en la solución de un problema. Si continúa su estudio de matemáticas más allá del curso de Cálculo, aprenderá que los números complejos tienen significado tanto en aspectos teóricos como de aplicación. En esta sección se dará una representación de los números complejos y se mostrará cómo estos números pueden expresarse en términos de coordenadas pola-

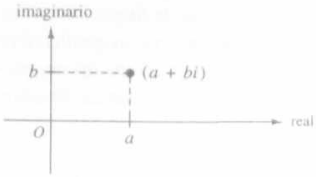


FIGURA 10.62

res. Después, en la Sección 10.6, se aplicará la *forma polar* para calcular potencias y raíces de números complejos.

El conjunto de números complejos puede representarse por puntos en un sistema de coordenadas rectangulares. En dicha representación, el eje horizontal se denomina **eje real** y el eje vertical se le llama eje **imaginario.** Los puntos del plano, denominado **plano complejo,** son puestos en correspondencia uno a uno con los números complejos. La representación geométrica del número complejo $a + bi$ es el punto $P(a, b)$ en el plano complejo, y el punto se llama **gráfica** del número. Consulte la Figura 10.62.

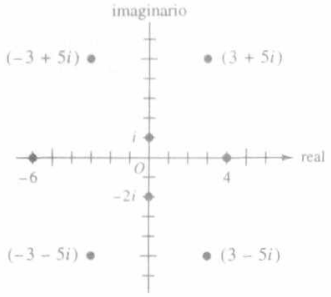


FIGURA 10.63

▶ EJEMPLO 1 *Representación de números complejos como puntos en el plano complejo*

Muestre la representación geométrica de cada uno de los números complejos siguientes en el plano complejo: $3 + 5i$; $-3 + 5i$; $-3 - 5i$; $3 - 5i$; i; $-2i$; 4, y -6.

Solución Los puntos se muestran en la Figura 10.63. ◀

Observe que cualquier número real se representa por un punto en el eje real y cualquier número imaginario puro se representa por un punto en el eje imaginario. La representación geométrica del número complejo $a + bi$ y su conjugado $a - bi$ son puntos simétricos con respecto al eje real. *Véase* la Figura 10.64.

Si $a + bi$ es un número complejo arbitrario, entonces la distancia en el plano complejo desde el origen hasta la gráfica de $a + bi$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Consulte la Figura 10.65. Este número se denomina *valor absoluto* o *módulo* de $a + bi$.

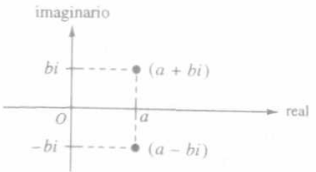


FIGURA 10.64

DEFINICIÓN **Valor absoluto de un número complejo**

El **valor absoluto** o **módulo** del número complejo $a + bi$, denotado por $|a + bi|$, está dado por

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

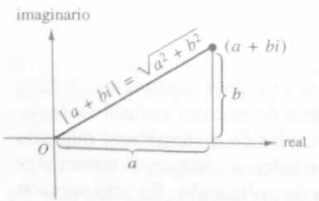


FIGURA 10.65

▷ EJEMPLO 2 *Determinación del valor absoluto de un número complejo*

Determine el valor absoluto indicado en las siguientes expresiones: **(a)** $|6 - i|$; **(b)** $|-3 + 2i|$; **(c)** $|-4 - 3i|$; **(d)** $|5i|$.

Solución

(a) $|6 - i| = \sqrt{6^2 + (-1)^2}$
$= \sqrt{37}$

(b) $|-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$
$= \sqrt{13}$

(c) $|-4 - 3i| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$

(d) $|5i| = \sqrt{0^2 + 5^2}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$ ◀

Al considerar números complejos cuya parte imaginaria es diferente de cero, no hay un criterio para decidir cuando uno es mayor o menor que otro. Sin embargo, los símbolos $<$ y $>$ se pueden emplear con los valores absolutos de números complejos porque éstos son números reales. Si $|z_1| < |z_2|$, entonces el punto del plano complejo que representa a z_1 está más cerca del origen que el punto que representa a z_2. Además, si $|z_1| = |z_2|$, los puntos que representan a z_1 y z_2 están a la misma distancia del origen del plano complejo; esto es, están en una circunferencia con centro en el origen.

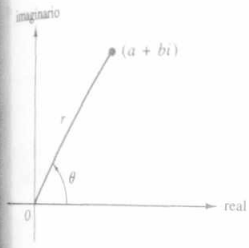


FIGURA 10.66

Si el punto (a, b) está expresado en coordenadas polares con $r \geq 0$, como se indica en la Figura 10.66, entonces

$$a = r\cos\theta \quad \text{y} \quad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

Por tanto,

$$a + bi = r\cos\theta + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

$$a + bi = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

El miembro derecho de esta ecuación se denomina **forma polar** (o **forma trigonométrica**) del número complejo $a + bi$. Suele abreviarse como $r\,\text{cis}\,\theta$, donde *cis* proviene de coseno, i y seno. En contraste, $a + bi$ se denomina **forma cartesiana** (o **forma algebraica**).

Como se requirió que r no fuese negativo, entonces

$$r = |a + bi|$$

El ángulo θ se denomina **argumento** (o **amplitud**) de $a + bi$. El argumento puede medirse en grados o radianes. Como

$$\text{sen}(\theta + 2k\pi) = \text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$$

donde $k \in Z$, entonces si θ es un argumento de $a + bi$, también lo es un ángulo $\theta + 2k\pi$, $k \in Z$. El argumento θ para el cual $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se denomina **argumento principal.** Cuando se emplea el argumento principal, se dice que el número complejo está en la **forma polar estándar.**

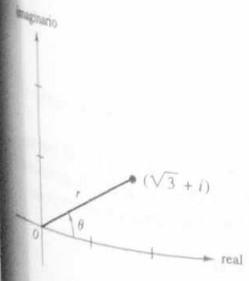


FIGURA 10.67

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Se desea expresar el número complejo $\sqrt{3} + i$ en la forma polar estándar. La Figura 10.67 muestra la representación geométrica de este número. Primero se determinan r y θ a partir de las fórmulas

$$r = |a + bi| \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{b}{r}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como $a = \sqrt{3}$ y $b = 1$, se tiene

$$r = |\sqrt{3} + i| \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$= 2$$

De los valores de sen θ y cos θ, se obtiene $\theta = \frac{1}{6}\pi$. Por tanto,

$$\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$= 2(\cos\tfrac{1}{6}\pi + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{6}\pi)$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Para expresar el número complejo $-3 + 3i$ en la forma polar estándar, primero se determina r y θ con $a = -3$ y $b = 3$. *Véase* la Figura 10.68.

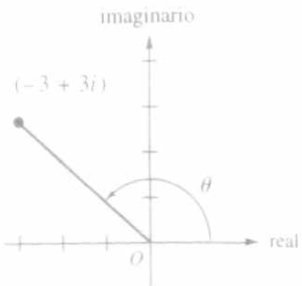


FIGURA 10.68

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 3^2} \qquad = \frac{-3}{3\sqrt{2}} \qquad = \frac{3}{3\sqrt{2}}$$

$$= 3\sqrt{2} \qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De los valores de sen θ y cos θ, se deduce que $\theta = \frac{3}{4}\pi$. Así,

$$-3 + 3i = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$= 3\sqrt{2}(\cos\tfrac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen}\tfrac{3}{4}\pi)$$

Si un número complejo es real, entonces en forma cartesiana es $a + 0i$. Para este número $r = |a|$. Si $a > 0$, cos $\theta = 1$, sen $\theta = 0$, y por tanto, $\theta = 0$; si $a < 0$, entonces cos $\theta = -1$ y sen $\theta = 0$, de modo que $\theta = \pi$. Por tanto, en forma polar

$$a = a(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \qquad \text{si } a > 0$$

$$a = |a|(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi) \qquad \text{si } a < 0$$

Para el número real 0, la forma polar es $0(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde θ es cualquier ángulo.

Para el número imaginario puro $0 + bi$, $r = |b|$. Si $b > 0$, entonces cos $\theta = 0$ y sen $\theta = 1$ y en consecuencia $\theta = \frac{1}{2}\pi$; si $b < 0$, entonces cos $\theta = 0$ y sen $\theta = -1$, de modo que $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Por tanto, en forma polar

$$bi = b(\cos\tfrac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\pi) \qquad \text{si } b > 0$$

$$bi = |b|(\cos\tfrac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\tfrac{3}{2}\pi) \qquad \text{si } b < 0$$

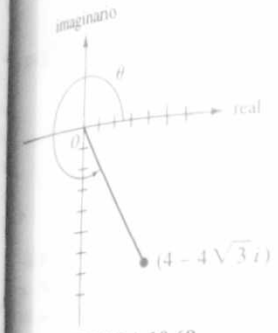


FIGURA 10.69

▸ EJEMPLO 3 *Expresión de números complejos en forma polar estándar*

Escriba los números siguientes en forma polar estándar: **(a)** $4 - 4\sqrt{3}\,i$; **(b)** $2 + 5i$.

Solución Se emplean las fórmulas

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

(a) Si $a + bi = 4 - 4\sqrt{3}\,i$, entonces $a = 4$ y $b = -4\sqrt{3}$. El punto que representa al número complejo se muestra en la Figura 10.69. De las fórmulas se obtiene

$$r = \sqrt{16 + 48} \qquad \cos\theta = \frac{4}{8} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{8}$$

$$= 8 \qquad = \frac{1}{2} \qquad = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ se determina que $\theta = \frac{5}{3}\pi$. Por tanto,

$$4 - 4\sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$= 8(\cos\tfrac{5}{3}\pi + i\operatorname{sen}\tfrac{5}{3}\pi)$$

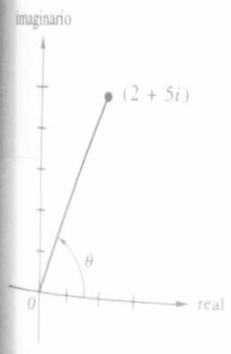


FIGURA 10.70

(b) Si $a + bi = 2 + 5i$, entonces $a = 2$ y $b = 5$. *Véase* la Figura 10.70. Se calcula r, $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ a partir de las fórmulas, obteniéndose

$$r = \sqrt{4 + 25} \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$= \sqrt{29}$$

Como $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, θ está en el primer cuadrante. Además, debido a que $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\tan\theta = \frac{5}{2}$. Así, $\theta = \arctan\frac{5}{2}$. Por tanto,

$$2 + 5i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$= \sqrt{29}[\cos(\arctan\tfrac{5}{2}) + i\operatorname{sen}(\arctan\tfrac{5}{2})]$$

Como $\arctan\frac{5}{2} \approx 1.19$ (o 68.2°), se puede escribir

$$2 + 5i \approx \sqrt{29}(\cos 1.19 + i\operatorname{sen} 1.19)$$

o bien,

$$2 + 5i \approx \sqrt{29}(\cos 68.2° + i\operatorname{sen} 68.2°) \quad \blacktriangleleft$$

El siguiente ejemplo ilustrativo muestra la conversión de la forma polar de un número complejo a la forma cartesiana equivalente.

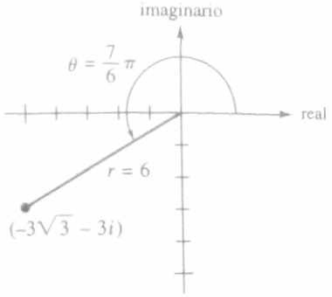


FIGURA 10.71

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

El número complejo $6(\cos \frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi)$ se muestra en la Figura 10.71.

$$6\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi\right) = 6\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= -3\sqrt{3} - 3i$$

A fin de encontrar fórmulas para el producto y cociente de dos números complejos cuando los números se expresan en forma polar, se aplican identidades trigonométricas. El teorema siguiente resume los resultados.

TEOREMA 1

Si

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

entonces

(i) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

(ii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$

Demostración de (i)

$$z_1 \cdot z_2$$
$$= r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$
$$= r_1 r_2[\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1(i \operatorname{sen}\theta_2) + (i \operatorname{sen}\theta_1)\cos\theta_2 + (i \operatorname{sen}\theta_1)(i \operatorname{sen}\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2]$$
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

La demostración de (ii) es semejante y se deja como un ejercicio. *Véase* el ejercicio 50.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$ y $z_2 = 4 - 4\sqrt{3}i$. Del ejemplo ilustrativo 3

$$z_1 = 6(\cos\tfrac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen}\tfrac{7}{6}\pi)$$

y del ejemplo 3(a)

$$z_2 = 8(\cos \tfrac{5}{3}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{5}{3}\pi)$$

Si se aplica el Teorema 1(i), se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 6 \cdot 8[\cos(\tfrac{7}{6}\pi + \tfrac{5}{3}\pi) + i \operatorname{sen}(\tfrac{7}{6}\pi + \tfrac{5}{3}\pi)] \\ &= 48(\cos \tfrac{17}{6}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{17}{6}\pi) \\ &= 48\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= -24\sqrt{3} + 24i \end{aligned}$$

Este resultado se puede comprobar al emplear el procedimiento de la Sección 1.3. Se tiene

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (-3\sqrt{3} - 3i)(4 - 4\sqrt{3}i) \\ &= -12\sqrt{3} + 36i - 12i + 12\sqrt{3}i^2 \\ &= -24\sqrt{3} + 24i \end{aligned}$$

A partir del Teorema 1(ii) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \tfrac{6}{8}[\cos(\tfrac{7}{6}\pi - \tfrac{5}{3}\pi) + i \operatorname{sen}(\tfrac{7}{6}\pi - \tfrac{5}{3}\pi)] \\ &= \tfrac{3}{4}[\cos(-\tfrac{1}{2}\pi) + i \operatorname{sen}(-\tfrac{1}{2}\pi)] \\ &= \tfrac{3}{4}[0 + i(-1)] \\ &= -\tfrac{3}{4}i \end{aligned}$$

Como comprobación se tiene

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-3\sqrt{3} - 3i}{4 - 4\sqrt{3}i} \\ &= \frac{(-3\sqrt{3} - 3i)(4 + 4\sqrt{3}i)}{(4 - 4\sqrt{3}i)(4 + 4\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-12\sqrt{3} - 36i - 12i - 12\sqrt{3}i^2}{16 - 48i^2} \\ &= \frac{-48i}{64} \\ &= -\frac{3}{4}i \end{aligned}$$

◀

▸ EJEMPLO 4 *Expresión en forma cartesiana del producto de dos números complejos dados en forma polar*

Escriba

$$\tfrac{2}{3}(\cos\tfrac{2}{9}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{2}{9}\pi) \cdot 6(\cos\tfrac{19}{36}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{19}{36}\pi)$$

en la forma $a + bi$.

Solución A partir del Teorema 1(i)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}(\cos\tfrac{2}{9}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{2}{9}\pi) \cdot 6(\cos\tfrac{19}{36}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{19}{36}\pi)\\
&\quad = \tfrac{2}{3} \cdot 6[\cos(\tfrac{2}{9}\pi + \tfrac{19}{36}\pi) + i\,\text{sen}(\tfrac{2}{9}\pi + \tfrac{19}{36}\pi)]\\
&\quad = 4(\cos\tfrac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{3}{4}\pi)\\
&\quad = 4\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\\
&\quad = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

◂

▸ EJEMPLO 5 *Expresión en forma cartesiana del cociente de dos números complejos dados en forma polar*

Escriba el cociente siguiente en la forma $a + bi$:

$$\frac{4(\cos 345^\circ + i\,\text{sen}\,345^\circ)}{5(\cos 105^\circ + i\,\text{sen}\,105^\circ)}$$

Solución Del Teorema 1 (ii)

$$\begin{aligned}
\frac{4(\cos 345^\circ + i\,\text{sen}\,345^\circ)}{5(\cos 105^\circ + i\,\text{sen}\,105^\circ)} &= \frac{4}{5}[\cos(345^\circ - 105^\circ) + i\,\text{sen}(345^\circ - 105^\circ)]\\
&= \frac{4}{5}[\cos(240^\circ + i\,\text{sen}\,240^\circ]\\
&= \frac{4}{5}\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\\
&= -\frac{2}{5} - \frac{2\sqrt{3}}{5}i
\end{aligned}$$

◂

EJERCICIOS 10.5

En los ejercicios 1 a 8, muestre la representación geométrica del número complejo como un punto en el plano complejo.

1. **(a)** $4 + 5i$ **(b)** $7 - 8i$
2. **(a)** $7 + i$ **(b)** $-4 + 9i$
3. **(a)** $-1 + 6i$ **(b)** $-3 - i$
4. **(a)** $2 - 6i$ **(b)** $-5 - 3i$
5. **(a)** 2 **(b)** $-6i$

6. (a) -4 (b) $3i$

7. (a) $2 - 6i$ (b) $2 + 6i$

8. (a) $-4 + 3i$ (b) $-4 - 3i$

En los ejercicios 9 a 16, determine el valor absoluto indicado.

9. (a) $|5 + 2i|$ (b) $|-1 + 2i|$

10. (a) $|8 - 3i|$ (b) $|-2 - 5i|$

11. (a) $|3|$ (b) $|3i|$

12. (a) $|5|$ (b) $|5i|$

13. (a) $|-2|$ (b) $|-2i|$

14. (a) $|-7|$ (b) $|-7i|$

15. (a) $|-6 + 8i|$ (b) $|-6 - 8i|$

16. (a) $|6 + i|$ (b) $|6 - i|$

En los ejercicios 17 a 22, muestre la representación geométrica del número complejo en el plano complejo y escriba dicho número en forma cartesiana.

17. (a) $3(\cos \frac{1}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi)$
(b) $3(\cos \frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi)$

18. (a) $4(\cos \frac{1}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi)$
(b) $4(\cos \frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi)$

19. (a) $6(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$
(b) $6(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

20. (a) $5(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$
(b) $5(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

21. (a) $2(\cos \frac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi)$
(b) $\frac{1}{2}(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$

22. (a) $3(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$
(b) $\frac{1}{2}(\cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi)$

En los ejercicios 23 a 26, exprese el número complejo en forma polar estándar.

23. (a) $4 - 4i$ (b) 6 (c) i

24. (a) $-5 + 5i$ (b) 0 (c) $-4i$

25. (a) $-3\sqrt{3} + 3i$ (b) -7 (c) $-7i$

26. (a) $2 - 2i$ (b) 5 (c) $5i$

En los ejercicios 27 a 30, exprese el número complejo en forma polar estándar donde el argumento se escribe en (a) notación de función inversa, (b) medida en radianes con dos decimales y (c) medida en grados con aproximación de décimos de grado.

27. $3 + 4i$ 28. $5 + i$

29. $1 - 2i$ 30. $-3 + 2i$

En los ejercicios 31 a 38, exprese el producto en forma cartesiana.

31. $2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°) \cdot 5(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)$

32. $(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°) \cdot 4(\cos 110° + i \operatorname{sen} 110°)$

33. $3(\cos \frac{1}{18}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{18}\pi) \cdot \frac{2}{3}(\cos \frac{5}{18}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{18}\pi)$

34. $10(\cos \frac{1}{6}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi) \cdot \frac{2}{5}(\cos \frac{1}{12}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{12}\pi)$

35. $4(\cos \frac{5}{9}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{9}\pi) \cdot (\cos \frac{7}{36}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{36}\pi)$

36. $\frac{3}{4}(\cos \frac{7}{18}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{18}\pi) \cdot \frac{8}{3}(\cos \frac{4}{9}\pi + i \operatorname{sen} \frac{4}{9}\pi)$

37. $5(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°) \cdot \frac{4}{5}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)$

38. $2(\cos 145° + i \operatorname{sen} 145°) \cdot 3(\cos 95° + i \operatorname{sen} 95°)$

En los ejercicios 39 a 46, exprese el cociente en forma cartesiana.

39. $6(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°) \div 3(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$

40. $4(\cos 65° + i \operatorname{sen} 65°) \div 2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

41. $8(\cos \frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi) \div 2(\cos \frac{7}{12}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{12}\pi)$

42. $2(\cos \frac{17}{12}\pi + i \operatorname{sen} \frac{17}{12}\pi) \div 6(\cos \frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi)$

43. $5(\cos \frac{5}{18}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{18}\pi) \div (\cos \frac{11}{18}\pi + i \operatorname{sen} \frac{11}{18}\pi)$

44. $6(\cos \frac{5}{18}\pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{18}\pi) \div \frac{3}{2}(\cos \frac{7}{9}\pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{9}\pi)$

45. $\frac{2}{3}(\cos 350° + i \operatorname{sen} 350°) \div (\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$

46. $3(\cos 310° + i \operatorname{sen} 310°) \div \frac{1}{2}(\cos 85° + i \operatorname{sen} 85°)$

47. Pruebe que si z es un número complejo tal que $|z| = 1$, entonces $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$. *Sugerencia:* muestre que $\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)$ es a la vez el conjugado y recíproco de $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

48. Pruebe que si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

y

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

49. Compare la definición de valor absoluto de un número real con la definición del valor absoluto de un número complejo y explique por qué la primera definición es un caso especial de la segunda.

50. Demuestre el Teorema 1(ii).

10.6 POTENCIAS Y RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS Y TEOREMA DE De MOIVRE

OBJETIVOS

1. Aprender el teorema de De Moivre para enteros positivos.
2. Encontrar potencias enteras positivas de números complejos mediante el teorema de De Moivre.
3. Definir exponentes cero y negativos de números complejos.
4. Aprender el teorema de De Moivre para todos los enteros.
5. Encontrar potencias enteras negativas de números complejos mediante el teorema de De Moivre.
6. Definir una raíz n-ésima de un número complejo.
7. Aprender el teorema que proporciona las n raíces n-ésimas de un número complejo.
8. Encontrar las n raíces n-ésimas de la unidad y mostrar sus representaciones geométricas.
9. Encontrar las n raíces n-ésimas de un número mediante las n raíces n-ésimas de la unidad.
10. Expresar las n raíces n-ésimas de un número complejo en forma cartesiana.

La forma polar de números complejos se puede aplicar para calcular sus potencias y raíces. El procedimiento se prueba mediante un teorema llamado teorema de De Moivre, en honor al matemático **Abraham De Moivre** (1667-1754), quien nació en Francia pero vivió la mayor parte de su vida en Londres. Fue amigo de Sir **Issac Newton**, uno de los inventores del Cálculo. Para llegar a este teorema, se considera el número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y se determinan algunas potencias enteras positivas de z. En efecto

$$z^1 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \tag{1}$$

Del Teorema 1(i) de la Sección 10.5

$$\begin{aligned} z^2 &= [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^2[\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

$$z^3 = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^2$$

Al sustituir de (2) en el miembro derecho, se obtiene

$$\begin{aligned} z^3 &= [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)][r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)] \\ &= r^3[\cos(\theta + 2\theta) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) \end{aligned} \tag{3}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) De (2)

$$\begin{aligned}[4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]^2 &= 4^2[\cos(2 \cdot 60^\circ) + i \operatorname{sen}(2 \cdot 60^\circ)] \\ &= 16(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \\ &= 16\left[-\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i\end{aligned}$$

(b) De (3)

$$\begin{aligned}[4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]^3 &= 4^3[\cos(3 \cdot 60^\circ) + i \operatorname{sen}(3 \cdot 60^\circ)] \\ &= 64(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) \\ &= 64[-1 + i(0)] \\ &= -64\end{aligned}$$

◀

Las ecuaciones (1), (2) y (3) son casos particulares del teorema de De Moivre cuando n es igual a 1, 2 y 3. Enseguida se enuncia este teorema para cualquier entero positivo n.

TEOREMA 1 *Teorema de De Moivre para enteros positivos*

Si n es cualquier entero positivo,

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

La demostración de este teorema requiere de inducción matemática, tema de la Sección 12.5. Se dará la demostración en el ejemplo 6 de dicha sección.

▶ EJEMPLO 1 *Determinación de potencias de números complejos con el teorema de De Moivre*

Utilice el teorema de De Moivre para determinar **(a)** $(1 + i)^5$; **(b)** $(\sqrt{3} - i)^6$.

Solución

(a) Primero se escribe $1 + i$ en forma polar. Si $1 + i = a + bi$, entonces $a = 1$ y $b = 1$. Así,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2} \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

De donde $\theta = \frac{1}{4}\pi$. Por tanto,

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos \tfrac{1}{4}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi)$$

Del teorema de De Moivre

$$(1 + i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos \tfrac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{5}{4}\pi)$$

$$= 4\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= -4 - 4i$$

(b) Si $\sqrt{3} - i = a + bi$, entonces $a = \sqrt{3}$ y $b = -1$. En consecuencia

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

$$= 2 \qquad = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = -\frac{1}{2}$$

De donde $\theta = \frac{11}{6}\pi$. Por tanto,

$$\sqrt{3} - i = 2(\cos \tfrac{11}{6}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{11}{6}\pi)$$

Del teorema de De Moivre

$$(\sqrt{3} - i)^6 = 2^6[\cos(6 \cdot \tfrac{11}{6}\pi) + i \operatorname{sen}(6 \cdot \tfrac{11}{6}\pi)]$$

$$= 64(\cos 11\pi + i \operatorname{sen} 11\pi)$$

$$= 64(-1 + i \cdot 0)$$

$$= -64$$

Se desea definir el cero y los enteros negativos como exponentes de números complejos de modo que se cumpla el teorema de De Moivre para estos enteros.

Si el teorema debe ser válido para $n = 0$, entonces si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$,

$$z^0 = r^0(\cos 0 \cdot \theta + i \operatorname{sen} 0 \cdot \theta)$$

$$= 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

$$= 1(1 + i \cdot 0)$$

$$= 1$$

Si el teorema debe ser válido para $-n$ cuando $n > 0$, entonces,

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)]$$

Como $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$ y $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen} n\theta$, esta ecuación se transforma en

$$z^{-n} = \frac{\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta}{r^n}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del numerador se obtiene

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta)(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}{r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)} \\ &= \frac{\cos^2 n\theta - i^2 \operatorname{sen}^2 n\theta}{r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)} \\ &= \frac{\cos^2 n\theta + \operatorname{sen}^2 n\theta}{r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)} \\ &= \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)} \\ &= \frac{1}{z^n} \end{aligned}$$

En consecuencia, para que el teorema de De Moivre sea válido para los exponentes cero y enteros negativos, se establece la siguiente definición, la cual es consistente con la definición de exponentes cero y enteros negativos de números reales.

DEFINICIÓN **Exponentes cero y negativos de números complejos**

Si z es un número complejo y $z \neq 0 + 0i$, y n es un entero positivo,

(i) $z^0 = 1$

(ii) $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$

Del teorema de De Moivre para enteros positivos y de la definición anterior se tiene el teorema de De Moivre para todos los enteros.

TEOREMA 2 *Teorema de De Moivre para todos los enteros*

Si k es cualquier entero,

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)$$

▸ EJEMPLO 2 *Determinación de potencias enteras negativas de números complejos con el teorema de De Moivre*

Emplee el teorema de De Moivre para determinar **(a)** $(-1 + \sqrt{3}i)^{-4}$; **(b)** $(-1 - i)^{-14}$

Solución

(a) Si $-1 + \sqrt{3}i = a + bi$, entonces $a = -1$ y $b = \sqrt{3}$. En consecuencia,

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

$$= 2 \qquad = -\frac{1}{2} \qquad = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así, $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Por tanto,

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)$$

Del teorema de De Moivre

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{-4} = 2^{-4}\left[\cos\left(-4 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(-4 \cdot \frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\cos\left(-\frac{8}{3}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{8}{3}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$$

(b) Si $-1 - i = a + bi$, entonces $a = -1$ y $b = -1$. Así,

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

$$= \sqrt{2} \qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, $\theta = \frac{5}{4}\pi$. De modo que

$$-1 - i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{5}{4}\pi + i\operatorname{sen}\tfrac{5}{4}\pi)$$

Del teorema de De Moivre

$$
\begin{aligned}
(-1 - i)^{-14} &= (\sqrt{2})^{-14}[\cos(-14 \cdot \tfrac{5}{4}\pi) + i\,\text{sen}(-14 \cdot \tfrac{5}{4}\pi)] \\
&= \frac{1}{2^7}\left[\cos\left(-\frac{35}{2}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{35}{2}\pi\right)\right] \\
&= \frac{1}{128}(0 + i \cdot 1) \\
&= \frac{1}{128}i
\end{aligned}
$$

◀

Para el estudio de las raíces de números complejos, primero se define una raíz n-ésima.

DEFINICIÓN **Raíz n-ésima de un número complejo**

Si z es un número complejo diferente de cero y n es un entero positivo, entonces se dice que el número w es una **raíz n-ésima** de z si

$$w^n = z$$

Para obtener una fórmula para calcular raíces n-ésimas de números complejos, se supone que $w^n = z$ y

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \quad \text{y} \quad w = s(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$$

Se desea obtener fórmulas para s y ϕ en términos de r y θ. Como $w^n = z$,

$$[s(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)]^n = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Al aplicar el teorema de De Moivre al miembro izquierdo, se obtiene

$$s^n(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \qquad (4)$$

Esta ecuación es una igualdad de dos números complejos. Por tanto, los valores absolutos de estos números complejos son iguales, en consecuencia,

$$s^n = r$$

$$s = r^{1/n}$$

Debido a que $s^n = r$, entonces de (4)

$$\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

A partir de esta ecuación y de la definición de dos números complejos,

$$\cos n\phi = \cos\theta \quad \text{y} \quad \text{sen}\,n\phi = \text{sen}\,\theta$$

Puesto que el periodo del seno y del coseno es 2π, estas ecuaciones son válidas si y sólo si

$$n\phi = \theta + k \cdot 2\pi \qquad k \in Z$$

Por tanto,

$$\phi = \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \qquad k \in Z$$

Con este valor de ϕ y $s = r^{1/n}$, y como $w = s(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$, se obtiene

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right] \qquad k \in Z$$

Si en esta ecuación k se sustituye sucesivamente por $0, 1, \ldots, n - 1$, se obtienen n valores distintos de w que son todas las raíces n-ésimas de z. Observe que si k se sustituye por cualquier entero mayor que $n - 1$ o menor que 0, no se obtienen valores nuevos de w.

Por ejemplo, si $k = n$ en la ecuación anterior, el miembro derecho es

$$r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + n \cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + n \cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$
$$= r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right)\right]$$

lo cual proporciona el mismo valor que $k = 0$. Así, se ha demostrado el teorema siguiente.

TEOREMA 3 *Raíces n-ésimas de números complejos*

Si z es un número complejo distinto de cero donde

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

y n es un entero positivo, entonces z tiene n raíces n-ésimas distintas determinadas por

$$r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right] \qquad k \in Z$$

donde k es igual a $0, 1, \ldots, n - 1$.

Si θ se mide en grados, entonces la fórmula del Teorema 3 se escribe como

$$r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{n}\right)\right] \qquad k \in Z$$

El valor absoluto de cada una de las raíces n-ésimas del número complejo z es

$$\sqrt{(r^{1/n})^2\left[\cos^2\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right]}$$
$$= \sqrt{(r^{1/n})^2(1)}$$
$$= r^{1/n} \quad (\text{porque } r > 0)$$

De modo que la representación geométrica de las raíces n-ésimas están en una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt[n]{r}$. Además, como la diferencia de los argumentos de raíces n-ésimas sucesivas es $2\pi/n$, están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

A fin de determinar las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}\,i$, primero se escribe este número en forma polar. Si $-8 + 8\sqrt{3}\,i = a + bi$, entonces $a = -8$ y $b = 8\sqrt{3}$. Por tanto,

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{b}{r}$$
$$= \sqrt{64 + 64(3)} \qquad = \frac{-8}{16} \qquad = \frac{8\sqrt{3}}{16}$$
$$= 8\sqrt{4} \qquad = -\frac{1}{2} \qquad = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 16$$

De donde $\theta = 120^\circ$. En consecuencia,

$$-8 + 8\sqrt{3}\,i = 16(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ)$$

Del Teorema 3, las cuatro raíces cuartas están dadas por

$$16^{1/4}\left[\cos\left(\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow \quad 2[\cos(30^\circ + k \cdot 90^\circ) + i\,\text{sen}(30^\circ + k \cdot 90^\circ)]$$

donde k es igual a 0, 1, 2, 3. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1, 2 y 3, se obtiene

$$2(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = \sqrt{3} + i$$
$$2(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = -1 + \sqrt{3}\,i$$
$$2(\cos 210^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ) = -\sqrt{3} - i$$
$$2(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ) = 1 - \sqrt{3}\,i$$

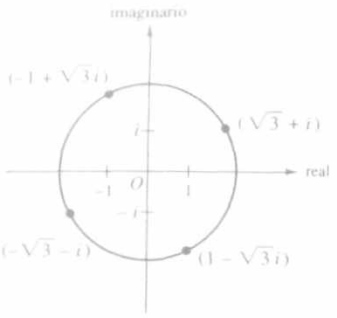


FIGURA 10.72

Observe que si k se sustituye por cualquier otro entero, se obtiene uno de estos cuatro números complejos. Por ejemplo, si $k = 4$, se tiene

$$2(\cos 390^\circ + i \operatorname{sen} 390^\circ) = \sqrt{3} + i$$

y si $k = -1$, se obtiene

$$2[\cos(-60^\circ) + i \operatorname{sen}(-60^\circ)] = 1 - \sqrt{3}i$$

Las representaciones geométricas de estas cuatro raíces se muestran en la Figura 10.72. Las cuatro están en la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio 2 y están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia. Note que las cuatro aparecen en pares donde cada miembro de un par es el opuesto (inverso aditivo) del otro miembro: $\sqrt{3} + i$ y $-\sqrt{3} - i$; $-1 + \sqrt{3}i$ y $1 - \sqrt{3}i$. ◂

▸ EJEMPLO 3 *Determinación de las n raíces n-ésimas de 1 y muestra de sus representaciones geométricas*

Determine las seis raíces sextas de 1 y muestre sus representaciones geométricas.

Solución Si $1 = a + bi$, entonces $a = 1$ y $b = 0$. Por tanto,

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$

$$= 1 \qquad\qquad = 1 \qquad\qquad = 0$$

Así, $\theta = 0$. Por tanto

$$1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

Las seis raíces sextas de 1 están dadas por

$$1^{1/6}\left[\cos\left(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{6}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos \tfrac{1}{3}k\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}k\pi$$

donde k es igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1, 2, 3, 4 y 5, se obtiene

$$\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$\cos\frac{1}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

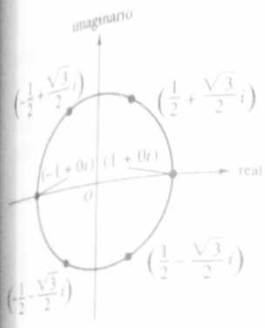


FIGURA 10.73

La Figura 10.73 muestra las representaciones geométricas de las seis raíces. Todas están en la circunferencia unitaria espaciadas igualmente a su alrededor. ◀

Las raíces complejas de 1 se denominan **raíces de la unidad.** Debido a que

$$1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$$

las n raíces n-ésimas de la unidad están dadas por

$$\cos\frac{k \cdot 2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{k \cdot 2\pi}{n}$$

donde k es igual a $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Las cuatro raíces cuartas de la unidad están dadas por

$$\cos\frac{k \cdot 2\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{k \cdot 2\pi}{4}$$

donde k es igual a 0, 1, 2, 3. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1, 2 y 3, se obtiene

$$\cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\pi = i$$

$$\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$$

$$\cos\tfrac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{3}{2}\pi = -i$$

◀

Las raíces de la unidad pueden emplearse para obtener las raíces de otros números reales como se muestra en el ejemplo ilustrativo y ejemplo siguientes.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Utilice las cuatro raíces cuartas de la unidad para determinar las cuatro raíces cuartas de 81. Una raíz cuarta real de 81 es 3. Si cada una de las cuatro raíces cuartas de la unidad determinadas en el ejemplo ilustrativo 3 se multiplican por 3, se obtiene

$$3(1) = 3 \qquad 3(i) = 3i \qquad 3(-1) = -3 \qquad 3(-i) = -3i$$

De modo que las cuatro raíces de 81 son 3, −3, $3i$ y $-3i$. ◀

▸ EJEMPLO 4 *Determinación de las n raíces n-ésimas de un número al emplear las n raíces n-ésimas de la unidad*

Emplee las seis raíces sextas de la unidad, determinadas en el ejemplo 3, para obtener las seis raíces sextas de 64.

Solución Una raíz sexta real de 64 es 2. Si cada una de las seis raíces sextas de la unidad se multiplica por 2, se obtienen las seis raíces sextas de 64:

$$2(1) = 2$$

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2(-1) = -2$$

$$2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

◂

Las n raíces n-ésimas de la unidad pueden verse en la graficadora. Consulte el procedimiento a seguir en los ejercicios 39 y 40.

Observe que las cuatro raíces cuartas de 81, obtenidas en el ejemplo ilustrativo 4, y las seis raíces sextas de 64, obtenidas en el ejemplo 4, también pueden determinarse algebraicamente sin el teorema de De Moivre al resolver las ecuaciones $x^4 - 81 = 0$ y $x^6 - 64 = 0$, respectivamente (*véase* los ejercicios 43 y 44 de la Sección 2.4). Sin embargo, para encontrar las siete raíces séptimas de 128, por ejemplo, se requiere el teorema de De Moivre (*véase* el ejercicio 23). También se necesita este teorema en el ejemplo siguiente.

▸ EJEMPLO 5 *Determinación de las n raíces n-ésimas de un número complejo*

Determine las dos raíces cuadradas de i.

Solución Se escribe el número i en forma polar. Si $i = a + bi$, entonces $a = 0$ y $b = 1$. En consecuencia,

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así,

$$i = 1(\cos \tfrac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi)$$

Del Teorema 3, las dos raíces cuadradas de i están dadas por

$$1^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi}{2}\right)\right]$$

donde k es igual a 0, 1. Al sustituir k por 0 y 1, se obtiene, respectivamente,

$$1\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$1\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

◄

► EJEMPLO 6 *Expresión de las n raíces n-ésimas de un número complejo en forma cartesiana*

Exprese cada una de las tres raíces cúbicas de $3 + 4i$ en la forma $a + bi$. Aproxime los valores de a y b a dos decimales.

Solución Si $3 + 4i = a + bi$, entonces $a = 3$ y $b = 4$. De modo que

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3}{5} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = \frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

De donde $\theta = \arctan\frac{4}{3}$. Por tanto,

$$3 + 4i = 5[\cos(\arctan\tfrac{4}{3}) + i \operatorname{sen}(\arctan\tfrac{4}{3})]$$

En consecuencia, las tres raíces cúbicas de $3 + 4i$ están dadas por

$$5^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{4}{3} + k \cdot 2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\arctan\frac{4}{3} + k \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$$

donde k es igual a 0, 1, 2. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1 y 2 y utilizándose una calculadora para determinar los valores aproximados, se obtiene

$$5^{1/3}[\cos\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3})] + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3})]$$
$$\approx 1.710[0.953 + i(0.304)] \approx 1.63 + 0.52i$$
$$5^{1/3}[\cos\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 2\pi) + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 2\pi)]$$
$$\approx 1.710[-0.740 + i(0.673)] \approx -1.26 + 1.15i$$
$$5^{1/3}[\cos\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 4\pi) + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 4\pi)]$$
$$\approx 1.710[-0.213 + i(-0.977)] \approx -0.36 - 1.67i$$

◄

EJERCICIOS 10.6

En los ejercicios 1 a 20, emplee el teorema de De Moivre para determinar las potencias indicadas.

1. $[2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]^2$
2. $[4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)]^2$
3. $[4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)]^3$
4. $[2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]^4$
5. $(\cos \frac{1}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi)^4$
6. $[3(\cos \frac{1}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi)]^5$
7. $[2(\cos 48^\circ + i \operatorname{sen} 48^\circ)]^5$
8. $[(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)]^6$
9. $(1 + i)^5$
10. $(-1 + i)^3$
11. $(-1 - \sqrt{3}i)^6$
12. $(\sqrt{3} - i)^6$
13. $(-4 + 4i)^5$
14. $\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^5$
15. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$
16. $(-3 - 3i)^4$
17. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$
18. $(2 + 2\sqrt{3}i)^5$
19. $(-3\sqrt{3} + 3i)^{30}$
20. $(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i)^{40}$
21. **(a)** Encuentre las tres raíces cúbicas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Use el resultado del inciso (a) para determinar las tres raíces cúbicas de 27.
22. **(a)** Halle las cinco raíces quintas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Use el resultado del inciso (a) para determinar las cinco raíces quintas de 243.
23. **(a)** Encuentre las siete raíces séptimas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Use el resultado del inciso (a) para determinar las siete raíces séptimas de 128.
24. **(a)** Halle las ocho raíces octavas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Emplee el resultado del inciso (a) para determinar las ocho raíces octavas de 256.

En los ejercicios 25 a 28, resuelva la ecuación en dos formas: (a) por el teorema de De Moivre; (b) algebraicamente sin el teorema de De Moivre.

25. $x^4 - 16 = 0$
26. $x^3 - 125 = 0$
27. $x^3 + i = 0$ [*Sugerencia* para el inciso (b): Escriba $x^3 + i$ como $x^3 - i^2$]
28. $x^3 - i = 0$ [*Sugerencia* para el inciso (b): Escriba $x^3 - i$ como $x^3 + i^2$]

En los ejercicios 29 a 38, determine las raíces indicadas y escribalas en forma cartesiana. En los ejercicios 33 a 38, en la forma cartesiana aproxime los valores de a y b a dos decimales.

29. Las dos raíces cuadradas de $-4i$
30. Las dos raíces cuadradas de $25i$
31. Las tres raíces cúbicas de i
32. Las tres raíces cúbicas de $-i$
33. Las tres raíces cúbicas de $4 - 4\sqrt{3}i$
34. Las tres raíces cúbicas de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
35. Las cuatro raíces cuartas de $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
36. Las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$
37. Las cinco raíces quintas de $-4 + 3i$
38. Las cinco raíces quintas de $2 - i$
39. Las representaciones geométricas de las n raíces n-ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria. Es decir, las tres raíces cúbicas de la unidad son los vértices de un triángulo equilátero inscrito, las cuatro raíces cuartas de la unidad son los vértices de un cuadrado inscrito, las cinco raíces quintas de la unidad son los vértices de un pentágono regular inscrito, y así sucesivamente. Explique por qué esto es así.
40. El enunciado del ejercicio 39 proporciona el método siguiente para ver las n raíces n-ésimas de la unidad en la graficadora. (i) Active en la calculadora los modos paramétrico y de grados. (ii) Haga $x(t) = \cos t$ y $y(t) = \operatorname{sen} t$. (iii) Se elige: t mín = 0 y t máx = 360, t step = $360/n$. (iv) Se elige el rectángulo de inspección $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (v) Emplee la tecla de rastreo (trace) para ver cada una de las n raíces n-ésimas de la unidad. Aplique este procedimiento para ver **(a)** las tres raíces cúbicas de la unidad; **(b)** las cuatro raíces cuartas de la unidad;

(c) las cinco raíces quintas de la unidad; (d) las seis raíces sextas de la unidad.

41. Obtenga las identidades del coseno y seno de valor doble al igualarse las partes real e imaginaria de las dos expresiones para $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2$ obtenidas en las dos formas siguientes: (1) al emplear el teorema de De Moivre; (2) al multiplicar $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ por sí mismo.

En los ejercicios 42 a 45, utilice el método del ejercicio 41 para obtener la identidad indicada.

42. Identidad para $\cos 3\theta$ en términos de $\cos\theta$

43. Identidad para $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$

44. Identidad para $\operatorname{sen} 4\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$

45. Identidad para $\cos 4\theta$ en términos de $\cos\theta$

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 10

VISIÓN RETROSPECTIVA

10.1 Se definió un vector como un par ordenado de números reales y se representó geométricamente por un segmento rectilíneo dirigido. La representación de posición se empleó para ilustrar de manera geométrica hechos importantes acerca de vectores, entre ellos las definiciones de magnitud, ángulo director, suma y resta de vectores, así como el producto de un escalar y un vector. Se expresó un vector en términos de su magnitud y ángulo director, y de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Los enunciados de problemas que implican vectores trataron sobre fuerza, navegación aérea y marítima, y geometría.

10.2 Como preludio al uso de los vectores en Cálculo, se trataron las funciones vectoriales. Se estableció que una curva definida por una ecuación vectorial de la forma $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, también está definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Se determinó una ecuación cartesiana de una gráfica a partir de su ecuación vectorial, o del par de ecuaciones paramétricas equivalentes, y se dibujó la gráfica a mano y en la graficadora. Se definió una cicloide y se dedujeron sus ecuaciones paramétricas. Los enunciados de problemas implicaron el movimiento de un proyectil.

10.3 Se definieron las coordenadas polares de un punto, después se localizó un punto a partir de sus coordenadas polares y se encontraron otros conjuntos de coordenadas polares del punto. Se emplearon las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas y coordenadas polares de un punto, para determinar una ecuación cartesiana de una gráfica a partir de la ecuación polar, y una ecuación polar a partir de la ecuación cartesiana.

10.4 Las gráficas polares tratadas en esta sección incluyeron rectas, circunferencias, caracoles, rosas y espirales. Se presentó el teorema que muestra cómo puede definirse una gráfica polar mediante un par de ecuaciones paramétricas y se aplicó el teorema para trazar gráficas polares.

10.5 Antes de definir la forma polar de un número complejo, se representaron los números complejos como puntos en el plano complejo y se definió el valor absoluto de un número complejo. Se obtuvieron fórmulas para el producto y el cociente de dos números complejos dados en forma polar, y se expresaron el producto y el cociente en forma cartesiana.

10.6 La forma polar de un número complejo se presentó en el teorema de De Moivre. Primero se enunció el teorema para enteros positivos y se empleó para determinar potencias enteras positivas de números complejos. Después se definieron los exponentes cero y negativos y se enunció el teorema de De Moivre para todos los enteros y se determinaron potencias enteras negativas de números complejos. Posteriormente, se definió una raíz n-ésima de un número complejo y se demostró el teorema que proporciona las n raíces n-ésimas de un número complejo. Las n raíces n-ésimas de la unidad se utilizaron para obtener las n raíces n-ésimas de un número complejo. Se mostró cómo expresar estas raíces en forma cartesiana.

$$r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{n}\right)\right] \qquad k \in Z$$

El valor absoluto de cada una de las raíces n-ésimas del número complejo z es

$$\sqrt{(r^{1/n})^2\left[\cos^2\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right]}$$
$$= \sqrt{(r^{1/n})^2(1)}$$
$$= r^{1/n} \quad (\text{porque } r > 0)$$

De modo que la representación geométrica de las raíces n-ésimas están en una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt[n]{r}$. Además, como la diferencia de los argumentos de raíces n-ésimas sucesivas es $2\pi/n$, están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

A fin de determinar las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}\,i$, primero se escribe este número en forma polar. Si $-8 + 8\sqrt{3}\,i = a + bi$, entonces $a = -8$ y $b = 8\sqrt{3}$. Por tanto,

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{b}{r}$$
$$= \sqrt{64 + 64(3)} \qquad = \frac{-8}{16} \qquad = \frac{8\sqrt{3}}{16}$$
$$= 8\sqrt{4} \qquad = -\frac{1}{2} \qquad = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 16$$

De donde $\theta = 120^\circ$. En consecuencia,

$$-8 + 8\sqrt{3}\,i = 16(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ)$$

Del Teorema 3, las cuatro raíces cuartas están dadas por

$$16^{1/4}\left[\cos\left(\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow \quad 2[\cos(30^\circ + k \cdot 90^\circ) + i\,\text{sen}(30^\circ + k \cdot 90^\circ)]$$

donde k es igual a 0, 1, 2, 3. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1, 2 y 3, se obtiene

$$2(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = \sqrt{3} + i$$
$$2(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ) = -1 + \sqrt{3}\,i$$
$$2(\cos 210^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ) = -\sqrt{3} - i$$
$$2(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ) = 1 - \sqrt{3}\,i$$

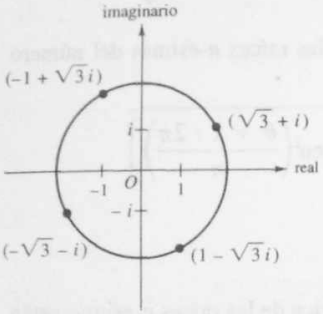


FIGURA 10.72

Observe que si k se sustituye por cualquier otro entero, se obtiene uno de estos cuatro números complejos. Por ejemplo, si $k = 4$, se tiene

$$2(\cos 390° + i \operatorname{sen} 390°) = \sqrt{3} + i$$

y si $k = -1$, se obtiene

$$2[\cos(-60°) + i \operatorname{sen}(-60°)] = 1 - \sqrt{3}i$$

Las representaciones geométricas de estas cuatro raíces se muestran en la Figura 10.72. Las cuatro están en la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio 2 y están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia. Note que las cuatro aparecen en pares donde cada miembro de un par es el opuesto (inverso aditivo) del otro miembro: $\sqrt{3} + i$ y $-\sqrt{3} - i$; $-1 + \sqrt{3}i$ y $1 - \sqrt{3}i$. ◂

▸ EJEMPLO 3 *Determinación de las n raíces n-ésimas de 1 y muestra de sus representaciones geométricas*

Determine las seis raíces sextas de 1 y muestre sus representaciones geométricas.

Solución Si $1 = a + bi$, entonces $a = 1$ y $b = 0$. Por tanto,

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$$
$$= 1 \qquad = 1 \qquad = 0$$

Así, $\theta = 0$. Por tanto

$$1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

Las seis raíces sextas de 1 están dadas por

$$1^{1/6}\left[\cos\left(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{6}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos \tfrac{1}{3}k\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}k\pi$$

donde k es igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1, 2, 3, 4 y 5, se obtiene

$$\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$\cos\frac{1}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

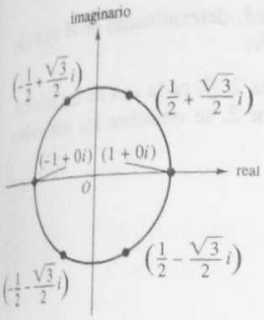


FIGURA 10.73

La Figura 10.73 muestra las representaciones geométricas de las seis raíces. Todas están en la circunferencia unitaria espaciadas igualmente a su alrededor. ◀

Las raíces complejas de 1 se denominan **raíces de la unidad.** Debido a que

$$1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$$

las n raíces n-ésimas de la unidad están dadas por

$$\cos\frac{k \cdot 2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{k \cdot 2\pi}{n}$$

donde k es igual a $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Las cuatro raíces cuartas de la unidad están dadas por

$$\cos\frac{k \cdot 2\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{k \cdot 2\pi}{4}$$

donde k es igual a 0, 1, 2, 3. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1, 2 y 3, se obtiene

$$\cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\pi = i$$

$$\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$$

$$\cos\tfrac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\tfrac{3}{2}\pi = -i$$ ◀

Las raíces de la unidad pueden emplearse para obtener las raíces de otros números reales como se muestra en el ejemplo ilustrativo y ejemplo siguientes.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Utilice las cuatro raíces cuartas de la unidad para determinar las cuatro raíces cuartas de 81. Una raíz cuarta real de 81 es 3. Si cada una de las cuatro raíces cuartas de la unidad determinadas en el ejemplo ilustrativo 3 se multiplican por 3, se obtiene

$$3(1) = 3 \qquad 3(i) = 3i \qquad 3(-1) = -3 \qquad 3(-i) = -3i$$

De modo que las cuatro raíces de 81 son 3, -3, $3i$ y $-3i$. ◀

▸ EJEMPLO 4 *Determinación de las n raíces n-ésimas de un número al emplear las n raíces n-ésimas de la unidad*

Emplee las seis raíces sextas de la unidad, determinadas en el ejemplo 3, para obtener las seis raíces sextas de 64.

Solución Una raíz sexta real de 64 es 2. Si cada una de las seis raíces sextas de la unidad se multiplica por 2, se obtienen las seis raíces sextas de 64:

$$2(1) = 2$$

$$2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2(-1) = -2$$

$$2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

◂

Las n raíces n-ésimas de la unidad pueden verse en la graficadora. Consulte el procedimiento a seguir en los ejercicios 39 y 40.

Observe que las cuatro raíces cuartas de 81, obtenidas en el ejemplo ilustrativo 4, y las seis raíces sextas de 64, obtenidas en el ejemplo 4, también pueden determinarse algebraicamente sin el teorema de De Moivre al resolver las ecuaciones $x^4 - 81 = 0$ y $x^6 - 64 = 0$, respectivamente (*véase* los ejercicios 43 y 44 de la Sección 2.4). Sin embargo, para encontrar las siete raíces séptimas de 128, por ejemplo, se requiere el teorema de De Moivre (*véase* el ejercicio 23). También se necesita este teorema en el ejemplo siguiente.

▸ EJEMPLO 5 *Determinación de las n raíces n-ésimas de un número complejo*

Determine las dos raíces cuadradas de i.

Solución Se escribe el número i en forma polar. Si $i = a + bi$, entonces $a = 0$ y $b = 1$. En consecuencia,

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así,

$$i = 1(\cos \tfrac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi)$$

Del Teorema 3, las dos raíces cuadradas de i están dadas por

$$1^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi}{2}\right)\right]$$

donde k es igual a 0, 1. Al sustituir k por 0 y 1, se obtiene, respectivamente,

$$1\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$1\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$ ◄

► EJEMPLO 6 *Expresión de las n raíces n-ésimas de un número complejo en forma cartesiana*

Exprese cada una de las tres raíces cúbicas de $3 + 4i$ en la forma $a + bi$. Aproxime los valores de a y b a dos decimales.

Solución Si $3 + 4i = a + bi$, entonces $a = 3$ y $b = 4$. De modo que

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3}{5} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = \frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

De donde $\theta = \arctan\frac{4}{3}$. Por tanto,

$$3 + 4i = 5[\cos(\arctan\tfrac{4}{3}) + i \operatorname{sen}(\arctan\tfrac{4}{3})]$$

En consecuencia, las tres raíces cúbicas de $3 + 4i$ están dadas por

$$5^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{4}{3} + k \cdot 2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\arctan\frac{4}{3} + k \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$$

donde k es igual a 0, 1, 2. Al sustituir k sucesivamente por 0, 1 y 2 y utilizándose una calculadora para determinar los valores aproximados, se obtiene

$$5^{1/3}[\cos\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3})] + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3})]$$
$$\approx 1.710[0.953 + i(0.304)] \approx 1.63 + 0.52i$$
$$5^{1/3}[\cos\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 2\pi) + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 2\pi)]$$
$$\approx 1.710[-0.740 + i(0.673)] \approx -1.26 + 1.15i$$
$$5^{1/3}[\cos\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 4\pi) + i \operatorname{sen}\tfrac{1}{3}(\arctan\tfrac{4}{3} + 4\pi)]$$
$$\approx 1.710[-0.213 + i(-0.977)] \approx -0.36 - 1.67i$$ ◄

EJERCICIOS 10.6

En los ejercicios 1 a 20, emplee el teorema de De Moivre para determinar las potencias indicadas.

1. $[2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]^2$
2. $[4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)]^2$
3. $[4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)]^3$
4. $[2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]^3$
5. $(\cos \frac{1}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi)^4$
6. $[3(\cos \frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi)]^5$
7. $[2(\cos 48^\circ + i \operatorname{sen} 48^\circ)]^5$
8. $[(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)]^6$
9. $(1 + i)^3$
10. $(-1 + i)^3$
11. $(-1 - \sqrt{3}i)^6$
12. $(\sqrt{3} - i)^6$
13. $(-4 + 4i)^5$
14. $\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^5$
15. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-3}$
16. $(-3 - 3i)^{-4}$
17. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-8}$
18. $(2 + 2\sqrt{3}i)^{-5}$
19. $(-3\sqrt{3} + 3i)^{30}$
20. $(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i)^{40}$
21. **(a)** Encuentre las tres raíces cúbicas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Use el resultado del inciso (a) para determinar las tres raíces cúbicas de 27.
22. **(a)** Halle las cinco raíces quintas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Use el resultado del inciso (a) para determinar las cinco raíces quintas de 243.
23. **(a)** Encuentre las siete raíces séptimas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Use el resultado del inciso (a) para determinar las siete raíces séptimas de 128.
24. **(a)** Halle las ocho raíces octavas de la unidad y muestre sus representaciones geométricas. **(b)** Emplee el resultado del inciso (a) para determinar las ocho raíces octavas de 256.

En los ejercicios 25 a 28, resuelva la ecuación en dos formas: (a) por el teorema de De Moivre; (b) algebraicamente sin el teorema de De Moivre.

25. $x^4 - 16 = 0$
26. $x^3 - 125 = 0$
27. $x^3 + i = 0$ [*Sugerencia* para el inciso (b): Escriba $x^3 + i$ como $x^3 - i^3$]
28. $x^3 - i = 0$ [*Sugerencia* para el inciso (b): Escriba $x^3 - i$ como $x^3 + i^3$]

En los ejercicios 29 a 38, determine las raíces indicadas y escríbalas en forma cartesiana. En los ejercicios 33 a 38, en la forma cartesiana aproxime los valores de a y b a dos decimales.

29. Las dos raíces cuadradas de $-4i$
30. Las dos raíces cuadradas de $25i$
31. Las tres raíces cúbicas de i
32. Las tres raíces cúbicas de $-i$
33. Las tres raíces cúbicas de $4 - 4\sqrt{3}i$
34. Las tres raíces cúbicas de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
35. Las cuatro raíces cuartas de $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
36. Las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$
37. Las cinco raíces quintas de $-4 + 3i$
38. Las cinco raíces quintas de $2 - i$
39. Las representaciones geométricas de las n raíces n-ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria. Es decir, las tres raíces cúbicas de la unidad son los vértices de un triángulo equilátero inscrito, las cuatro raíces cuartas de la unidad son los vértices de un cuadrado inscrito, las cinco raíces quintas de la unidad son los vértices de un pentágono regular inscrito, y así sucesivamente. Explique por qué esto es así.
40. El enunciado del ejercicio 39 proporciona el método siguiente para ver las n raíces n-ésimas de la unidad en la graficadora. (i) Active en la calculadora los modos paramétrico y de grados. (ii) Haga $x(t) = \cos t$ y $y(t) = \operatorname{sen} t$. (iii) Se elige: t mín = 0 y t máx = 360, t step = $360/n$. (iv) Se elige el rectángulo de inspección $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (v) Emplee la tecla de rastreo (trace) para ver cada una de las n raíces n-ésimas de la unidad. Aplique este procedimiento para ver **(a)** las tres raíces cúbicas de la unidad; **(b)** las cuatro raíces cuartas de la unidad;

(c) las cinco raíces quintas de la unidad; (d) las seis raíces sextas de la unidad.

41. Obtenga las identidades del coseno y seno de valor doble al igualarse las partes real e imaginaria de las dos expresiones para $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2$ obtenidas en las dos formas siguientes: (1) al emplear el teorema de De Moivre; (2) al multiplicar $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ por sí mismo.

En los ejercicios 42 a 45, utilice el método del ejercicio 41 para obtener la identidad indicada.

42. Identidad para $\cos 3\theta$ en términos de $\cos\theta$

43. Identidad para $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$

44. Identidad para $\operatorname{sen} 4\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$

45. Identidad para $\cos 4\theta$ en términos de $\cos\theta$

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 10

VISIÓN RETROSPECTIVA

10.1 Se definió un vector como un par ordenado de números reales y se representó geométricamente por un segmento rectilíneo dirigido. La representación de posición se empleó para ilustrar de manera geométrica hechos importantes acerca de vectores, entre ellos las definiciones de magnitud, ángulo director, suma y resta de vectores, así como el producto de un escalar y un vector. Se expresó un vector en términos de su magnitud y ángulo director, y de los vectores **i** y **j**. Los enunciados de problemas que implican vectores trataron sobre fuerza, navegación aérea y marítima, y geometría.

10.2 Como preludio al uso de los vectores en Cálculo, se trataron las funciones vectoriales. Se estableció que una curva definida por una ecuación vectorial de la forma $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, también está definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Se determinó una ecuación cartesiana de una gráfica a partir de su ecuación vectorial, o del par de ecuaciones paramétricas equivalentes, y se dibujó la gráfica a mano y en la graficadora. Se definió una cicloide y se dedujeron sus ecuaciones paramétricas. Los enunciados de problemas implicaron el movimiento de un proyectil.

10.3 Se definieron las coordenadas polares de un punto, después se localizó un punto a partir de sus coordenadas polares y se encontraron otros conjuntos de coordenadas polares del punto. Se emplearon las ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas y coordenadas polares de un punto, para determinar una ecuación cartesiana de una gráfica a partir de la ecuación polar, y una ecuación polar a partir de la ecuación cartesiana.

10.4 Las gráficas polares tratadas en esta sección incluyeron rectas, circunferencias, caracoles, rosas y espirales. Se presentó el teorema que muestra cómo puede definirse una gráfica polar mediante un par de ecuaciones paramétricas y se aplicó el teorema para trazar gráficas polares.

10.5 Antes de definir la forma polar de un número complejo, se representaron los números complejos como puntos en el plano complejo y se definió el valor absoluto de un número complejo. Se obtuvieron fórmulas para el producto y el cociente de dos números complejos dados en forma polar, y se expresaron el producto y el cociente en forma cartesiana.

10.6 La forma polar de un número complejo se presentó en el teorema de De Moivre. Primero se enunció el teorema para enteros positivos y se empleó para determinar potencias enteras positivas de números complejos. Después se definieron los exponentes cero y negativos y se enunció el teorema de De Moivre para todos los enteros y se determinaron potencias enteras negativas de números complejos. Posteriormente, se definió una raíz n-ésima de un número complejo y se demostró el teorema que proporciona las n raíces n-ésimas de un número complejo. Las n raíces n-ésimas de la unidad se utilizaron para obtener las n raíces n-ésimas de un número complejo. Se mostró cómo expresar estas raíces en forma cartesiana.

▸ EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 y 2, halle la suma del par de vectores e ilustre geométricamente estas sumas.

1. (a) $\langle 3, 7\rangle, \langle 2, -4\rangle$ (b) $-\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, -2\mathbf{j}$

2. (a) $\langle 4, 0\rangle, \langle -6, -1\rangle$ (b) $5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

En los ejercicios 3 y 4, reste el segundo vector del primero e ilustre geométricamente estas restas.

3. (a) $\langle 6, 4\rangle \ \langle 0, -3\rangle$ (b) $-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}, 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

4. (a) $\langle 9, -7\rangle, \langle -2, 5\rangle$ (b) $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, -\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

En los ejercicios 5 y 6, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. *Determine el vector o escalar indicado.*

5. (a) $3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}$ (b) $\|3\mathbf{B} - 7\mathbf{A}\|$
   (c) $\|3\mathbf{B}\| - \|7\mathbf{A}\|$

6. (a) $5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$ (b) $\|5\mathbf{B} - 3\mathbf{C}\|$
   (c) $\|5\mathbf{B}\| - \|3\mathbf{C}\|$

En los ejercicios 7 y 8, encuentre los componentes del vector cuya magnitud y ángulo director se proporciona.

7. (a) $12, \frac{1}{6}\pi$ (b) $36, 112°$

8. (a) $25, \frac{3}{4}\pi$ (b) $130, 335.2°$

En los ejercicios 9 y 10, escriba el vector dado en la forma $r(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$, *donde* r *es la magnitud y* θ *es el ángulo director.*

9. (a) $6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (b) $-4\mathbf{i} + 2\sqrt{5}\mathbf{j}$

10. (a) $2\sqrt{3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (b) $-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

En los ejercicios 11 a 14, determine el dominio de la función vectorial.

11. $\mathbf{R}(t) = \dfrac{1}{t-2}\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j}$

12. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t+1}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t-3}\mathbf{j}$

13. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j}$

14. $\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen}^{-1}(t-1)\mathbf{i} + \cos^{-1}(t-1)\mathbf{j}$

En los ejercicios 15 y 16, dibuje la gráfica de la ecuación vectorial y encuentre una ecuación cartesiana de la gráfica.

15. $\mathbf{R}(t) = 9\cos t\,\mathbf{i} + 9\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

16. $\mathbf{R}(t) = (4t-1)\mathbf{i} + (4t^2 + 2)\mathbf{j}$

En los ejercicios 17 a 20, (a) dibuje la gráfica de las ecuaciones paramétricas y compruebe la gráfica en la graficadora; (b) encuentre una ecuación cartesiana de la gráfica.

17. $x = 2 - t$, $y = 2t$

18. $x = t^2$, $y = t^3 + 1$

19. $x = 2t^3$, $y = 3t^2 - 4$

20. $x = 4\cos t - 2$, $y = 4\operatorname{sen} t + 3$

En los ejercicios 21 y 22, localice el punto que tiene el conjunto de coordenadas polares dado; proporcione otros dos conjuntos de coordenadas polares del mismo punto, uno con el mismo valor de r *y el otro con un* r *con signo contrario.*

21. (a) $(2, \frac{3}{4}\pi)$ (b) $(-3, \frac{7}{6}\pi)$

22. (a) $(4, -\frac{1}{3}\pi)$ (b) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$

En los ejercicios 23 y 24, encuentre las coordenadas cartesianas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares se proporcionan.

23. (a) $(1, \frac{1}{2}\pi)$ (b) $(2, -\frac{1}{3}\pi)$
    (c) $(4, \frac{5}{4}\pi)$ (d) $(-3, \frac{1}{6}\pi)$

24. (a) $(5, \pi)$ (b) $(-2, \frac{5}{6}\pi)$
    (c) $(-\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ (d) $(1, \frac{4}{3}\pi)$

En los ejercicios 25 y 26, determine un conjunto de coordenadas polares del punto cuyas coordenadas cartesianas rectangulares se proporcionan. Considere $r > 0$ *y* $0 \le \theta < 2\pi$.

25. (a) $(-4, 4)$ (b) $(1, -\sqrt{3})$
    (c) $(0, 6)$ (d) $(-2\sqrt{3}, -2)$

26. (a) $(-4, 0)$ (b) $(\sqrt{3}, 1)$
    (c) $(-2, -2)$ (d) $(3, -3\sqrt{3})$

En los ejercicios 27 a 30, halle una ecuación polar de la gráfica cuya ecuación cartesiana se proporciona.

27. $4x^2 - 9y^2 = 36$ 28. $2xy = 1$

29. $x^2 + y^2 - 9x + 8y = 0$

30. $y^4 = x^2(a^2 - y^2)$

En los ejercicios 31 a 34, encuentre una ecuación cartesiana de la gráfica cuya ecuación polar se proporciona.

31. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$ 32. $r(1 - \cos\theta) = 2$

33. $r^2 = \operatorname{sen}^2\theta$ 34. $r = a\tan^2\theta$

En los ejercicios 35 a 38, dibuje la gráfica de la ecuación.

35. (a) $\theta = \frac{1}{4}\pi$ (b) $r = 4$

36. (a) $\theta = \frac{2}{3}$ (b) $r = \frac{3}{2}$

37. (a) $r\cos\theta = 3$ (b) $r = 3\cos\theta$

38. (a) $r\,\text{sen}\,\theta = 6$ (b) $r = 6\,\text{sen}\,\theta$

En los ejercicios 39 a 44, determine el tipo de caracol, su simetría y la dirección en la que apunta. Trace el caracol.

39. $r = 3 + 2\cos\theta$

40. $r = 2 + 3\,\text{sen}\,\theta$

41. $r = 2(1 - \cos\theta)$

42. $r = 3(1 + \text{sen}\,\theta)$

43. $r = 1 - 2\,\text{sen}\,\theta$

44. $r = 2 - \cos\theta$

En los ejercicios 45 a 50, describa y trace la gráfica de la ecuación.

45. $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$

46. $r = 3\cos 2\theta$

47. $r = \sqrt{|\cos\theta|}$

48. $r = |\,\text{sen}\,2\theta\,|$

49. $r^2 = -\text{sen}\,2\theta$

50. $r^2 = 16\cos\theta$

51. Describa y trace la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes: **(a)** $r\theta = 3$ (espiral recíproca); (b) $3r = \theta$ (espiral de Arquímedes).

52. Muestre que las ecuaciones $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ y $r = \text{sen}\,\theta - 1$ tienen la misma gráfica dibujándolas a mano. Compruebe las gráficas en la graficadora.

En los ejercicios 53 y 54, muestre la representación geométrica del número complejo como un punto en el plano complejo.

53. (a) $3 + 7i$ (b) $6 - 3i$
(c) $-1 + 5i$ (d) $-4i$

54. (a) $-3 + 2i$ (b) $-7 - i$
(c) -4 (d) $3i$

En los ejercicios 55 y 56, determine el valor absoluto indicado.

55. (a) $|\,4 - 3i\,|$ (b) $|\,-6 + 2i\,|$

56. (a) $|\,5 + 12i\,|$ (b) $|\,-6i\,|$

En los ejercicios 57 y 58, exprese el número complejo en forma polar estándar.

57. (a) $-3 + \sqrt{3}i$ (b) $2\sqrt{3} + 2i$
(c) $-4i$ (d) $-1 - i$

58. (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (b) $\sqrt{3} - i$
(c) $6i$ (d) -6

En los ejercicios 59 a 62, muestre la representación geométrica del número complejo en el plano complejo y escríbalo en forma cartesiana.

59. $2(\cos\frac{1}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{6}\pi)$

60. $6(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi)$

61. $4(\cos 135^\circ + i\,\text{sen}\,135^\circ)$

62. $8(\cos 330^\circ + i\,\text{sen}\,330^\circ)$

En los ejercicios 63 y 64, exprese el producto en forma cartesiana.

63. $4(\cos 50^\circ + i\,\text{sen}\,50^\circ)\cdot\frac{3}{4}(\cos 70^\circ + i\,\text{sen}\,70^\circ)$

64. $5(\cos\frac{7}{12}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{12}\pi)\cdot 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi)$

En los ejercicios 65 y 66, exprese el cociente en forma cartesiana.

65. $10(\cos\frac{4}{9}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{9}\pi) \div 5(\cos\frac{43}{36}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{43}{36}\pi)$

66. $2(\cos 200^\circ + i\,\text{sen}\,200^\circ) \div 3(\cos 50^\circ + i\,\text{sen}\,50^\circ)$

En los ejercicios 67 a 70, exprese la potencia en forma cartesiana.

67. $(\sqrt{3} + i)^3$

68. $(4 - 4i)^4$

69. $(-2 + 2i)^{-6}$

70. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5}$

En los ejercicios 71 a 76, halle las raíces indicadas, escríbalas en forma cartesiana y muestre sus representaciones geométricas.

71. Las tres raíces cúbicas de 8

72. Las tres raíces cúbicas de -27

73. Las cuatro raíces cuartas de $2 + i$

74. Las tres raíces cúbicas de $8i$

75. Las cinco raíces quintas de $2 - 5i$

76. Las cuatro raíces cuartas de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

77. Dos fuerzas de magnitudes de 50 lb y 70 lb forman un ángulo de 60° entre sí y se aplican a un objeto en el mismo punto. Encuentre **(a)** la magnitud de la fuerza resultante y **(b)** con aproximación de grados, el ángulo que forman la resultante y la fuerza de 50 lb.

78. Determine el ángulo entre dos fuerzas, una de 112 lb y la otra de 136 lb aplicadas a un objeto en el mismo punto si la fuerza resultante tiene una magnitud de 168 lb.

79. El enfilamiento de un avión es de 107° y su velocidad al aire es de 210 mi/h. Si el viento sopla del

oeste a 36 mi/h, ¿cuál es (**a**) su velocidad respecto a tierra y (**b**) su curso?

80. Una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}$. Determine (**a**) las ecuaciones paramétricas y (**b**) una ecuación cartesiana de la trayectoria (o camino recorrido) de la partícula. (**c**) Trace la trayectoria de la partícula.

81. $\left[\int\int \frac{dy}{dx}\right]$ Un proyectil se desplaza de modo que las coordenadas de su posición, en cualquier tiempo t, están dadas por las ecuaciones paramétricas

$$x = 30t \quad \text{y} \quad y = 40t - 16t^2$$

Halle: (**a**) el tiempo total de recorrido; (**b**) el alcance del proyectil; (**c**) la altura máxima alcanzada por el proyectil; (**d**) una ecuación cartesiana de la trayectoria del proyectil. (**e**) Trace la trayectoria del proyectil.

82. $\left[\int\int \frac{dy}{dx}\right]$ Un proyectil disparado de un arma con un ángulo de elevación de $\frac{1}{6}\pi$ radianes tiene una velocidad de salida de 220 pie/s. Determine (**a**) el vector de posición del proyectil en cualquier tiempo; (**b**) las ecuaciones paramétricas de la posición del proyectil en cualquier tiempo; (**c**) el tiempo total de recorrido; (**d**) el alcance del proyectil; (**e**) la máxima altura alcanzada por el proyectil; (**f**) una ecuación de la curva recorrida por el proyectil. (**g**) Trace la trayectoria del proyectil.

83. $\left[\int\int \frac{dy}{dx}\right]$ Desde un punto A se golpea una bola de golf con una velocidad inicial de 140 pie/s con un ángulo de elevación de 40° y toca el suelo en el punto P. Encuentre (**a**) la distancia horizontal de A a P. (**b**) ¿Qué tiempo emplea la bola para ir desde A hasta P? (**c**) Determine la altura máxima alcanzada por la bola. (**d**) Trace la curva recorrida por la bola desde A hasta P. (**e**) Encuentre una ecuación cartesiana de la curva recorrida por la bola.

84. Una *epicicloide* es la curva descrita por un punto P en una circunferencia de radio b que rueda externamente sobre un circunferencia fija de radio a. Si el origen es el centro de la circunferencia fija, $A(a, 0)$ es uno de los puntos en que el punto dado P hace contacto con la circunferencia fija, B es el punto móvil de tangencia de las dos circunferencias, y el parámetro t es la medida en radianes del ángulo AOB, pruebe que las ecuaciones paramétricas de la epicicloide son

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a + b}{b}t$$

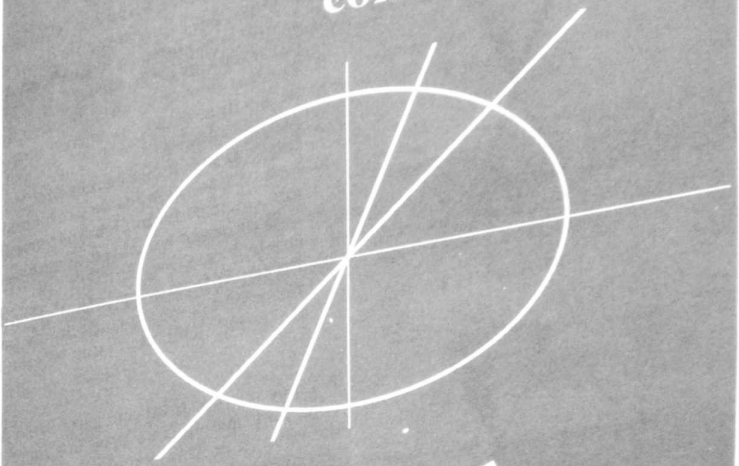
y

$$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\frac{a + b}{b}t$$

Capítulo

11

Secciones cónicas



VISIÓN PRELIMINAR

Las secciones cónicas (o cónicas) son curvas de intersección de un plano con un cono circular recto y los tres tipos de curvas que ocurren son: elipse, hipérbola y parábola. El matemático griego Apolonio estudió las secciones cónicas empleando este concepto geométrico. En la Sección 3.3, se definirá la parábola como un conjunto de puntos en un plano, así también, en las dos primeras secciones de este capítulo, se definirán la elipse y la hipérbola como un conjunto de puntos en un plano. Se probará que la definición de elipse como un conjunto de puntos es una consecuencia de su definición como una sección cónica; variaciones de esta prueba pueden darse para la hipérbola y la parábola. En la sección final del capítulo, se presenta un tratamiento unificado de las secciones cónicas al definirse una cónica en términos de su excentricidad.

SUMARIO

11.1 Elipses
11.2 Hipérbolas
11.3 Ecuación general de segundo grado en dos variables y rotación de ejes
11.4 Sistemas que implican ecuaciones cuadráticas
11.5 Tratamiento unificado de las secciones cónicas y ecuaciones polares de las cónicas

11.1 ELIPSES

OBJETIVOS

1. **Definir una elipse.**
2. **Obtener formas estándar de una ecuación de una elipse.**
3. **Dibujar una elipse a partir de su ecuación.**
4. **Trazar una elipse en la graficadora utilizando ecuaciones paramétricas de la elipse.**
5. **Encontrar propiedades de una elipse a partir de su ecuación.**
6. **Determinar una ecuación de una elipse a partir de sus propiedades.**
7. **Explicar los casos degenerados de una elipse.**
8. **Resolver enunciados de problemas que tienen una ecuación de una elipse como modelo matemático.**
9. **Definir la excentricidad de una elipse y mostrar su relación con la forma de la elipse.**
10. **Presentar la prueba de G. P. Dandelin de que la definición de una elipse como un conjunto de puntos en un plano se deduce de su definición como una sección cónica.**

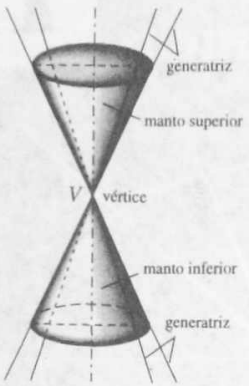
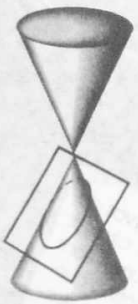
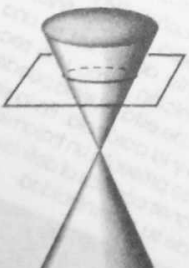


FIGURA 11.1



elipse

FIGURA 11.2



circunferencia

FIGURA 11.3

A fin de referirse al aspecto geométrico de las secciones cónicas se debe considerar que un cono tiene dos mantos, cada uno extendiéndose indefinidamente. Una porción de un cono circular recto de dos mantos se presenta en la Figura 11.1. Se denomina **generatriz** (o **elemento**) del cono a una recta que esté situada en el cono. Todas las generatrices de un cono contienen al punto V llamado **vértice.**

Una *elipse* se obtiene como una sección cónica si el plano cortante no es paralelo a ninguna generatriz, en cuyo caso el plano cortante intersecta a cada generatriz como en la Figura 11.2. Un caso especial de la elipse es una circunferencia, la cual se forma si el plano cortante intersecta a cada generatriz y también es perpendicular al eje del cono. *Véase* la Figura 11.3. Ahora se definirá una elipse como un conjunto de puntos en un plano. Al final de esta sección se probará que esta definición es consecuencia de la definición de elipse como una sección de un cono.

DEFINICIÓN **Elipse**

Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano, tales que la suma de sus distancias desde dos puntos fijos es constante. Cada punto fijo se denomina **foco.**

Sea $2c$ la distancia no dirigida entre los focos, donde $c > 0$. A fin de obtener una ecuación de una elipse, se considera al eje x como la

recta que pasa por F y F', de modo que el origen sea el punto medio del segmento entre F y F'. *Véase* la Figura 11.4. Los focos F y F' tienen coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente. Sea $2a$ la suma constante referida en la definición. Entonces $a > c$ y el punto $P(x, y)$, de la Figura 11.4, es cualquier punto de la elipse si y sólo si

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$$

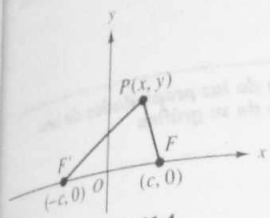


FIGURA 11.4

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

P está en la elipse si y sólo si

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Para simplificar esta ecuación se requiere la eliminación de los radicales y la aplicación de algunas manipulaciones algebraicas, lo cual se le pedirá que haga en el ejercicio 35. Al efectuar esto, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$. Se establece este resultado a continuación.

Ecuación de una elipse

Si $2a$ es la constante referida en la definición de una elipse y si los focos están en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, y si $b^2 = a^2 - c^2$, entonces una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A fin de dibujar esta elipse, primero observe de la ecuación que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Si se sustituye y por 0 en la ecuación, se obtiene $x = \pm a$, y si se reemplaza x por 0, se obtiene $y = \pm b$. Por tanto, la gráfica intersecta al eje x en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, e intersecta al eje y en $(0, b)$ y $(0, -b)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, se deduce que $a > b$. *Véase* la Figura 11.5 y consúltela conforme lea el siguiente párrafo.

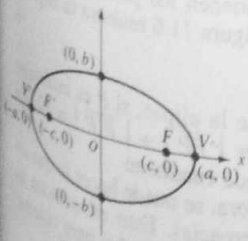


FIGURA 11.5

La recta que pasa por los focos se denomina **eje principal.** Para esta elipse el eje x es el eje principal. Los puntos de intersección de la elipse y su eje principal se llaman **vértices.** Así, para esta elipse los vértices están en $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$. El punto del eje principal que está a la mitad entre los dos vértices se denomina **centro.** El origen es

el centro de esta elipse. El segmento entre los dos vértices se llama **eje mayor,** y su longitud es $2a$ unidades. Para esta elipse el segmento del eje y entre los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ se denomina **eje menor.** Su longitud es $2b$ unidades.

Una elipse se llama **cónica central** en contraste con la parábola, la cual no tiene centro porque sólo tiene un vértice.

▸ EJEMPLO 1 *Determinación de las propiedades de una elipse y dibujo de su gráfica*

Para la elipse que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

determine los vértices, los extremos del eje menor y los focos. Dibuje la elipse y muestre los focos.

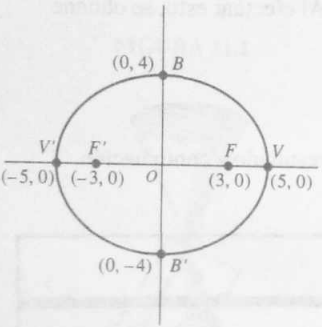


FIGURA 11.6

Solución Debido a que la forma de la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

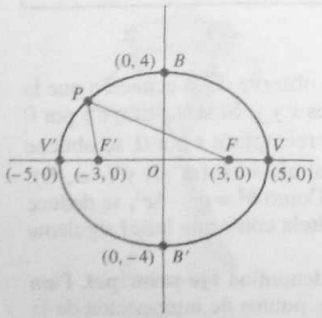
el centro de la elipse está en el origen y el eje principal es el eje x. Como $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, entonces $a = 5$ y $b = 4$. Por tanto, los vértices están en $V(5, 0)$ y $V'(-5, 0)$ y los extremos del eje menor están en $B(0, 4)$ y $B'(0, -4)$.

A fin de determinar los focos, se resuelve para c la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$ con $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$. Así, como $c > 0$,

$$16 = 25 - c^2$$
$$c^2 = 9$$
$$c = 3$$

Por tanto, los focos están en $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$.

Como una ayuda al dibujar la elipse, encuentre un punto de ella en el primer cuadrante sustituyendo x por 3 en la ecuación y resolviéndola para y (por supuesto, puede emplearse cualquier otro valor de x entre 0 y 5). Mediante la simetría se obtienen los puntos correspondientes en los otros tres cuadrantes. La Figura 11.6 muestra la elipse y los focos. ◂



$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 10$

FIGURA 11.7

Observe que, según la definición de la elipse, si P es cualquier punto de la elipse del ejemplo 1, entonces $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 10$. En la Figura 11.7 se ha tomado P en el segundo cuadrante.

Para trazar la elipse en una graficadora, se puede hacer lo que en la Sección 3.4 para gráficas de circunferencias. Esto es, se trata la ecuación de la elipse como cuadrática en y y se resuelve para obtener dos ecuaciones que definen a y como dos funciones de x.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

A fin de resolver la ecuación de la elipse del ejemplo 1 para y, primero se multiplican ambos miembros por 400, obteniéndose

$$\begin{aligned} 16x^2 + 25y^2 &= 400 \\ 25y^2 &= 400 - 16x^2 \\ 25y^2 &= 16(25 - x^2) \\ y^2 &= \frac{16}{25}(25 - x^2) \\ y &= \pm\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} \end{aligned}$$

En el mismo rectángulo de inspección de una graficadora, se trazan las gráficas de

$$y_1 = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad y_2 = -\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

para obtener la elipse que se presenta en la Figura 11.6. ◀

Otro método para trazar una elipse en una graficadora implica ecuaciones paramétricas de la elipse. Para mostrar que las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t \quad \text{y} \quad y = b\,\text{sen}\,t$$

representan una elipse, se elimina t de las ecuaciones. Primero se escriben las ecuaciones como

$$\frac{x}{a} = \cos t \quad \text{y} \quad \frac{y}{b} = \text{sen}\,t$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de cada ecuación y sumar, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \text{sen}^2\,t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la cual es la forma estándar de una ecuación de una elipse.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Las ecuaciones paramétricas de la elipse del ejemplo 1 son

$$x = 5\cos t \quad \text{y} \quad y = 4\,\text{sen}\,t$$

En la graficadora en modo paramétrico, se permite que t tome todos los valores del intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ para obtener la elipse de la Figura 11.6. ◀

Las trayectorias de muchos cometas y las órbitas de los planetas y satélites son elipses. Algunas veces, los arcos de los puentes son de forma elíptica, y también se emplean elipses en los engranajes de las máquinas. Una aplicación de la elipse en arquitectura se tiene en las llamadas galerías del susurro, se utiliza su propiedad reflexiva. En las galerías del susurro las bóvedas tienen secciones transversales que son arcos de elipses con focos comunes. Una persona colocada en un foco F puede escuchar el susurro de otra persona ubicada en el otro foco F' porque las ondas sonoras originadas por el murmurador en F' chocan contra la bóveda y son reflejadas por ésta al oyente ubicado en F. Un ejemplo famoso de estas galerías del susurro se encuentra bajo la cúpula del Capitolio en Washington, D.C. Otro ejemplo es el Tabernáculo Mormón en Salt Lake City.

▶ EJEMPLO 2 *Solución del enunciado de un problema que tiene una ecuación de una elipse como modelo matemático*

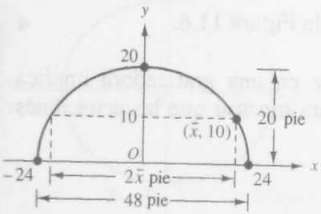


FIGURA 11.8

Un arco es de forma semielíptica. Tiene 48 pie de ancho en la base y una altura de 20 pie. ¿Qué tan ancho es el arco a una altura de 10 pie sobre la base?

Solución La Figura 11.8 muestra un dibujo del arco y los ejes coordenados, los cuales se eligen de modo que el eje x quede a lo largo de la base del arco y el origen esté en el punto medio de la base. Entonces, la elipse tiene su eje principal sobre el eje x, su centro en el origen, $a = 24$ y $b = 20$. Así, una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$$

Sea $2\bar{x}$ el número de pies de anchura del arco a la altura de 10 pie sobre la base. Por tanto, el punto $(\bar{x}, 10)$ está sobre la elipse. En consecuencia,

$$\frac{\bar{x}^2}{576} + \frac{100}{400} = 1$$

$$\bar{x}^2 = 432$$

$$\bar{x} = 12\sqrt{3}$$

Conclusión: A la altura de 10 pie sobre la base, el ancho del arco es de $24\sqrt{3}$ pie. ◀

Si una elipse tiene su centro en el origen y su eje principal sobre el eje y, entonces una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Esta ecuación se obtiene intercambiando x y y en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

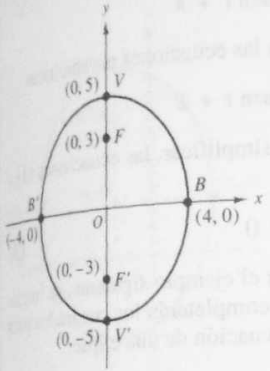


FIGURA 11.9

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Puesto que para una elipse $a > b$, se concluye que la elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

tiene su eje principal sobre el eje y. Esta elipse tiene la misma forma que la del ejemplo 1. Los vértices están en (0, 5) y (0, –5), los extremos del eje menor están en (4, 0) y (–4, 0), y los focos están en (0, 3) y (0, –3). La Figura 11.9 muestra esta elipse. Puede obtenerse en la graficadora al trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 \cos t \quad \text{y} \quad y = 5 \operatorname{sen} t$$ ◀

Suponga que el centro de una elipse está en el punto (h, k) en lugar del origen, y el eje principal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Entonces, mediante una traslación de ejes de modo que el punto (h, k) sea el nuevo origen, una ecuación de la elipse es

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical. Como $x' = x - h$ y $y' = y - k$, se obtienen las siguientes formas estándar de una ecuación de una elipse.

Formas estándar de una ecuación de una elipse

Si el centro de una elipse está en (h, k) y la distancia entre los vértices es $2a$, entonces una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b) \qquad (1)$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b) \qquad (2)$$

si el eje principal es vertical.

Para trazar en la graficadora una elipse cuyo eje principal es horizontal, se emplean las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t + h \quad \text{y} \quad y = b\,\text{sen}\,t + k$$

Si el eje principal es vertical se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = b\cos t + h \quad \text{y} \quad y = a\,\text{sen}\,t + k$$

Al desarrollar $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ y simplificar, las ecuaciones (1) y (2) pueden escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3}$$

donde A y C tienen el mismo signo. En el ejemplo siguiente, se iniciará con una ecuación de esta forma y se completarán los cuadrados para escribirla en la forma estándar de una ecuación de una elipse.

▶ EJEMPLO 3 *Determinación de las propiedades de una elipse y obtención de su gráfica*

Muestre que la gráfica de la ecuación

$$25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1\,119 = 0$$

es una elipse. Determine el centro, una ecuación del eje principal, los vértices, los extremos del eje menor y los focos. Dibuje la elipse y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución Para escribir esta ecuación en una de las formas estándar, se comienza por completar los cuadrados en x y y. Al hacerlo se tiene

$$25(x^2 + 6x) + 16(y^2 - 8y) = 1\,119$$

$$25(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 8y + 16) = 1\,119 + 225 + 256$$

$$25(x + 3)^2 + 16(y - 4)^2 = 1\,600$$

$$\frac{25(x + 3)^2}{1\,600} + \frac{16(y - 4)^2}{1\,600} = 1$$

$$\frac{(x + 3)^2}{64} + \frac{(y - 4)^2}{100} = 1$$

Esta ecuación es de la forma

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$$

donde (h, k) es $(-3, 4)$, $a^2 = 100$ y $b^2 = 64$. Por tanto, la gráfica es una elipse cuyo centro está en $(-3, 4)$ y su eje principal es la recta vertical que tiene la ecuación $x = -3$. Debido a que $a = 10$ y $b = 8$, los vértices están en $V(-3, 14)$ y $V'(-3, -6)$, y los extremos del eje menor están en

$B(5, 4)$ y $B'(-11, 4)$. Para determinar los focos se emplea la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$ con $c > 0$ y se obtiene

$$64 = 100 - c^2$$
$$c^2 = 36$$
$$c = 6$$

De modo que los focos están en $F(-3, 10)$ y $F'(-3, -2)$. Al trazar algunos puntos más (en particular donde la elipse intersecta a los ejes x y y), se obtiene la elipse mostrada en la Figura 11.10.

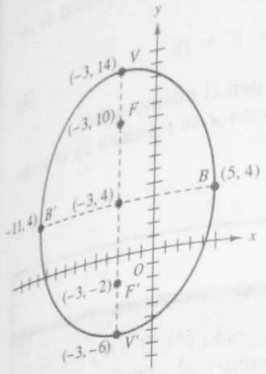


FIGURA 11.10

Para trazar la elipse en la graficadora, se emplean las ecuaciones paramétricas

$$x = 8 \cos t - 3 \quad \text{y} \quad y = 10 \operatorname{sen} t + 4$$ ◀

En los dos ejemplos ilustrativos siguientes, otra vez se tienen ecuaciones en la forma (3).

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Suponga que (3) es

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 115 = 0$$

la cual puede escribirse como

$$6(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -115$$

Al completar los cuadrados en x y y, se obtiene

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -115 + 24 + 81$$
$$6(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = -10$$

Como el miembro derecho de esta ecuación es negativo y el miembro izquierdo es no negativo para todos los puntos (x, y), la gráfica es el conjunto vacío. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Debido a que la ecuación

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$$

puede escribirse como

$$6(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 0$$

su gráfica es el punto $(2, 3)$. ◀

En general, se puede probar que la gráfica de cualquier ecuación de la forma (3) es una elipse, como en el ejemplo 3, un punto, o el con-

junto vacío. Cuando la gráfica es un punto o el conjunto vacío, como en los ejemplos ilustrativos 4 y 5, se dice que es **degenerada.**

Observe que (3) es el caso especial de la ecuación general de segundo grado en dos variables,

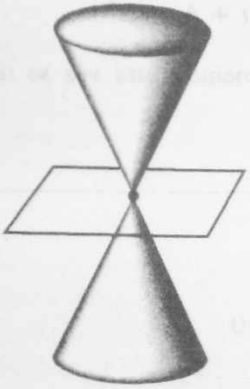
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

donde $B = 0$ y $AC > 0$ (es decir, A y C tienen el mismo signo).

Las conclusiones de la discusión anterior se resumen en el teorema siguiente.

TEOREMA 1

Si en la ecuación general de segundo grado (4), $B = 0$ y $AC > 0$, entonces la gráfica es una elipse, un punto o el conjunto vacío.



punto

FIGURA 11.11

El caso degenerado de una elipse, un punto, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice del cono, pero no contiene a ninguna generatriz. *Véase* la Figura 11.11.

Si $A = C$ en (3), la ecuación se transforma en

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la cual al dividirse entre A se tiene

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

En la Sección 3.4 se dijo que la gráfica de esta ecuación es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío. Este enunciado es acorde con el Teorema 1 porque una circunferencia es una forma límite de una elipse. Este hecho puede mostrarse al considerar la ecuación que relaciona a, b y c para una elipse:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

A partir de esta ecuación se ve que si $c = 0$, $b^2 = a^2$, entonces las formas estándar de una ecuación de una elipse se transforman en

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

la cual es una ecuación de una circunferencia que tiene su centro en (h, k) y radio a. Además, cuando $c = 0$, los focos coinciden con el centro de la circunferencia.

FIGURA 11.

▶ EJEMPLO 4 *Determinación de una ecuación de una elipse a partir de sus propiedades y obtención de su gráfica*

Determine una ecuación de la elipse que tiene sus focos en (–8, 2) y (4, 2) y para la cual la constante referida en la definición es 18. Dibuje la elipse y compruebe la gráfica en la graficadora.

Solución El centro de la elipse está en el punto medio del segmento definido por los focos y es el punto (–2, 2). La distancia entre los focos de una elipse es $2c$ y la distancia entre (–8, 2) y (4, 2) es 12. Por tanto $c = 6$. La constante referida en la definición es $2a$; así, $2a = 18$ y $a = 9$. Como $b^2 = a^2 - c^2$,

$$b^2 = 81 - 36$$
$$b^2 = 45$$
$$b = 3\sqrt{5}$$

El eje principal es paralelo al eje x, en consecuencia, una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Como (h, k) es el punto (–2, 2), $a = 9$ y $b = 3\sqrt{5}$, la ecuación requerida es

$$\frac{(x+2)^2}{81} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$$

Esta elipse aparece en la Figura 11.12. Para trazar la elipse en la graficadora se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = 9\cos t - 2 \quad \text{y} \quad y = 3\sqrt{5}\,\text{sen}\, t + 2$$ ◀

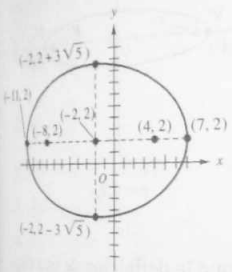


FIGURA 11.12

Algunas elipses son casi circulares, lo que sucede cuando los focos están muy próximos entre sí. Otras elipses son "aplastadas", esto ocurre cuando los focos y los vértices están muy próximos unos de otros. La forma de una elipse (su "redondez" o "aplastamiento") está dada por la *excentricidad*, la cual se definirá ahora formalmente.

DEFINICIÓN **Excentricidad**

La **excentricidad** e de una elipse es la razón de la distancia no dirigida entre los focos y la distancia no dirigida entre los vértices; esto es,

$$e = \frac{c}{a}$$

Debido a que $c^2 = a^2 - b^2$, entonces $c < a$; por tanto, $0 < e < 1$. Cuando los focos están muy próximos entre sí, e está muy cerca de cero, y la forma de la elipse se asemeja a la de una circunferencia. *Véase* la Figura 11.13(a) que muestra una elipse para la cual $e = 0.3$. Si a permanece fijo, entonces conforme e crece, el aplastamiento de la elipse también aumenta. Las figuras 11.13(b) y 11.13(c) muestran elipses con excentricidades de 0.7 y 0.95, respectivamente, cada una con el mismo valor de a como en la Figura 11.13(a). Las formas límite de la elipse son una circunferencia de diámetro $2a$ y un segmento de recta de longitud $2a$.

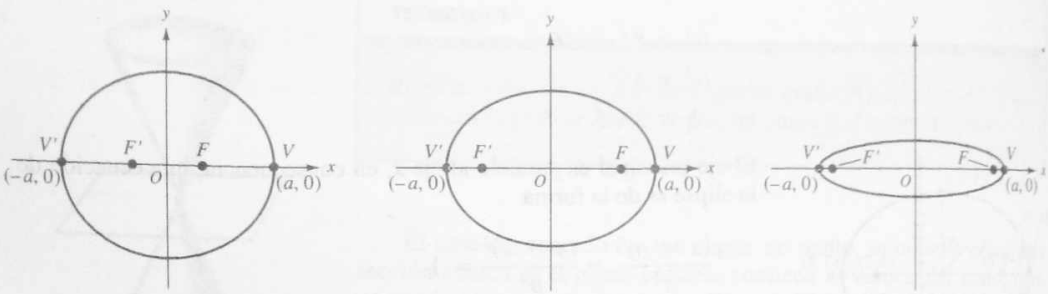


FIGURA 11.13

Como se prometió, ahora se probará que la definición de una elipse como un conjunto de puntos en un plano se deduce a partir de la definición de la elipse como una sección cónica. Esta prueba, algunas veces llamada "prueba del cono de helado", fue presentada en 1822 por el matemático belga **G. P. Dandelin** (1794-1847). Consulte la Figura 11.14, la cual muestra un manto de un cono con vértice en O y un plano cortante intersecta al cono en una elipse. Dos esferas S_1 y S_2 están inscritas en el cono. La esfera S_1 es tangente al cono a lo largo de la circunferencia C_1 y tangente al plano cortante en el punto F_1. La esfera S_2 es tangente al cono a lo largo de la circunferencia C_2 y tangente al plano cortante en el punto F_2. Los planos de las circunferencias C_1 y C_2 son paralelos. Se probará que los puntos F_1 y F_2 son los focos de la elipse al mostrar que si P es cualquier punto de la elipse, entonces $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ es constante. Para demostrar esto, se dibuja la recta que pasa por los puntos O y P sobre la superficie del cono. Los puntos Q_1 y Q_2 son las intersecciones de esta recta con las circunferencias C_1 y C_2, respectivamente. Como PF_1 y PQ_1 son dos rectas tangentes a la esfera S_1 desde el punto P, se infiere que

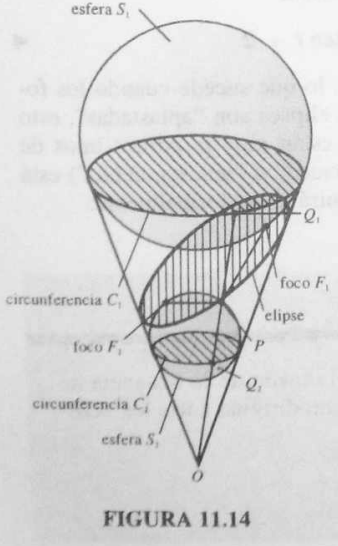


FIGURA 11.14

$$|\overline{PF_1}| = |\overline{PQ_1}|$$

También PF_2 y PQ_2 son dos rectas tangentes a la esfera S_2 desde el punto P. Así,

$$|\overline{PF_2}| = |\overline{PQ_2}|$$

Por tanto,

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = |\overline{PQ_1}| + |\overline{PQ_2}|$$

Observe que $|\overline{PQ_1}| + |\overline{PQ_2}| = |\overline{Q_1Q_2}|$, lo cual es la distancia medida a lo largo de la superficie del cono entre los planos paralelos de las circunferencias C_1 y C_2. Esta distancia será la misma para cualquier otra elección del punto P de la elipse. Por tanto, $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}|$ es constante, y F_1 y F_2 son los focos de la elipse.

EJERCICIOS 11.1

En los ejercicios 1 a 16, para la elipse que tiene la ecuación indicada, encuentre (a) su centro, (b) el eje principal, (c) los vértices, (d) los extremos del eje menor y (e) los focos. Dibuje la elipse y muestre los focos. Verifique la gráfica en la graficadora.

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
2. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$
5. $9x^2 + 25y^2 = 900$
6. $4x^2 + 9y^2 = 36$
7. $9x^2 + y^2 = 9$
8. $25x^2 + 4y^2 = 100$
9. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$
10. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$
11. $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 92 = 0$
12. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 18y + 33 = 0$
13. $4x^2 + 4y^2 + 20x - 32y + 89 = 0$
14. $25x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$
15. $x^2 + 3y^2 - 4x - 23 = 0$
16. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$

En los ejercicios 17 y 18, determine si la gráfica de la ecuación es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

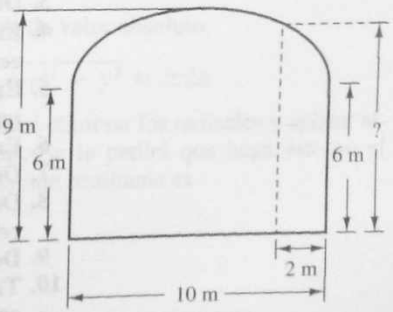
17. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$
18. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$

En los ejercicios 19 a 28, encuentre una ecuación de la elipse que cumpla las condiciones indicadas y dibuje la elipse. Compruebe la gráfica en la graficadora.

19. Vértices en $(-\frac{5}{2}, 0)$ y $(\frac{5}{2}, 0)$ y un foco en $(\frac{3}{2}, 0)$.
20. Focos en (–5, 0) y (5, 0) para la cual la constante referida en la definición es 20.
21. Focos en (0, 3) y (0, –3) y para la cual la constante referida en la definición es $6\sqrt{3}$.
22. Centro en el origen, sus focos sobre el eje x, la longitud del eje mayor igual a 3 veces la longitud del eje menor y pasa por el punto (3, 3).
23. Vértices en (2, 0) y (–2, 0) y pasa por el punto $(-1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
24. Vértices en (0, 5) y (0, –5) y pasa por el punto $(2, -\frac{5}{3}\sqrt{5})$.
25. Centro en (4, –2), un vértice en (9, –2), y un foco en (0, –2).
26. Un foco en (2, –3), un vértice en (2, 4) y el centro sobre el eje x.
27. Focos en (–1, –1) y (–1, 7) y el semieje mayor de 8 unidades de longitud.
28. Focos en (2, 3) y (2, –7) y la longitud del semieje menor es dos tercios de la longitud del semieje mayor.

En los ejercicios 29 a 32, resuelva el enunciado del problema y no olvide escribir una conclusión.

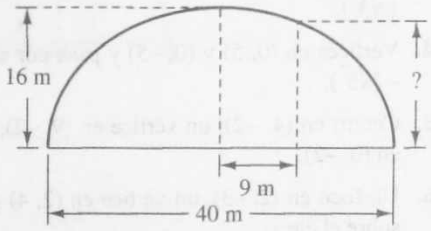
29. El techo de un vestíbulo de 10 m de ancho tiene la forma de una semielipse de 9 m de altura en el centro y 6 m de altura en las paredes laterales. Determine la altura del techo a 2 m de cualquier pared.



30. La órbita de la Tierra alrededor del Sol tiene forma de elipse con el Sol en un foco y un semieje mayor de 92.96 millones de millas de longitud. Si la excentricidad de la elipse es 0.0167, determine (a) qué tanto se acerca la Tierra al Sol y (b) la máxima distancia posible entre la Tierra y el Sol.

31. Suponga que la órbita de un planeta es de forma elíptica con su eje mayor de 500 millones de kilómetros de longitud. Si la distancia entre los focos es 400 millones de kilómetros, determine la ecuación de la órbita.

32. El arco de un puente es de forma semielíptica y tiene una amplitud de 40 m y una altura de 16 m en su centro. ¿Qué altura tiene el arco 9 m a la derecha o a la izquierda del centro?



33. Para trazar la elipse definida por la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, emplee el siguiente procedimiento y explique por qué funciona: primero determine los puntos de intersección de la elipse con los ejes coordenados. Obtenga los focos sobre el eje x al utilizar un compás con centro en uno de los puntos de intersección con el eje y y radio 3. Después, clave una chinche en cada foco. Tome una cuerda de longitud 6 y ate cada uno de los extremos a una chinche. Apoye un lápiz contra la cuerda y haga que se tense. Deslice el lápiz manteniendo tensa la cuerda y trace la elipse.

34. Utilice un procedimiento similar al del ejercicio 33 para trazar la elipse cuya ecuación es $16x^2 + 9y^2 = 144$. Explique por qué funciona.

35. Muestre que la ecuación

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

al simplificarse queda como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

36. Para la elipse cuya ecuación es

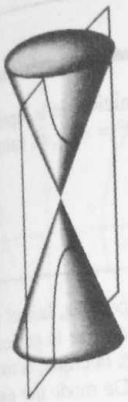
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$, encuentre las coordenadas de los focos en términos de h, k, a y b.

11.2 HIPÉRBOLAS

OBJETIVOS

1. **Definir una hipérbola.**
2. **Obtener formas estándar de una ecuación de una hipérbola.**
3. **Dibujar una hipérbola a partir de su ecuación.**
4. **Encontrar propiedades de una hipérbola a partir de su ecuación.**
5. **Encontrar la ecuación de una hipérbola a partir de sus propiedades.**
6. **Encontrar ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola.**
7. **Discutir casos degenerados de una hipérbola.**
8. **Definir la excentricidad de una hipérbola y mostrar su relación con la forma de la hipérbola.**
9. **Definir las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico.**
10. **Trazar una hipérbola en una graficadora utilizando ecuaciones paramétricas de la hipérbola.**



hipérbola

FIGURA 11.15

Cuando un plano cortante intersecta los dos mantos de un cono y es paralelo a dos generatrices, la sección cónica obtenida es una *hipérbola*, la cual se muestra en la Figura 11.15. La siguiente definición de una hipérbola como un conjunto de puntos puede probarse a partir de la definición de la hipérbola como una sección cónica. La prueba, semejante a la empleada para una elipse en la Sección 11.1, implica una esfera en cada manto del cono.

DEFINICIÓN **Hipérbola**

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos en un plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante. Los dos puntos fijos se denominan **focos**.

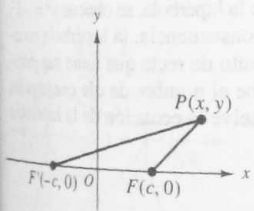


FIGURA 11.16

A fin de obtener una ecuación de una hipérbola se comienza como se realizó con la elipse haciendo que la distancia no dirigida entre los focos sea $2c$, donde $c > 0$. Después se elige al eje x como la recta que pasa por los focos F y F' y se toma al origen como el punto medio del segmento entre F y F'. *Véase* la Figura 11.16. Los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ son los focos F y F', respectivamente. Sea $2a$ la constante referida en la definición. Se puede mostrar que $c > a$. El punto $P(x, y)$ de la Figura 11.16 es cualquier punto sobre la hipérbola si y sólo si

$$\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 2a$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

P está sobre la hipérbola si y sólo si

$$\left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

o, equivalentemente, sin las barras de valor absoluto,

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Esta ecuación puede simplificarse al eliminar los radicales y aplicar algunas manipulaciones algebraicas. Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 43. Al efectuarlo, la ecuación resultante es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$. Así, se tiene el enunciado siguiente.

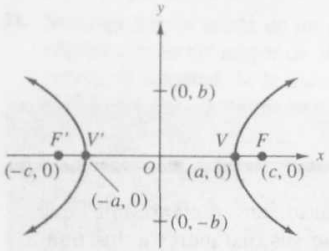


FIGURA 11.17

Ecuación de una hipérbola

Si $2a$ es la constante mencionada en la definición de la hipérbola y los focos están en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, y si $b^2 = c^2 - a^2$, entonces una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ahora se mostrará cómo se dibuja esta hipérbola, la cual se presenta en la Figura 11.17. Observe de la ecuación que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Como con la elipse, la recta que pasa por los focos se denomina **eje principal.** De modo que para esta hipérbola el eje x es el eje principal. Los puntos donde la hipérbola intersecta al eje principal se llaman **vértices,** y el punto que se encuentra a la mitad entre los vértices se denomina **centro.** Para esta hipérbola los vértices están en $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ y el centro está en el origen. El segmento $V'V$ del eje principal se llama **eje transverso** y su longitud es $2a$ unidades.

Al sustituir 0 por x en la ecuación de la hipérbola, se obtiene $y^2 = -b^2$, la cual no tiene soluciones reales. En consecuencia, la hipérbola no intersecta al eje y. Sin embargo, el segmento de recta que tiene sus extremos en los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ recibe el nombre de **eje conjugado,** y su longitud es $2b$ unidades. Si se resuelve la ecuación de la hipérbola para y en términos de x, se tiene

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Se concluye a partir de esta ecuación que si $|x| < a$, no existe valor real de y. De modo que no existen puntos (x, y) sobre la hipérbola para los cuales $-a < x < a$. También observe que si $|x| > a$, entonces y tiene dos valores reales. Así, la hipérbola tiene dos *ramas*. Una rama contiene al vértice $V(a, 0)$ y se extiende indefinidamente hacia la derecha de V. La otra rama contiene al vértice $V'(-a, 0)$ y se extiende a la izquierda de V'.

Como en el caso de la elipse, la hipérbola tiene centro y se denomina **cónica central.**

▸ EJEMPLO 1 *Determinación de las propiedades de una hipérbola a partir de su ecuación y dibujo de su gráfica*

Determine los vértices y focos de la hipérbola que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Dibuje la hipérbola y muestre los focos.

Solución Como la ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el centro de la hipérbola está en el origen y el eje principal es el eje x. Debido a que $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, entonces $a = 3$ y $b = 4$. Por tanto, los vértices están en $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$. El número de unidades del eje transverso es $2a = 6$, y el número de unidades de la longitud del eje conjugado es $2b = 8$. Puesto que $b^2 = c^2 - a^2$, con $c > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 16 &= c^2 - 9 \\ c^2 &= 16 + 9 \\ c^2 &= 25 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

De donde, los focos están en $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$. Un dibujo de la hipérbola con estos focos se presenta en la Figura 11.18. ◀

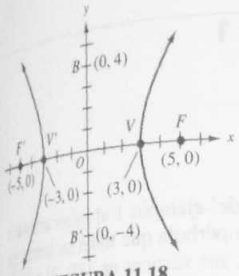
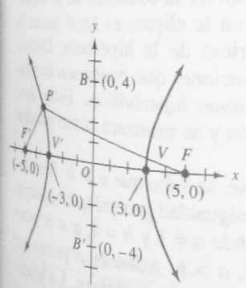


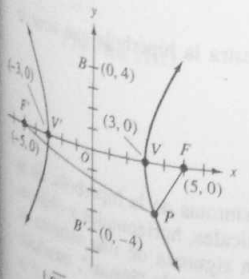
FIGURA 11.18

A partir de la definición de una hipérbola, si P es cualquier punto de la hipérbola del ejemplo 1, $\| \overline{FP} | - | \overline{F'P} \| = 6$. *Véase* la Figura 11.19(a) y 11.19(b); en (a) P está en el segundo cuadrante y $| \overline{FP} | - | \overline{F'P} | = 6$; en (b) P está en el cuarto cuadrante y $| \overline{FP} | - | \overline{F'P} | = 6$.



$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 6$

(a)



$|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 6$

(b)

FIGURA 11.19

▶ EJEMPLO 2 *Determinación de una ecuación de una hipérbola que tiene propiedades específicas*

Determine una ecuación de la hipérbola que tiene un foco en (5, 0) y los extremos de su eje conjugado en (0, 2) y (0, −2).

Solución Puesto que los extremos del eje conjugado están en (0, 2) y (0, −2), entonces $b = 2$, el eje principal está sobre el eje x, y su centro está en el origen. De aquí, la ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como un foco está en (5, 0), $c = 5$, y debido a que $b^2 = c^2 - a^2$, $a^2 = 25 - 4$. Así, $a = \sqrt{21}$, y la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$$ ◀

Si en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se intercambian x y y, se obtiene

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

la cual es una ecuación de una hipérbola que tiene su centro en el origen y su eje principal sobre el eje y.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La ecuación

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

puede obtenerse a partir de la ecuación del ejemplo 1 al intercambiar x y y. La gráfica de esta ecuación es una hipérbola que tiene su centro en el origen, el eje y como su eje principal, sus vértices en $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$, y sus focos en $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. La Figura 11.20 muestra la hipérbola y sus focos. ◂

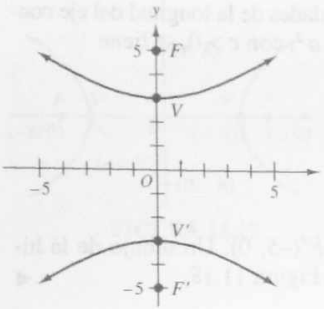


FIGURA 11.20

Como se hizo con las circunferencias en la Sección 3.4 y con la elipse del ejemplo ilustrativo 1 de la Sección 11.1, se puede trazar una hipérbola en una calculadora gráfica o graficadora al definir primero y como dos funciones de x obtenidas al resolver la ecuación de la hipérbola para y. Sin embargo, al igual que en la elipse, es fácil trazar la gráfica a partir de ecuaciones paramétricas de la hipérbola. Dichas ecuaciones paramétricas implican dos funciones que contienen combinaciones de e^x y e^{-x}, denominadas *funciones hiperbólicas*. Estas funciones se definirán al final de esta sección y se mostrará cómo pueden emplearse para trazar hipérbolas.

En la ecuación estándar de una elipse, se sabe que $a > b$. Sin embargo, para una hipérbola no existe una desigualdad general que implique a a y b. Tal es el caso del ejemplo 1, donde $a = 3$ y $b = 4$, $a < b$; pero en el ejemplo 2 donde $a = \sqrt{21}$ y $b = 2$, $a > b$. Además, a puede ser igual a b, en este caso se dice que la hipérbola es **equilátera.** La hipérbola equilátera que tiene la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1$$

se denomina **hipérbola unitaria.**

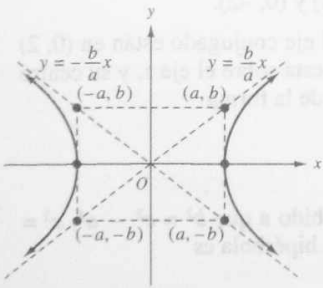


FIGURA 11.21

Véase la Figura 11.21, la cual muestra la hipérbola que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Las rectas punteadas en la figura son asíntotas de la hipérbola. En la Sección 5.5 se trataron las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de funciones racionales. Una definición rigurosa de una asíntota de una función más general requiere del concepto de "límite", estudiado en Cálculo. Sin embargo, intuitivamente puede establecerse que si la distancia no dirigida entre una gráfica y una recta se hace más pequeña (sin llegar a ser cero) conforme $|x|$ o $|y|$ se hacen cada vez más grandes, entonces la recta es una asíntota de la gráfica.

FIGURA

Observe en la Figura 11.21 que las diagonales del rectángulo que tiene sus vértices en (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$ y $(-a, -b)$ están sobre las asíntotas de la hipérbola. Este rectángulo se denomina **rectángulo auxiliar;** sus lados tienen longitudes $2a$ y $2b$. Los vértices de la hipérbola son los puntos de intersección del eje principal y el rectángulo auxiliar. Una gráfica bastante buena de una hipérbola puede obtenerse dibujando primero el rectángulo auxiliar. Al prolongar las diagonales del rectángulo, se tienen las asíntotas. Después, por cada vértice se dibuja una rama de la hipérbola utilizándose las asíntotas como guías. Observe que como $a^2 + b^2 = c^2$, la circunferencia que tiene su centro en el origen y que pasa por los vértices del rectángulo auxiliar también pasa por los focos de la hipérbola.

► **EJEMPLO 3** ***Determinación de las propiedades de una hipérbola a partir de su ecuación y dibujo de su gráfica***

Determine los vértices de la hipérbola que tiene la ecuación

$$x^2 - 4y^2 = 16$$

Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y sus asíntotas.

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Por tanto, la hipérbola tiene su centro en el origen y su eje principal es el eje x. Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$, entonces $a = 4$ y $b = 2$. Los vértices están en $V(4, 0)$ y $V'(-4, 0)$, y los lados del rectángulo auxiliar tienen longitudes $2a = 8$ y $2b = 4$. La Figura 11.22 muestra el rectángulo y las asíntotas. Tales asíntotas son empleadas como guías para dibujar la hipérbola que se muestra en la figura. ◄

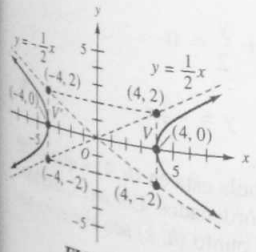


FIGURA 11.22

Se puede usar un truco nemotécnico para obtener las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, para la hipérbola que tiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se reemplaza el miembro derecho por 0 y se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Al factorizar, esta ecuación se convierte en

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

la cual es equivalente a las dos ecuaciones

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

las cuales son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola dada.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Una ecuación de la hipérbola del ejemplo 3 es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

A fin de obtener ecuaciones de las asíntotas se reemplaza el miembro derecho por 0, y se tiene

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 0$$

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 0 \qquad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 0$$

$$y = \tfrac{1}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\tfrac{1}{2}x \quad \blacktriangleleft$$

Suponga que el centro de una hipérbola está en (h, k) y que su eje principal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Entonces, mediante una traslación de ejes de modo que el punto (h, k) sea el nuevo origen, una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical. Si se sustituye x' por $x - h$ y y' por $y - k$, se obtienen las siguientes formas estándar de una ecuación de una hipérbola.

Formas estándar de una ecuación de una hipérbola

Si el centro de una hipérbola está en (h, k) y la distancia entre los vértices es $2a$, entonces una ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical.

Al desarrollar $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ y simplificar, se puede escribir cada una de estas ecuaciones en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

donde A y C tienen signos opuestos. El ejemplo siguiente implica una ecuación de esta forma.

► EJEMPLO 4 *Determinación de las propiedades de una hipérbola y dibujo de su gráfica*

Muestre que la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$$

es una hipérbola. Determine su centro, una ecuación del eje principal y los vértices. Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y sus asíntotas.

Solución Se comienza al completar los cuadrados en x y y. Así,

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) = -29$$
$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 9 - 16$$
$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$$
$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Esta ecuación es la de una hipérbola cuyo centro está en $(1, -2)$ y su eje principal es la recta vertical que tiene la ecuación $x = 1$. Debido a que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, $a = 3$ y $b = 2$. Los vértices están sobre el eje principal 3 unidades arriba y abajo del centro; de modo que ellos están en $V(1, 1)$ y $V'(1, -5)$. El rectángulo auxiliar tiene lados de longitudes

$2a = 6$ y $2b = 4$; se muestra en la Figura 11.23 junto con las asíntotas y la hipérbola. ◂

En el siguiente ejemplo ilustrativo se tiene otra ecuación en la forma (1).

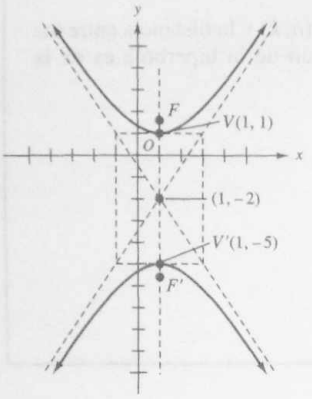


FIGURA 11.23

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La ecuación

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 156 = 0$$

puede escribirse como

$$4(x^2 + 6x) - 12(y^2 - 8y) = 156$$

y al completar los cuadrados se tiene

$$4(x^2 + 6x + 9) - 12(y^2 - 8y + 16) = 156 + 36 - 192$$

$$4(x + 3)^2 - 12(y - 4)^2 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 3(y - 4)^2 = 0$$

$$[(x + 3) - \sqrt{3}(y - 4)][(x + 3) + \sqrt{3}(y - 4)] = 0$$

$$x + 3 - \sqrt{3}(y - 4) = 0 \quad \text{y} \quad x + 3 + \sqrt{3}(y - 4) = 0$$

las cuales son ecuaciones de dos rectas que pasan por el punto $(-3, 4)$. ◂

En general, se puede probar que la gráfica de cualquier ecuación de la forma (1) es una hipérbola o dos rectas que se intersectan. Los resultados del ejemplo 4 y del ejemplo ilustrativo 3 son casos particulares de este hecho.

La ecuación (1) es el caso especial de la ecuación general de segundo grado en dos variables,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

donde $B = 0$ y $AC < 0$ (esto es, A y C tienen signos opuestos).

El siguiente teorema resume las conclusiones de la discusión anterior.

TEOREMA 1

Si en la ecuación general de segundo grado (2), $B = 0$ y $AC < 0$, entonces la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se intersectan.

El caso degenerado de una hipérbola, dos rectas que se intersectan, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene

dos rectas que se cortan

FIGURA 11.24

al vértice del cono y dos generatrices, como se muestra en la Figura 11.24.

▸ EJEMPLO 5 *Determinación de las ecuaciones de una hipérbola y sus asíntotas a partir de las propiedades de la hipérbola y dibujo de la gráfica*

Los vértices de una hipérbola están en (–5, –3) y (–5, –1) y los extremos del eje conjugado están en (–7, –2) y (–3, –2). Determine una ecuación de la hipérbola y de las ecuaciones de sus asíntotas. Dibuje la hipérbola y las asíntotas.

Solución La distancia entre los vértices es $2a$; en consecuencia, $2a = 2$ y $a = 1$. La longitud del eje conjugado es $2b$, de modo que $2b = 4$ y $b = 2$. Como el eje principal es vertical, una ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

El centro (h, k) está a la mitad entre los vértices y es, por tanto, el punto (–5, –2). En consecuencia, una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y + 2)^2}{1} - \frac{(x + 5)^2}{4} = 1$$

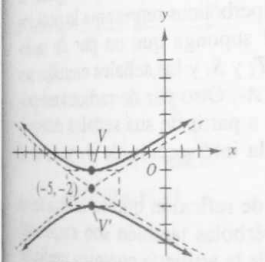


FIGURA 11.25

Al reemplazar el miembro derecho por cero se obtienen ecuaciones de las asíntotas, así

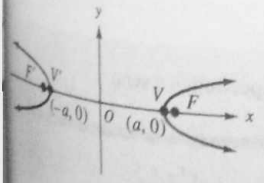
$$\left(\frac{y + 2}{1} - \frac{x + 5}{2}\right)\left(\frac{y + 2}{1} + \frac{x + 5}{2}\right) = 0$$

$$y + 2 = \tfrac{1}{2}(x + 5) \quad \text{y} \quad y + 2 = -\tfrac{1}{2}(x + 5)$$

La hipérbola y las asíntotas se muestran en la Figura 11.25. ◂

Como con la elipse, una indicación de la forma de una hipérbola está dada por su *excentricidad*, definida exactamente como para una elipse; esto es, si e es la **excentricidad** de una hipérbola,

$$e = \frac{c}{a}$$



$e = 1.05$

(a)

FIGURA 11.26

Sin embargo, para una hipérbola $e > 1$. Esto se deduce del hecho de que $c > a$ porque para una hipérbola

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3}$$

A partir de esta ecuación, cuando $a = b$, se obtiene $c = \sqrt{2}a$. De modo que la excentricidad de una hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$. *Véase* la Figura 11.26(b). Si e se aproxima a 1 y a permanece fijo, entonces c se aproxima a a y de la ecuación (3) b se aproxima a 0, de modo que la forma de la hipérbola se hace "flaca" en torno a su eje principal. La Figura

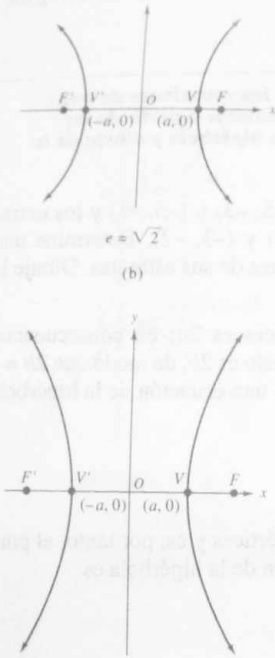


FIGURA 11.26

11.26(a) muestra una hipérbola con $e = 1.05$ y el mismo valor de a como en la Figura 11.26(b). Si e se incrementa conforme a permanece fijo, entonces c y b se incrementan, y la hipérbola se hace "gorda" en torno a su eje principal. *Véase* la Figura 11.26(c) que presenta una hipérbola con $e = 2$ y el mismo valor de a como en las figuras 11.26(a) y 11.26(b).

La propiedad de la hipérbola proporcionada en su definición forma la base de varios sistemas importantes de navegación. Tales sistemas comprenden una red de pares de radiotransmisores en posiciones fijas a una distancia conocida entre sí. Los radiotransmisores envían señales de radio que son recibidas por un navegante. La diferencia de tiempo de llegada de ambas señales determina la diferencia $2a$ de las distancias con relación al navegante. De modo que la posición de la nave se sabe que está en algún punto a lo largo de un arco de una hipérbola con focos en los lugares donde se ubican los dos radiotransmisores. Se determina un arco, y no ambos, debido al retraso de la señal de los radiotransmisores que se introducen en el sistema. El procedimiento se repite para un par diferente de radiotransmisores y se determina otro arco de hipérbola que proporciona la posición del navegante. El punto de intersección de los dos arcos hiperbólicos representa la posición real. Por ejemplo, en la Figura 11.27 suponga que un par de radiotransmisores se localiza en los puntos T_1 y S_1 y las señales emitidas por este par determina el arco hiperbólico A_1. Otro par de radiotransmisores se localiza en los puntos T_2 y S_2 y a partir de sus señales determinan el arco hiperbólico A_2. Entonces la intersección de A_1 y A_2 es la posición del navegante.

La hipérbola tiene una propiedad de reflexión que se utiliza en el diseño de ciertos telescopios. Las hipérbolas también son empleadas en la guerra para localizar la posición de la artillería enemiga mediante el ruido de sus disparos, este método se denomina *localización acústica*. Algunos cometas se mueven en órbitas hiperbólicas. Si una cantidad varía inversamente con respecto a otra, tales como la presión y el volumen en la ley de Boyle para un gas ideal ($PV = k$), la gráfica es una hipérbola como se verá en la Sección 11.3.

Ahora se definirán las funciones *coseno hiperbólico* (abreviado cosh) y *seno hiperbólico* (abreviado senh), las cuales se aplicarán para obtener ecuaciones paramétricas de una hipérbola.

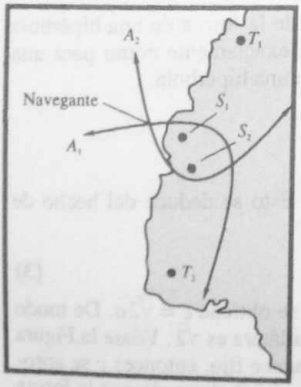


FIGURA 11.27

DEFINICIÓN **Funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico**

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Los dominios de las dos funciones son el conjunto R de números reales. El contradominio de cosh es el intervalo $[1, +\infty)$ y el contradominio de senh es el conjunto R de números reales.

Ahora se obtendrá una identidad fundamental que implica a cosh y senh a partir de la cual se deducen ecuaciones paramétricas de una hipérbola. De las definiciones de cosh t y senh t, se tiene

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2t} + 2e^0 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2e^0 + e^{-2t}}{4}$$

$$= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

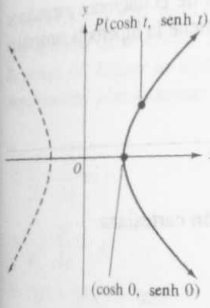


FIGURA 11.28

Así, se ha probado la identidad

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

De esta identidad se deduce que las ecuaciones paramétricas

$$x = \cosh t \quad \text{y} \quad y = \operatorname{senh} t \tag{4}$$

definen puntos sobre la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$. Sin embargo, como cosh nunca es menor que 1, la curva definida por las ecuaciones paramétricas consiste únicamente de los puntos sobre la rama derecha de la hipérbola unitaria. *Véase* la Figura 11.28. La curva "punteada" en la figura es la rama izquierda de la hipérbola unitaria, la cual no es definida por las ecuaciones paramétricas (4). No obstante, se puede definir la rama izquierda mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = -\cosh t \quad \text{y} \quad y = \operatorname{senh} t$$

Por lo general, las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cosh t \quad \text{y} \quad y = b \operatorname{senh} t$$

definen la rama derecha de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y las ecuaciones paramétricas

$$x = -a \cosh t \quad \text{y} \quad y = b \operatorname{senh} t$$

definen la rama izquierda. Se le pedirá que pruebe esto en el ejercicio 44. En los dos ejemplos ilustrativos siguientes se obtendrán las ecuaciones paramétricas, las cuales se emplearán para trazar en la graficadora las hipérbolas de los ejemplos 1 y 4. Consulte el manual para aprender cómo introducir funciones hiperbólicas en su graficadora particular.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

La hipérbola del ejemplo 1 tiene la ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Las ecuaciones paramétricas de la rama derecha de esta hipérbola son

$$x = 3\cosh t \quad \text{y} \quad y = 4\operatorname{senh} t$$

y las ecuaciones paramétricas de la rama izquierda son

$$x = -3\cosh t \quad \text{y} \quad y = 4\operatorname{senh} t$$

Al trazar las gráficas de los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas en el mismo rectángulo de inspección se obtiene la hipérbola mostrada en la Figura 11.18. ◂

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

La hipérbola del ejemplo 4 tiene la ecuación cartesiana

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Las ecuaciones paramétricas de la rama superior de esta hipérbola son

$$x = 2\operatorname{senh} t + 1 \quad \text{y} \quad y = 3\cosh t - 2$$

y las ecuaciones paramétricas de la rama inferior son

$$x = 2\operatorname{senh} t + 1 \quad \text{y} \quad y = -3\cosh t - 2$$

Al trazar las gráficas de estos dos conjuntos de ecuaciones paramétricas en el mismo rectángulo de inspección se obtiene la hipérbola presentada en la Figura 11.23. ◂

Un método alternativo para trazar la hipérbola del ejemplo ilustrativo 5 emplea las ecuaciones paramétricas

$$x = 2\tan t + 1 \quad \text{y} \quad y = 3\sec t - 2$$

donde $0 \le t \le 2\pi$, basado en la identidad $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$. *Véase* el ejercicio 55.

$\iint \frac{dy}{dx}$

Las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico, así como otras funciones hiperbólicas, son tratadas con más detalle en un curso de Cálculo, en donde la mayoría de sus aplicaciones son a la ingeniería y física. En particular, la catenaria, una curva formada por un cable flexible de densidad uniforme que cuelga de dos puntos por su propio peso, tiene una ecuación que implica cosh.

EJERCICIOS 11.2

En los ejercicios 1 a 6, para la hipérbola de ecuación dada, determine (a) el centro, (b) el eje principal, (c) los vértices y (d) los focos. (e) Dibuje la hipérbola y muestre los focos.

1. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$
2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$
3. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$
4. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
5. $9x^2 - 4y^2 = 36$
6. $25y^2 - 4x^2 = 100$

En los ejercicios 7 a 20, para la hipérbola de ecuación dada, determine (a) el centro, (b) el eje principal y (c) los vértices. (d) Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

7. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
8. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$
9. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$
10. $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{49} = 1$
11. $25y^2 - 36x^2 = 900$
12. $4x^2 - 9y^2 = 144$
13. $x^2 - y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$
14. $9y^2 - 4x^2 + 32x - 36y - 64 = 0$
15. $9x^2 - 16y^2 + 54x - 32y - 79 = 0$
16. $9y^2 - 25x^2 - 50x - 72y - 106 = 0$
17. $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$
18. $2x^2 - y^2 + 12x + 8y - 6 = 0$
19. $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$
20. $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$

En los ejercicios 21 a 26, encuentre ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola del ejercicio indicado.

21. Ejercicio 7
22. Ejercicio 10
23. Ejercicio 13
24. Ejercicio 16
25. Ejercicio 19
26. Ejercicio 18

En los ejercicios 27 a 36, encuentre una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones y dibuje la hipérbola.

27. Vértices en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y el eje conjugado de longitud 6.
28. Focos en $(0, 5)$ y $(0, -5)$ y un vértice en $(0, 4)$.
29. Centro en el origen, sus focos sobre el eje y, y pasa por los puntos $(-2, 4)$ y $(-6, 7)$.
30. Extremos del eje conjugado en $(0, -3)$ y $(0, 3)$ y un foco en $(5, 0)$.
31. Un foco en $(26, 0)$ y como asíntotas las rectas $12y = \pm 5x$.
32. Centro en $(3, -5)$, un vértice en $(7, -5)$ y foco en $(8, -5)$.
33. Centro en $(-2, -1)$, un vértice en $(-2, 11)$ y un foco en $(-2, 14)$
34. Focos en $(3, 6)$ y $(3, 0)$ y pasa por el punto $(5, 3 + \frac{6}{5}\sqrt{5})$.
35. Focos en $(-1, 4)$ y $(7, 4)$ y la longitud del eje transverso es $\frac{8}{3}$.
36. Un foco en $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$, las asíntotas se intersectan en $(-3, 1)$, y una asíntota pasa por el punto $(1, 7)$.
37. Los vértices de una hipérbola están en $(-3, -1)$ y $(-1, -1)$ y la distancia entre los focos es $2\sqrt{5}$. Encuentre **(a)** una ecuación de la hipérbola y **(b)** ecuaciones de las asíntotas.
38. Los focos de una hipérbola están en $(2, 7)$ y $(2, -7)$ y la distancia entre los vértices es $8\sqrt{3}$. Encuentre **(a)** una ecuación de la hipérbola y **(b)** ecuaciones de las asíntotas.
39. Encuentre la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $7x^2 + 11y^2 = 77$ y cuyos vértices están en los focos de esta elipse.
40. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola $11x^2 - 7y^2 = 77$ y cuyos vértices están en los focos de esta hipérbola.
41. El costo de producción de un artículo es de \$12 menos por unidad en un punto A que en un punto B, y la distancia entre A y B es 100 km. Suponga que la ruta de entrega del producto es una línea recta y que el costo de entrega es 20 centavos por unidad por kilómetro, determine la curva en cualquier punto del cual pueda surtirse el artículo desde A o B al mismo costo total. (*Sugerencia:* considere los puntos A y B como $(-50, 0)$ y $(50, 0)$, respectivamente.)

42. Dos estaciones LORAN (*long range navigation*, es decir, navegación de largo alcance) A y B están situadas en una línea recta este-oeste y A está a 80 mi al este de B. Un avión vuela en una línea recta que está a 60 mi al norte de la recta que pasa por A y B. Se envían señales al mismo tiempo desde A y B, y la señal de A llega al avión 350 μs (microsegundos) antes que la de B. Si las señales viajan a razón de 0.2 mi/μs, determine la posición del avión mediante la definición de una hipérbola.

43. Muestre que la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

puede simplificarse como

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

donde $b^2=c^2-a^2$.

44. Pruebe que la hipérbola que tiene la ecuación cartesiana $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ está definida por los dos siguientes conjuntos de ecuaciones paramétricas:

$$x=a\cosh t \quad \text{y} \quad y=b\operatorname{senh} t$$

y

$$x=-a\cosh t \quad \text{y} \quad y=b\operatorname{senh} t$$

En los ejercicios 45 a 52, escriba ecuaciones paramétricas que definan la hipérbola del ejercicio indicado, y úselas para trazar la hipérbola.

45. Ejercicio 1
46. Ejercicio 2
47. Ejercicio 3
48. Ejercicio 4
49. Ejercicio 13
50. Ejercicio 14
51. Ejercicio 17
52. Ejercicio 18

53. Para una hipérbola la excentricidad e es mayor que 1, y para una elipse $0<e<1$. Explique por qué la excentricidad de una parábola es igual a 1.

54. Explique cómo las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico están relacionadas con las coordenadas de puntos de la hipérbola unitaria de manera semejante a como las funciones trigonométricas correspondientes (coseno y seno) están relacionadas con las coordenadas de puntos de la circunferencia unitaria.

55. Explique por qué la hipérbola que tiene la ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

puede trazarse utilizando las ecuaciones paramétricas

$$x=b\tan t+h \quad \text{y} \quad y=a\sec t+k$$

56. Refiérase al ejercicio 55. Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas que contenga las funciones tangente y secante, el cual debe emplearse para trazar la hipérbola que tiene la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

y explique por qué funciona el procedimiento.

11.3 ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES Y ROTACIÓN DE EJES

OBJETIVOS

1. **Utilizar el producto de los coeficientes de x^2 y y^2 para identificar la gráfica de la ecuación de segundo grado en dos variables que no contiene el término xy.**
2. **Aprender las fórmulas de rotación de ejes.**
3. **Obtener una ecuación de una gráfica con respecto a los nuevos ejes después de rotar los ejes.**
4. **Eliminar el término xy en una ecuación de segundo grado mediante la rotación de ejes.**

5. **Dibujar la gráfica de una ecuación de segundo grado que contiene un término xy.**
6. **Identificar la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables examinando el discriminante de la ecuación.**
7. **Trazar la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables en la graficadora.**

En las secciones 11.1 y 11.2 se dijo que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables,

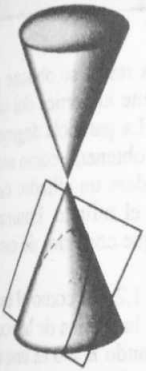
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

es una elipse o un caso degenerado si $B = 0$ y $AC > 0$, y una hipérbola o un caso degenerado si $B = 0$ y $AC < 0$.

Ahora se considerará (1) donde $B = 0$ y $AC = 0$. En tal caso $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambos, ya que si los tres números A, B y C son todos cero, (1) no es una ecuación de segundo grado. Suponga en (1) que $B = 0$, $A = 0$ y $C \neq 0$. Entonces (1) se transforma en

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

Si $D \neq 0$, se vio en la Sección 3.5 que la gráfica de esta ecuación es una parábola, la tercera sección cónica. La parábola se obtiene como una sección cónica si el plano cortante es paralelo a una y sólo a una generatriz de un cono. *Véase* la Figura 11.29.



parábola

FIGURA 11.29

En la Sección 3.3 se definió una parábola como un conjunto de puntos en un plano. La prueba de que esta definición se deduce a partir de su definición como una sección cónica, es similar a la de la elipse. Sin embargo, para una parábola se necesita únicamente una esfera tangente al plano cortante en el foco y tangente al cono a lo largo de una circunferencia. La intersección del plano de la circunferencia con el plano cortante es la directriz de la parábola.

Los casos degenerados de una parábola ocurren si $D = 0$ en (2), son dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La gráfica de la ecuación

$$4y^2 - 9 = 0$$

consiste de dos rectas paralelas: $2y - 3 = 0$ y $2y + 3 = 0$. La gráfica de la ecuación

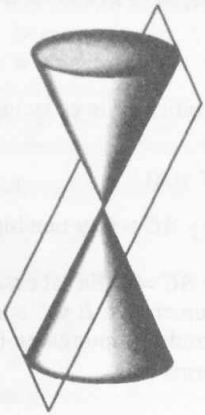
$$9y^2 + 6y + 1 = 0$$

es una recta porque la ecuación es equivalente a $(3y + 1)^2 = 0$. Como la ecuación

$$2y^2 + y + 1 = 0$$

no tiene soluciones reales, su gráfica es el conjunto vacío. ◀

Una discusión semejante a la anterior puede darse si, en (1), $B = 0$, $C = 0$ y $A \neq 0$. En el siguiente teorema se resumen los resultados obtenidos.



recta

FIGURA 11.30

TEOREMA 1

En la ecuación general de segundo grado (1), si $B = 0$, y si además $A = 0$ y $C \neq 0$, o bien $C = 0$ y $A \neq 0$, entonces la gráfica es una de las siguientes: una parábola, dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.

El caso degenerado de una parábola, una recta, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice del cono y sólo una generatriz, como en la Figura 11.30. La parábola degenerada, que consiste de dos rectas paralelas, no puede obtenerse como una sección plana de un cono a menos que se considere un cilindro circular como un cono degenerado con su vértice en el infinito. Entonces un plano paralelo a las generatrices del cilindro que corte dos de estas generatrices produce las dos rectas paralelas.

De los teoremas de las secciones 11.1 y 11.2, así como el teorema anterior de esta sección, puede concluirse que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables cuando $B = 0$ es una cónica o una cónica degenerada. El tipo de cónica puede determinarse a partir del producto de A y C. De modo que se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 2

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cuando A y C no son ambos cero, es una cónica o una cónica degenerada. Si es una cónica, entonces la gráfica es

(i) una *parábola* si $A = 0$ o $C = 0$, esto es $AC = 0$;
(ii) una *elipse* si A y C tienen el mismo signo, esto es, $AC > 0$;
(iii) una *hipérbola* si A y C tienen signos opuestos, esto es, $AC < 0$.

► EJEMPLO 1 *Identificación de la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables*

Identifique la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones, así como el tipo de cónica o cónica degenerada.

(a) $9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 4 = 0$ **(b)** $x^2 + 4y^2 = 0$

(c) $2x^2 + 12x - 5y + 28 = 0$ **(d)** $x^2 - 4 = 0$

(e) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 4y - 2 = 0$ **(f)** $x^2 - 4y^2 = 0$

Solución En cada inciso, se tiene una ecuación de segundo grado en dos variables. Por tanto, la gráfica es una cónica o una cónica degenerada. Del Teorema 2, el producto AC determina el tipo de cónica.

(a) Como $A = 9$ y $C = 1$, $AC = 9 > 0$. Por tanto, la gráfica es una elipse, o bien, una elipse degenerada. Al completar los cuadrados, la ecuación puede escribirse como

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

De modo que la gráfica es una elipse.

(b) Debido a que el único par ordenado que satisface esta ecuación es $(0, 0)$, la gráfica es el origen, una elipse degenerada.

(c) Puesto que $C = 0$, $AC = 0$. Así, la gráfica es una parábola, o bien, una parábola degenerada. Al completar cuadrados, la ecuación puede escribirse como

$$(x + 3)^2 = \tfrac{5}{2}(y - 2)$$

la cual es una ecuación de una parábola.

(d) Debido a que la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es equivalente a la ecuación $(x - 2)(x + 2) = 0$, su gráfica consiste de dos rectas paralelas $x = 2$ y $x = -2$, una parábola degenerada.

(e) Puesto que $A = 3$ y $C = -2$, $AC = -6 < 0$. Por tanto, la gráfica es una hipérbola, o bien, una hipérbola degenerada. La ecuación es equivalente a

$$\frac{(x + 2)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{6} = 1$$

cuya gráfica es una hipérbola.

(f) La ecuación es equivalente a $(x - 2y)(x + 2y) = 0$; de modo que su gráfica consta de dos rectas que se intersectan: $x = 2y$ y $x = -2y$, una hipérbola degenerada. ◀

Ahora se discutirá la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables cuando $B \neq 0$, esto es, una ecuación que tiene un término xy. Tal ecuación se transformará en una ecuación que no contenga término xy mediante la rotación de los ejes coordenados. Mientras que una traslación de ejes origina un nuevo sistema coordenado cuyos ejes son paralelos a los ejes x y y originales, una rotación de ejes proporciona un sistema coordenado que, en general, *no* tendrá ejes paralelos a los ejes originales.

Suponga que se tienen dos sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares con el mismo origen. Sea uno de ellos el sistema xy y el otro, el sistema $\bar{x}\,\bar{y}$. Además, suponga que el eje $\bar{x}$ forma un ángulo de

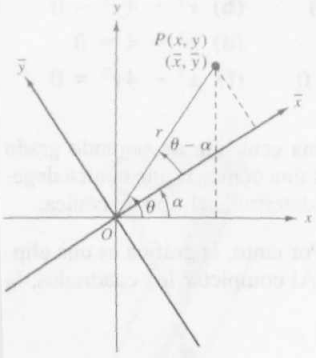


FIGURA 11.31

α radianes con el eje x. *Véase* la Figura 11.31. Por supuesto, el eje $\bar{y}$ también forma un ángulo de α radianes con el eje y. En tal caso, se dice que el sistema de coordenadas xy sufrió un *giro* o *rotación* de un ángulo de α radianes para formar el sistema de coordenadas $\bar{x}\,\bar{y}$. Un punto P que tiene coordenadas (x, y) con respecto al sistema coordenado original, tendrá coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ con respecto al nuevo sistema. Ahora se obtendrán las relaciones entre estos dos conjuntos de coordenadas.

En la Figura 11.31, r denota la distancia no dirigida $|\overline{OP}|$ y θ el ángulo medido desde el eje x hasta el segmento rectilíneo OP. De la figura se observa que

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{3}$$

También de la Figura 11.31

$$\bar{x} = r\cos(\theta - \alpha) \quad \text{y} \quad \bar{y} = r\,\text{sen}(\theta - \alpha)$$

Con las identidades de coseno y seno de la diferencia, estas dos ecuaciones se transforman en

$$\bar{x} = r\cos\theta\cos\alpha + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha$$

y

$$\bar{y} = r\,\text{sen}\,\theta\cos\alpha - r\cos\theta\,\text{sen}\,\alpha$$

Si se sustituyen x y y de las ecuaciones (3) en las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\bar{x} = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{y} \quad \bar{y} = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \tag{4}$$

Al resolver las ecuaciones (4) simultáneamente para x y y en términos de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ (*véase* el ejercicio 38), se obtiene

$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{y} \quad y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha \tag{5}$$

A continuación se establece este resultado formalmente.

Fórmulas de rotación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado y $(\bar{x}, \bar{y})$ es una representación de P después de que los ejes han sido rotados un ángulo α, entonces

(i) $x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$ y $y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$

(ii) $\bar{x} = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha$ y $\bar{y} = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$

▸ EJEMPLO 2 *Obtención de la ecuación de una gráfica después de una rotación de los ejes y dibujo de la gráfica*

Dada la ecuación

$$xy = 1$$

(a) Obtenga una ecuación de la gráfica respecto de los ejes x y y después de rotar los ejes un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ radianes. **(b)** Dibuje la gráfica y muestre los dos sistemas de ejes.

Solución

(a) Con $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ en (i) de las fórmulas de rotación de ejes, se obtiene

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$$

Al sustituir estas expresiones por x y y en la ecuación $xy = 1$, se obtiene

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

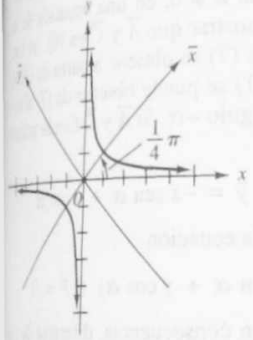


FIGURA 11.32

(b) Ésta es una ecuación de una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los bisectores de los cuadrantes en el sistema $\bar{x}\bar{y}$. De modo que la gráfica de la ecuación $xy = 1$ es una hipérbola equilátera que está en los cuadrantes primero y tercero, y las asíntotas son los ejes x y y. *Véase* la Figura 11.32 que contiene la gráfica requerida. ◀

Del Teorema 1 se sabe que cuando $B = 0$ y A o C no son a la vez cero, la gráfica de (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables es una cónica, o bien, una cónica degenerada. Ahora se mostrará que si $B \neq 0$, entonces cualquier ecuación de la forma (1) puede transformarse, mediante una adecuada rotación de ejes, en una ecuación de la forma

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

donde $\bar{A}$ y $\bar{C}$ no son ambos cero.

Si el sistema xy se rota un ángulo α, entonces para obtener una ecuación de la gráfica de (1) con respecto al sistema $\bar{x}\bar{y}$, se sustituye x por $\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha$ y y por $\bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha$. Al efectuar las sustituciones se obtiene

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

donde

$$\bar{A} = A\cos^2\alpha + B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,\text{sen}^2\alpha$$

$$\bar{B} = -2A\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) + 2C\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$\bar{C} = A\,\text{sen}^2\alpha - B\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

Se desea determinar un α de modo que la rotación transforme (1) en una ecuación de la forma (6). Al igualar la expresión para $\bar{B}$ a cero, se tiene

$$B(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) + (C - A)(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) = 0$$

o equivalentemente, con identidades trigonométricas,

$$B\cos 2\alpha + (C - A)\operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

Debido a que $B \neq 0$, se obtiene

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Se ha mostrado que una rotación de ejes mediante un ángulo α, el cual satisface esta ecuación, transformará (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables, donde $B \neq 0$, en una ecuación de la forma (6). Lo que se desea ahora es mostrar que $\overline{A}$ y $\overline{C}$ en (6), no son ambos cero. Para probar esto, note que (7) se obtiene a partir de (1) al rotar los ejes un ángulo α. También (1) se puede obtener de (7) al rotar los ejes, en sentido contrario, un ángulo $-\alpha$. Si $\overline{A}$ y $\overline{C}$ fueran ambos cero en (7), entonces las sustituciones

$$\bar{x} = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$$

en esa ecuación daría como resultado la ecuación

$$\overline{D}(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha) + \overline{E}(-x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha) + \overline{F} = 0$$

Esta ecuación es de primer grado y, en consecuencia, diferente de (1) porque se supuso que al menos $B \neq 0$. Por tanto, se ha probado el teorema siguiente.

TEOREMA 3

Si $B \neq 0$, la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede transformarse en la ecuación

$$\overline{A}\bar{x}^2 + \overline{C}\bar{y}^2 + \overline{D}\bar{x} + \overline{E}\bar{y} + \overline{F} = 0$$

donde $\overline{A}$ y $\overline{C}$ no son ambos cero, por una rotación de ejes de un ángulo α para el cual

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

De los teoremas 2 y 3, se infiere que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables es una cónica, o bien, una cónica degenerada. Para determinar qué tipo de cónica es la gráfica de una ecuación particular, se examina la expresión $B^2 - 4AC$.

Se emplea el hecho de que A, B y C de (1) y $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$ de (7) satisfacen la ecuación

$$B^2 - 4AC = \overline{B}^2 - 4\overline{A}\,\overline{C} \tag{8}$$

lo cual puede probarse al sustituir las expresiones para $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$, dadas después de la ecuación (7) en el miembro derecho. En el ejercicio 37 se le pedirá que haga esto.

La expresión $B^2 - 4AC$ se denomina **discriminante** y la ecuación (8) establece que el discriminante de la ecuación general cuadrática en dos variables es **invariante** bajo una rotación de ejes.

Si el ángulo de rotación se elige de modo que $\overline{B} = 0$, entonces (8) se transforma en

$$B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} \tag{9}$$

Excepto para casos degenerados, al aplicar el Teorema 2, la gráfica de la ecuación

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0$$

es una parábola si $\overline{A}\,\overline{C} = 0$, una elipse si $\overline{A}\,\overline{C} > 0$, y una hipérbola si $\overline{A}\,\overline{C} < 0$; o, equivalentemente, una parábola si $-4\overline{A}\,\overline{C} = 0$, una elipse si $-4\overline{A}\,\overline{C} < 0$, y una hipérbola si $-4\overline{A}\,\overline{C} > 0$. De estos hechos y la ecuación (9) se deduce que, excepto para casos degenerados, la gráfica de (1), la ecuación general de segundo grado, es una parábola, una elipse o una hipérbola dependiendo de que el discriminante $B^2 - 4AC$ sea cero, positivo o negativo. Así, se ha probado el teorema siguiente.

TEOREMA 4

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, o bien, una cónica degenerada. Si la gráfica es una cónica, entonces es

(i) una *parábola* si $B^2 - 4AC = 0$;
(ii) una *elipse* si $B^2 - 4AC < 0$;
(iii) una *hipérbola* si $B^2 - 4AC > 0$.

▶ EJEMPLO 3 *Simplificación de una ecuación mediante una rotación de ejes y dibujo de su gráfica*

(a) Identifique la gráfica de la ecuación

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$$

(b) Simplifique la ecuación mediante una rotación de ejes. **(c)** Dibuje la gráfica de la ecuación y muestre ambos conjuntos de ejes.

Solución

(a) De la ecuación, $A = 17$, $B = -12$ y $C = 8$.

$$B^2 - 4AC = (-12)^2 - 4(17)(8)$$

Como $B^2 - 4AC < 0$, por el Teorema 4, la gráfica es una elipse, o bien, una elipse degenerada.

(b) Para eliminar el término xy mediante una rotación de ejes se debe elegir α, tal que

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{17 - 8}{-12} = -\frac{3}{4}$$

Existe un 2α en el intervalo $(0, \pi)$ para el cual $\cot 2\alpha = -\frac{3}{4}$. Por tanto, está en el intervalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Para aplicar las fórmulas de rotación de ejes, no es necesario encontrar α una vez que se determinan $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$. Estas funciones pueden determinarse a partir del valor de $\cot 2\alpha$ mediante las identidades trigonométricas

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Como $\cot 2\alpha = -\frac{3}{4}$ y $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, se deduce que $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$. Así

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Al sustituir $x = \bar{x}/\sqrt{5} - 2\bar{y}/\sqrt{5}$ y $y = 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$ en la ecuación dada, se tiene

$$17\left(\frac{\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2}{5}\right) - 12\left(\frac{2\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}^2}{5}\right) + 8\left(\frac{4\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}{5}\right) - 80 = 0$$

Si se simplifica esta ecuación, se obtiene

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 16$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

Por tanto, la gráfica es una elipse cuyo eje mayor mide 8 unidades de longitud y cuyo eje menor mide 4 unidades de longitud.

(c) Se aplicó la transformación obtenida en el inciso (b) para dibujar la elipse. La Figura 11.33 muestra esta elipse y los dos conjuntos de ejes. ◀

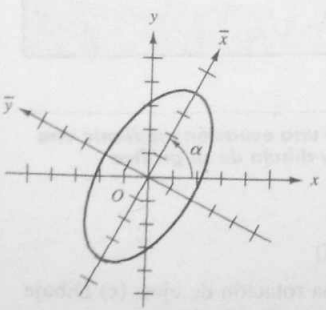


FIGURA 11.33

Como se puede ver en el ejemplo anterior, el dibujo de la gráfica de una ecuación de segundo grado, que tiene término xy, mediante una

rotación de ejes frecuentemente requiere de cálculos tediosos. Como se muestra en el ejemplo siguiente, trazar la gráfica de una de dichas ecuaciones en una graficadora también puede acarrear cálculos complicados cuando primero se expresa y como dos funciones de x.

▶ EJEMPLO 4 *Trazo de la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables*

Trace la gráfica de la ecuación del ejemplo 3.

Solución La ecuación define a y como dos funciones de x. Para encontrar estas funciones se considera la ecuación como cuadrática en y y se escribe como

$$8y^2 - 12xy + (17x^2 - 80) = 0$$

De la fórmula cuadrática con $a = 8$, $b = -12x$ y $c = 17x^2 - 80$, se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-12x) \pm \sqrt{(-12x)^2 - 4(8)(17x^2 - 80)}}{2(8)} \\ &= \frac{12x \pm 4\sqrt{160 - 25x^2}}{16} \\ &= \frac{3x \pm \sqrt{160 - 25x^2}}{4} \end{aligned}$$

En el rectángulo de inspección de $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$ se trazan las gráficas de

$$y_1 = \frac{3x + \sqrt{160 - 25x^2}}{4} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{3x - \sqrt{160 - 25x^2}}{4}$$

para obtener la elipse de la Figura 11.33. ◀

EJERCICIOS 11.3

En los ejercicios 1 a 4, identifique la gráfica de la ecuación, así como el tipo de cónica o cónica degenerada.

1. (a) $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 31 = 0$
   (b) $4x^2 + y^2 + 8x - 14y - 47 = 0$
   (c) $y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$
   (d) $x^2 - 16y^2 = 0$
2. (a) $2x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$
   (b) $2x^2 - 3y^2 + 16x + 12y + 38 = 0$
   (c) $16y^2 + 24y + 9 = 0$
   (d) $4x^2 + 16x - 3y + 19 = 0$
3. (a) $3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 23 = 0$
   (b) $4x^2 - 5y^2 + 16x + 10y + 111 = 0$
   (c) $2x^2 - 16x - 5y + 22 = 0$
   (d) $9x^2 + 30x + 29 = 0$
4. (a) $5y^2 + 4x + 10y - 3 = 0$
   (b) $3x^2 + 7y^2 - 6x + 28y + 37 = 0$
   (c) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 6y + 15 = 0$
   (d) $4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 55 = 0$

En los ejercicios 5 a 8, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) encuentre una ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x y y después de una rotación de ejes

de un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ radianes, y (c) dibuje la gráfica y muestre ambos conjuntos de ejes.

5. $xy = 8$
6. $xy = -4$
7. $x^2 - y^2 = 8$
8. $y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 9 a 16, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) elimine el término xy mediante una rotación de ejes, y (c) dibuje la gráfica y muestre los dos conjuntos de ejes.

9. $24xy - 7y^2 + 36 = 0$
10. $4xy + 3x^2 = 4$
11. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$
12. $x^2 + xy + y^2 = 3$
13. $xy + 16 = 0$
14. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9$
15. $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$
16. $6x^2 + 20\sqrt{3}xy + 26y^2 = 324$

En los ejercicios 17 a 26, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) simplifique la ecuación mediante una rotación y traslación de ejes, y (c) dibuje la gráfica y muestre los tres conjuntos de ejes.

17. $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$
18. $19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$
19. $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$
20. $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
21. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$
22. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0$
23. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$
24. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$
25. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 12 = 0$
26. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y = 0$

En los ejercicios 27 a 34, trace la gráfica de la ecuación del ejercicio indicado.

27. Ejercicio 9
28. Ejercicio 10
29. Ejercicio 11
30. Ejercicio 12
31. Ejercicio 17
32. Ejercicio 18
33. Ejercicio 21
34. Ejercicio 22

35. Muestre que la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ es parte de una parábola al rotar los ejes un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ radianes. *Sugerencia:* elimine los radicales antes de aplicar las fórmulas de rotación de ejes.

36. Dada la ecuación $(a^2 + b^2)xy = 1$, donde $a > 0$ y $b > 0$, encuentre la ecuación de la gráfica con respecto a los ejes $\bar{x}$ y $\bar{y}$ después de una rotación de los ejes mediante un ángulo de $\tan^{-1}(b/a)$ radianes.

37. Muestre que para la ecuación general de segundo grado en dos variables, el discriminante $B^2 - 4AC$ es invariable bajo una rotación de ejes.

38. Obtenga las ecuaciones (5) al resolver las ecuaciones (4) para x y y en términos de $\bar{x}$ y $\bar{y}$. *Sugerencia:* para despejar x, multiplique cada miembro de la primera ecuación por $\cos\alpha$ y ambos miembros de la segunda ecuación por $\operatorname{sen}\alpha$ y después reste los miembros correspondientes de las ecuaciones resultantes. Utilice un procedimiento semejante para despejar y.

39. La rotación de ejes no hace ningún cambio en la gráfica ni en la posición de la gráfica en el plano. Explique cuándo la rotación de ejes es una ventaja para dibujar la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables y cuándo es una desventaja.

11.4 SISTEMAS QUE IMPLICAN ECUACIONES CUADRÁTICAS

OBJETIVOS

1. **Utilizar gráficas para determinar el número de pares ordenados de números reales que son soluciones de un sistema de ecuaciones.**
2. **Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas donde una es lineal y la otra cuadrática.**
3. **Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas.**
4. **Resolver enunciados de problemas que tienen como modelo matemático un sistema con ecuaciones cuadráticas.**

En la Sección 3.2, el estudio de sistemas de ecuaciones se dedicó a sistemas lineales. Sin embargo, un gran número de aplicaciones conduce a sistemas no lineales como se ilustra en los ejercicios 23 a 34. Los enunciados de problemas en estos ejercicios emplean conceptos previamente presentados, pero el sistema resultante implica al menos una ecuación cuadrática. En esta sección se estudiarán los métodos de solución de dichos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

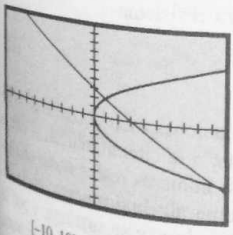
Al trazar las gráficas de las dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección, se determina el número de puntos de intersección de las gráficas. Las coordenadas de estos puntos proporcionan los pares ordenados de números reales que son soluciones del sistema.

En primer lugar, se considerará un sistema que contiene una ecuación lineal y otra cuadrática. En la graficadora, se obtendrá una recta que intersecta a la gráfica de la ecuación cuadrática en no más de dos puntos. Se resolverá el sistema algebraicamente por medio del método de sustitución. De la ecuación lineal se expresa una variable en términos de la otra y se sustituye la expresión resultante en la ecuación cuadrática.

► EJEMPLO 1 *Solución de un sistema que contiene una ecuación lineal y una cuadrática*

Trace las gráficas de las ecuaciones del sistema siguiente y determine el número de pares ordenados de números reales que son soluciones del sistema. Después, determine el conjunto solución del sistema algebraicamente.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$



[−10, 10] por [−10, 10]
$y^2 = 4x$ y $x + y = 3$
FIGURA 11.34

Solución La Figura 11.34 muestra las gráficas de las dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección. La recta intersecta a la parábola en dos puntos. Por tanto, el conjunto solución consta de los dos pares ordenados de números reales.

Para determinar el conjunto solución algebraicamente, primero se despeja x en la segunda ecuación y se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = 3 - y \end{cases}$$

Al sustituir x en la primera ecuación por su igual de la segunda, se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} y^2 = 4(3 - y) \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 + 4y - 12 = 0 \\ x = 3 - y \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Ahora se resuelve la primera ecuación.

$$(y - 2)(y + 6) = 0$$
$$y - 2 = 0 \qquad y + 6 = 0$$
$$y = 2 \qquad y = -6$$

Como la primera ecuación del sistema (II) es equivalente a las dos ecuaciones $y = 2$ y $y = -6$ el sistema (II) es equivalente a los dos sistemas

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 - y \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y = -6 \\ x = 3 - y \end{cases}$$

En cada uno de los dos últimos sistemas se sustituye el valor de y de la primera ecuación en la segunda, para obtener

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y = -6 \\ x = 9 \end{cases}$$

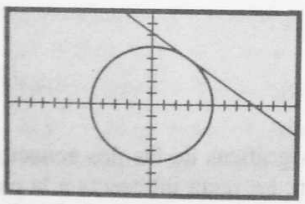
Estos dos sistemas son equivalentes al sistema (I). En consecuencia, el conjunto solución de (I) es $\{(1, 2), (9, -6)\}$.

Los dos pares ordenados dan las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de la Figura 11.34. ◂

▸ EJEMPLO 2 *Solución de un sistema que contiene una ecuación lineal y una cuadrática*

Siga las instrucciones del ejemplo 1 para el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$



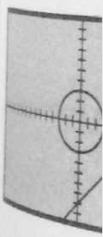
[−12, 12] por [−8, 8]
$x^2 + y^2 = 25$ y $3x + 4y = 25$
FIGURA 11.35

Solución Las gráficas de las dos ecuaciones están trazadas en la Figura 11.35. La recta se muestra tangente a la circunferencia; si ése es el caso, se obtendrá un par ordenado de números reales como una solución del sistema. Al resolver el sistema algebraicamente, en la segunda ecuación se expresa y en términos de x, y se sustituye y por la expresión resultante en la primera ecuación. Así, se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2 + \left(\dfrac{25 - 3x}{4}\right)^2 = 25 \\ y = \dfrac{25 - 3x}{4} \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Ahora se resuelve la primera ecuación al multiplicar, en primer lugar, cada miembro por 16.

$$16x^2 + (625 - 150x + 9x^2) = 400$$
$$25x^2 - 150x + 225 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x - 3)^2 = 0$$



[−7.5, 7.5] por [
$x^2 + y^2 = 2$ y x
FIGURA 11

Como consecuencia, las raíces de esta ecuación cuadrática son 3 y 3; esto es, 3 es una raíz doble. Por tanto, el sistema (IV) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{25 - 3x}{4} \end{cases}$$

Si se sustituye 3 por x en la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

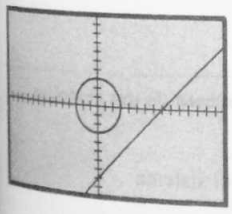
De modo que el conjunto solución del sistema (III) es $\{(3, 4)\}$.

Se concluye que la recta de la Figura 11.35 es tangente a la circunferencia en el punto (3, 4); éste es el significado geométrico de la raíz doble. El punto de tangencia puede considerarse como las dos intersecciones de la recta y la circunferencia. ◄

► **EJEMPLO 3** ***Solución de un sistema que contiene una ecuación lineal y una cuadrática***

Siga las instrucciones del ejemplo 1 para el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \textbf{(V)}$$



[-7.5, 7.5] por [-5, 5]
$x^2 + y^2 = 2$ y $x - y = 4$
FIGURA 11.36

Solución La Figura 11.36 muestra las gráficas de las dos ecuaciones, una recta y una circunferencia. Debido a que la recta y la circunferencia no se intersectan, no existen pares ordenados de números reales que sean soluciones del sistema.

Se resuelve el sistema algebraicamente al expresar a x en términos de y en la segunda ecuación, y sustituyendo x en la primera ecuación por la expresión resultante. De este modo se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} (y + 4)^2 + y^2 = 2 \\ x = y + 4 \end{cases} \quad \textbf{(VI)}$$

Ahora se resuelve la primera ecuación para y.

$$\begin{aligned} y^2 + 8y + 16 + y^2 &= 2 \\ 2y^2 + 8y + 14 &= 0 \\ y^2 + 4y + 7 &= 0 \\ y &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -2 \pm i\sqrt{3} \end{aligned}$$

En consecuencia, la primera ecuación del sistema (VI) es equivalente a las dos ecuaciones $y = -2 + i\sqrt{3}$ y $y = -2 - i\sqrt{3}$. Por tanto, (VI) es equivalente a los dos sistemas

$$\begin{cases} y = -2 + i\sqrt{3} \\ x = y + 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y = -2 - i\sqrt{3} \\ x = y + 4 \end{cases}$$

En cada uno de estos sistemas se sustituye el valor de y de la primera ecuación en la segunda para tener

$$\begin{cases} y = -2 + i\sqrt{3} \\ x = 2 + i\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y = -2 - i\sqrt{3} \\ x = 2 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

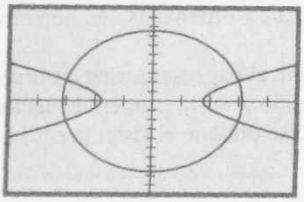
Estos dos sistemas son equivalentes al sistema dado (V). De donde el conjunto solución de (V) es

$$\{(2 + i\sqrt{3}, -2 + i\sqrt{3}), (2 - i\sqrt{3}, -2 - i\sqrt{3})\}$$

Como las soluciones son pares ordenados de números imaginarios, no existen puntos de intersección de las gráficas que correspondan a las soluciones. Recuerde que las coordenadas de puntos en el plano real son números reales. ◂

En la Sección 3.2 se presentó el método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Este método se aplica en el ejemplo siguiente de un sistema con dos ecuaciones cuadráticas.

▸ EJEMPLO 4 *Solución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas*



[−5, 5] por [−10, 10]
$2x^2 - 3y^2 = 6$ y $6x^2 + y^2 = 58$
FIGURA 11.37

Siga las instrucciones del ejemplo 1 para el sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ 6x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \quad \text{(VII)}$$

Solución La gráfica de la primera ecuación es una hipérbola y la gráfica de la segunda es una elipse. Dichas gráficas se muestran en la Figura 11.37 y se intersectan en cuatro puntos. Por tanto, el sistema tiene cuatro pares ordenados de números reales como soluciones.

Para resolver el sistema algebraicamente, se desea reemplazar el sistema por uno que tenga una ecuación con una sola variable. Se puede eliminar y entre las dos ecuaciones al sumar la primera ecuación y 3 veces la segunda como sigue:

$$\begin{array}{rr} 2x^2 - 3y^2 = & 6 \\ 18x^2 + 3y^2 = & 174 \\ \hline 20x^2 = & 180 \end{array}$$

El sistema siguiente contiene la primera ecuación del sistema (VII) y la ecuación anterior, por lo cual es equivalente a (VII):

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ 20x^2 = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

La segunda ecuación de este sistema es equivalente a las dos ecuaciones $x = 3$ y $x = -3$. Por tanto, este sistema es equivalente a los dos sistemas

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

En cada uno de estos dos sistemas se sustituye el valor de x de la segunda ecuación en la primera, y se tiene

$$\begin{cases} 2(3)^2 - 3y^2 = 6 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2(-3)^2 - 3y^2 = 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 18 - 3y^2 = 6 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 18 - 3y^2 = 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

La primera ecuación en cada uno de estos dos sistemas es equivalente a las dos ecuaciones $y = 2$ y $y = -2$. En consecuencia, los dos sistemas son equivalentes a los cuatro sistemas

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Estos cuatro sistemas son equivalentes al sistema (VII). Por tanto, el conjunto solución de (VII) es $\{(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)\}$.

Los pares ordenados del conjunto solución dan las coordenadas de los puntos de intersección de la Figura 11.37. ◀

En el siguiente ejemplo se tiene un sistema de dos ecuaciones cuadráticas, en el cual, la segunda ecuación consta de tres términos de segundo grado. Como el miembro derecho de la segunda ecuación es cero y el miembro izquierdo puede factorizarse, la segunda ecuación es equivalente a dos ecuaciones lineales. Por tanto, el sistema dado es equivalente a dos sistemas, cada uno de los cuales consta de una ecuación cuadrática y una ecuación lineal.

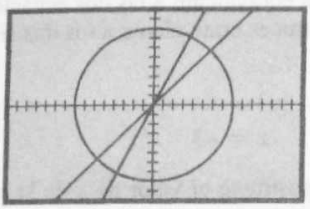
▶ EJEMPLO 5 *Solución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas*

Siga las instrucciones del ejemplo 1 para el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

Solución La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia con centro en el origen y radio 4. Para obtener la gráfica de la segunda ecuación, se factoriza el miembro izquierdo y se obtiene

$$(2x - y)(x - y) = 0$$



[–7.5, 7.5] por [–5, 5]
$x^2 + y^2 = 16$ y $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$
FIGURA 11.38

Esta ecuación es equivalente a las dos ecuaciones $2x - y = 0$ y $x - y = 0$, cada una de las cuales tiene una recta como gráfica. La circunferencia y las dos rectas se presentan en la Figura 11.38, que muestra cuatro puntos de intersección. Por tanto, el conjunto solución del sistema tiene cuatro pares ordenados de números reales.

Para encontrar el conjunto solución algebraicamente, note que el sistema dado es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ (2x - y)(x - y) = 0 \end{cases}$$

el cual a su vez es equivalente a los dos sistemas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x \end{cases}$$

En cada uno de los últimos dos sistemas se sustituye el valor de y de la segunda ecuación en la primera, y se obtiene

$$\begin{cases} x^2 + 4x^2 = 16 \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 + x^2 = 16 \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{16}{5} \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 = 8 \\ y = x \end{cases}$$

La ecuación $x^2 = \frac{16}{5}$ es equivalente a las dos ecuaciones $x = \frac{4}{5}\sqrt{5}$ y $x = -\frac{4}{5}\sqrt{5}$. La ecuación $x^2 = 8$ es equivalente a las dos ecuaciones $x = 2\sqrt{2}$ y $x = -2\sqrt{2}$. Por tanto, los dos sistemas anteriores son equivalentes a los cuatro sistemas

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}\sqrt{5} \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{5}\sqrt{5} \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = x \end{cases}$$

En cada uno de estos últimos sistemas se sustituye el valor de x de la primera ecuación en la segunda, y se tiene

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}\sqrt{5} \\ y = \frac{8}{5}\sqrt{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{5}\sqrt{5} \\ y = -\frac{8}{5}\sqrt{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Así, el conjunto solución del sistema dado es

$$\{(\tfrac{4}{5}\sqrt{5}, \tfrac{8}{5}\sqrt{5}), (-\tfrac{4}{5}\sqrt{5}, -\tfrac{8}{5}\sqrt{5}), (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})\}$$

Observe en la Figura 11.38 que cada recta intersecta a la circunferencia en dos puntos, las coordenadas de estos puntos son los pares or-

[–4, 4] por
$4x^2 - xy +$
$y\ 2x^2 - xy +$
FIGURA

denados del conjunto solución. Con $\sqrt{5} \approx 2.2$ y $\sqrt{2} \approx 1.4$, estos puntos son (1.8, 3.6), (–1.8, –3.6), (2.8, 2.8) y (–2.8, –2.8). ◄

El sistema del siguiente ejemplo consta de dos ecuaciones cuadráticas en las cuales todos los términos que contienen incógnitas son de segundo grado; esto es, no hay términos de primer grado. Si una de las ecuaciones se reemplaza por una combinación de las dos ecuaciones, en las que no aparecen términos constantes, el sistema que resulta puede resolverse mediante el método empleado en el ejemplo 5.

► EJEMPLO 6 *Solución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas*

Siga las instrucciones del ejemplo 1 para el sistema

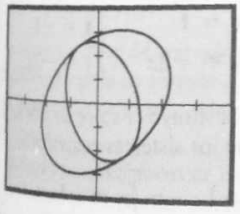
$$\begin{cases} 4x^2 + xy + y^2 = 6 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 8 \end{cases} \qquad \text{(VIII)}$$

Solución Para cada una de las ecuaciones dadas, $B^2 - 4AC < 0$. De modo que la gráfica de cada ecuación es una elipse. A fin de trazar estas elipses en la graficadora, se resuelve cada una de las ecuaciones para y en términos de x al considerar las ecuaciones como cuadráticas en y. Para la primera ecuación se obtiene

$$y = \tfrac{1}{2}(-x \pm \sqrt{24 - 15x^2})$$

y para la segunda, se tiene

$$y = \tfrac{1}{2}(x \pm \sqrt{32 - 7x^2})$$



[–4, 4] por [–4, 4]
$4x^2 - xy + y^2 = 6$
y $2x^2 - xy + y^2 = 8$
FIGURA 11.39

Las dos elipses se muestran en la Figura 11.39, donde se intersectan en cuatro puntos.

A fin de resolver el sistema algebraicamente, primero se obtiene una ecuación que tenga cero en el miembro derecho al sumar 4 veces la primera ecuación y –3 veces la segunda, como a continuación se muestra:

$$\begin{array}{rcl} 16x^2 + 4xy + 4y^2 = & & 24 \\ -6x^2 + 3xy - 3y^2 = & & -24 \\ \hline 10x^2 + 7xy + y^2 = & & 0 \end{array}$$

El sistema siguiente, que contiene la primera ecuación del sistema (VIII) y la ecuación anterior, es equivalente al (VIII):

$$\begin{cases} 4x^2 + xy + y^2 = 6 \\ 10x^2 + 7xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

Si se factoriza el miembro izquierdo de la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{cases} 4x^2 + xy + y^2 = 6 \\ (5x + y)(2x + y) = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación es equivalente a las dos ecuaciones $5x + y = 0$ y $2x + y = 0$. En consecuencia, este sistema es equivalente a los dos sistemas

$$\begin{cases} 4x^2 + xy + y^2 = 6 \\ y = -5x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 4x^2 + xy + y^2 = 6 \\ y = -2x \end{cases}$$

En cada uno de estos sistemas, si se sustituye el valor de y de la segunda ecuación en la primera, así se tiene

$$\begin{cases} 4x^2 + x(-5x) + (-5x)^2 = 6 \\ y = -5x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 4x^2 + x(-2x) + (-2x)^2 = 6 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x^2 + 25x^2 = 6 \\ y = -5x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 4x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 6 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ y = -5x \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -2x \end{cases}$$

La ecuación $x^2 = \frac{1}{4}$ es equivalente a las dos ecuaciones $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$, y la ecuación $x^2 = 1$ es equivalente a las dos ecuaciones $x = 1$ y $x = -1$. Así, los dos sistemas anteriores son equivalentes a los cuatro sistemas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -5x \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -5x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2x \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2x \end{cases}$$

Si en cada una de estas ecuaciones se sustituye el valor de x de la primera ecuación en la segunda, se obtiene los sistemas equivalentes

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Estos cuatro sistemas son equivalentes al sistema dado. Por tanto, el conjunto solución es $\{(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), (1, -2), (-1, 2)\}$.

Las dos elipses de la Figura 11.39 se intersectan en los puntos cuyas coordenadas son los pares ordenados de números reales del conjunto solución. ◀

EJERCICIOS 11.4

En los ejercicios 1 a 22, trace las gráficas de las ecuaciones del sistema en la graficadora y determine el número de pares ordenados de números reales que son soluciones del sistema. Después encuentre el conjunto solución del sistema algebraicamente.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x^2 + y - 3 = 0 \\ 8x + y - 7 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ xy = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 2y = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + 4y^2 = 64 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 59 \\ 2x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ y^2 - 2x = 6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 9x^2 - 4y^2 = 36 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2 - xy + 4 = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 = 8 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ xy = 9 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 10x^2 - xy + 4y^2 = 28 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x^2 - 5xy + 3y^2 = 24 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 16 \end{cases}$

En los ejercicios 23 a 34, resuelva el enunciado del problema encontrando un sistema de ecuaciones como modelo matemático de la situación. No olvide escribir una conclusión.

23. La suma de los recíprocos de dos números es $\frac{4}{15}$ y su producto es 60. ¿Cuáles son los números?

24. La suma de los cuadrados de dos números es $\frac{5}{18}$ y la suma de 6 veces el número menor y 4 veces el número mayor es 3. ¿Cuáles son los números?

25. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 37 cm y su área es 210 cm^2. Encuentre las longitudes de los catetos del triángulo.

26. Determine las dimensiones de un rectángulo de área 60 $pulg^2$ que está inscrito en una circunferencia de radio 6.5 pulg.

27. Un terreno rectangular tiene un perímetro de 40 m y un área de 96 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

28. Encuentre una ecuación de la cuerda común de las dos circunferencias

$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$

29. Un grupo de estudiantes planea un día de campo y acuerdan en contribuir con cantidades iguales para los gastos de transporte que son de \$150. Posteriormente, 5 estudiantes más deciden ir al día de campo y el costo de transporte se reduce en \$1.50. Determine el número de estudiantes que realmente asistieron al día de campo y la cantidad pagada por cada uno para el transporte.

30. Una inversión reditúa un interés anual de \$1 500. Si se invierten \$500 más y la tasa es 2% menos, el interés anual es \$1 300. ¿Cuál es el monto de la inversión y la tasa de interés?

31. Un pedazo de hojalata con forma rectangular tiene un área de 486 cm^2. Se corta un cuadrado de 3 cm de lado en cada esquina y se elabora una caja abierta doblando los lados hacia arriba. Si el volumen de la caja es de 504 cm^3, ¿cuáles son las dimensiones del pedazo de hojalata?

32. Una caja rectangular cerrada, con base cuadrada, tiene un área total de 16 pie^2. Si la diagonal principal tiene una longitud de 3 pie, ¿cuáles son las dimensiones de la caja?

33. Una caja rectangular abierta, con base cuadrada, tiene un área de 128 pie^2. Si el costo por pie cuadrado de material fue de \$1 para los lados y \$1.20 para la base y el costo total del material fue de \$131.20. Halle las dimensiones de la caja.

34. Tres puestos de escucha están ubicados en los puntos $A(0, 0)$, $B(0, \frac{21}{4})$ y $C(\frac{25}{3}, 0)$, siendo la unidad 1 km. Micrófonos situados en estos puntos muestran que un cañon está $\frac{5}{3}$ km más cerca de A que de C, y $\frac{7}{4}$ km más cerca de B que de A. Determine la posición del cañón empleando la definición de una hipérbola de la Sección 11.2.

En los ejercicios 35 y 36, encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones.

35. $\begin{cases} \frac{7}{x^2} - \frac{8}{y^2} = 5 \\ \frac{3}{x^2} - \frac{4}{y^2} = 2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \frac{3}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 7 \\ \frac{5}{x^2} - \frac{2}{y^2} = -3 \end{cases}$

37. Una parábola y una circunferencia son las gráficas que pertenecen a un sistema de dos ecuaciones cuadráticas. Dibuje una figura que muestre un ejemplo de una parábola y una circunferencia si el número de pares ordenados de números reales, que son soluciones del sistema, es (**a**) cuatro, (**b**) tres, (**c**) dos, (**d**) uno y (**e**) cero. Explique por qué su figura indica el número especificado de tales soluciones.

38. Realice el ejercicio 37 si las gráficas son una hipérbola y una elipse.

11.5 TRATAMIENTO UNIFICADO DE LAS SECCIONES CÓNICAS Y ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

OBJETIVOS

1. **Establecer y probar el teorema que define una sección cónica en términos de su excentricidad.**
2. **Establecer y probar el teorema que proporciona la excentricidad, los focos y las directrices correspondientes de una cónica central cuando se conoce su ecuación cartesiana.**
3. **Encontrar la excentricidad y las directrices de una cónica central a partir de su ecuación cartesiana.**
4. **Establecer y probar el teorema que proporciona ecuaciones polares de cónicas.**
5. **Encontrar la ecuación polar de una cónica a partir de sus propiedades.**
6. **Identificar una cónica a partir de su ecuación polar.**
7. **Encontrar propiedades de una cónica a partir de su ecuación polar.**

En el estudio de las cónicas se tienen definidos, hasta ahora, cada uno de los tres tipos de secciones cónicas separadamente. Un enfoque alternativo consiste en comenzar con una definición basada en una propiedad común de las cónicas y después presentar cada una de las cónicas como un caso especial de la definición general. Dicha definición se establece en el siguiente teorema, en el cual la propiedad común es la excentricidad de la cónica, denotada por e.

TEOREMA 1

Una sección cónica puede definirse como un conjunto de puntos P en un plano tal que la razón de la distancia no dirigida a P desde un punto fijo a la distancia no dirigida a P desde una recta fija que no contenga al punto fijo, es una constante positiva e. Además, si $e = 1$, la cónica es una parábola; si $0 < e < 1$, es una elipse; y si $e > 1$, es una hipérbola.

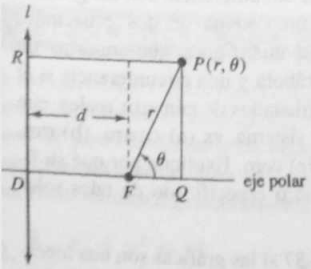


FIGURA 11.40

Demostración Si $e = 1$, se observa al comparar la definición de una parábola de la Sección 3.3 con el enunciado del teorema que el conjunto es una parábola, el cual tiene el punto fijo como su foco y la recta fija como su directriz.

Suponga que $e \neq 1$. Se comienza por obtener una ecuación polar del conjunto de puntos descrito. Además suponga que F denota al punto fijo y que l representa a la recta fija. Se toma el polo en F y el eje

polar y su prolongación perpendicular a l. Primero se considera la situación cuando la recta l está a la izquierda del punto F. Sea D el punto de intersección de l con la prolongación del eje polar, y sea d la representación de la distancia no dirigida desde F a l. Consulte la Figura 11.40. Sea $P(r, \theta)$ cualquier punto del conjunto a la derecha de l y sobre el lado terminal del ángulo de medida θ. Trace las perpendiculares PQ y PR al eje polar y a la recta l, respectivamente. El punto P está en el conjunto descrito si y sólo si

$$|\overline{FP}| = e|\overline{RP}| \tag{1}$$

Como P está a la derecha de l, $\overline{RP} > 0$; de modo que $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Además, $|\overline{FP}| = r$ porque $r > 0$. Así, de la ecuación (1),

$$r = e(\overline{RP}) \tag{2}$$

Sin embargo, $\overline{RP} = \overline{DQ}$, y como $\overline{DQ} = \overline{DF} + \overline{FQ}$, se tiene

$$\overline{RP} = d + r\cos\theta$$

Al sustituir esta expresión para $\overline{RP}$ en (2) se obtiene

$$r = e(d + r\cos\theta)$$

Si se despeja r se tiene

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \tag{3}$$

Para obtener la representación cartesiana de esta ecuación primero se sustituye $\cos\theta$ por x/r. Así,

$$r = \frac{ed}{1 - \frac{ex}{r}}$$

$$r = \frac{edr}{r - ex}$$

$$r - ex = ed$$

$$r = e(x + d)$$

Ahora se sustituye r por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ y se obtiene

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = e(x + d)$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de esta ecuación se tiene

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2$$

$$y^2 + x^2(1 - e^2) = 2e^2dx + e^2d^2$$

Debido a que $e \neq 1$, se pueden dividir los dos miembros de esta ecuación entre $1 - e^2$ obteniéndose

$$x^2 - \frac{2e^2d}{1 - e^2}x + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Si se completan los cuadrados para los términos que contienen x al sumar $e^4d^2/(1-e^2)^2$ en ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene

$$\left(x - \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{1}{1-e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$$

Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre $e^2d^2/(1-e^2)^2$ se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{\dfrac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2d^2}{1-e^2}} = 1 \tag{4}$$

donde

$$h = \frac{e^2d}{1-e^2} \tag{5}$$

Ahora sea

$$\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} = a^2 \qquad \text{donde } a > 0 \tag{6}$$

Entonces (4) puede escribirse como

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \tag{7}$$

Si $0 < e < 1$, entonces $a^2(1-e^2) > 0$ y se puede hacer

$$b^2 = a^2(1-e^2) \qquad \text{donde } 0 < e < 1 \tag{8}$$

Al sustituir de (8) en (7), se tiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la cual es una ecuación de una elipse que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro en $(h, 0)$, donde $h > 0$.

Si $e > 1$, entonces $a^2(e^2 - 1) > 0$ y se puede hacer

$$b^2 = a^2(e^2-1) \qquad \text{donde } e > 1 \tag{9}$$

Al sustituir de esta ecuación en (7), se obtiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la cual es una ecuación de una hipérbola que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro en $(h, 0)$, donde $h < 0$.

De manera semejante se puede obtener una ecuación de una cónica central (elipse o hipérbola) a partir de (1) cuando $e \neq 1$ y si la recta l

está a la derecha del punto F, siendo éste el polo. En este caso, en lugar de la ecuación (3) se tiene

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \tag{10}$$

La deducción de (10) se deja como un ejercicio (*véase* el ejercicio 31).

También se puede deducir una ecuación de una cónica central a partir de (1) cuando $e \neq 1$ y si la recta l es paralela al eje polar y el punto F está en el polo. En este caso, en lugar de la ecuación (3), se obtiene

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta} \tag{11}$$

donde e y d son, respectivamente, la excentricidad y la distancia no dirigida entre F y l. El signo más se toma cuando l está por arriba de F, y el signo menos se toma cuando l está por debajo de F. Las deducciones de la ecuación (11) se dejan como ejercicios (*véase* los ejercicios 32 y 33).

Se pueden invertir los pasos del (1) al (7). De modo que si P es cualquier punto de una cónica central, la ecuación (1) se satisface.

Por tanto, se concluye que una cónica puede definirse por el conjunto de puntos descrito. ■

En las secciones 11.1 y 11.2 , se definió la excentricidad e de una cónica central mediante la ecuación

$$e = \frac{c}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad c = ae$$

A fin de mostrar que el número e del enunciado del Teorema 1 satisface esta ecuación para una elipse, se sustituye de (8) en la ecuación $c^2 = a^2 - b^2$; con el propósito de mostrar que la misma ecuación se satisface por una hipérbola, se sustituye de (9) en la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$. Para una elipse, se tiene

$$c^2 = a^2 - a^2(1 - e^2)$$

y para una hipérbola, se obtiene

$$c^2 = a^2 + a^2(e^2 - 1)$$

En ambos casos resulta

$$c^2 = a^2e^2$$
$$c = ae$$

En la prueba del Teorema 1 se mostró que cuando la cónica es una parábola, el punto fijo F mencionado en el teorema es el foco de la parábola y la recta fija es la directriz. En el ejercicio 34, se le pedirá que muestre que el punto F es uno de los focos cuando se tiene una có-

nica central. Si (7) es una ecuación de una elipse, el punto F está a la izquierda del foco, y si (7) es una ecuación de una hipérbola, F está a la derecha del foco.

Considere ahora la forma estándar de una ecuación cartesiana, de una cónica central que tiene su eje principal sobre el eje x y su centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \tag{12}$$

La recta fija l, mencionada en el Teorema 1, es la directriz de la cónica central correspondiente al foco en F. Cuando la cónica definida por la ecuación (12) es una elipse, la directriz correspondiente al foco en $(-c, 0)$ o, equivalentemente, $(-ae, 0)$ tiene la ecuación

$$x = -ae - d$$

De (6), cuando $0 < e < 1$, $d = a(1 - e^2)/e$, por lo que esta ecuación se transforma en

$$x = -ae - \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

$$x = -\frac{a}{e}$$

De igual manera, cuando la cónica definida por (12) es una hipérbola, la directriz correspondiente al foco en $(c, 0)$ o, equivalentemente, $(ae, 0)$ tiene la ecuación

$$x = ae - d$$

Otra vez de (6), cuando $e > 1$, $d = a(e^2 - 1)/e$, por lo que la ecuación anterior de la directriz se puede escribir como

$$x = \frac{a}{e}$$

En consecuencia, se ha mostrado que si (12) es una ecuación de una elipse, un foco y su directriz correspondiente son $(-ae, 0)$ y $x = -a/e$; y si (12) es una ecuación de una hipérbola, un foco y su directriz correspondiente son $(ae, 0)$ y $x = a/e$.

Como (12) contiene únicamente potencias pares de x y y, su gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y. Por tanto, si existe un foco en $(-ae, 0)$ que tiene una directriz correspondiente $x = -a/e$, entonces, por la simetría, existe también un foco en $(ae, 0)$ con una directriz correspondiente $x = a/e$. Análogamente, para un foco en $(ae, 0)$ con una directriz correspondiente $x = a/e$, existe también un foco en $(-ae, 0)$ con directriz correspondiente $x = -a/e$. Estos resultados se resumen en el siguiente teorema.

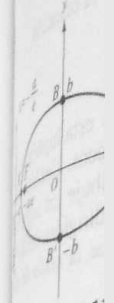
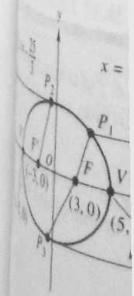


FIGURA 11

FIGURA 11.4



$\frac{|FP|}{|RP|} = \frac{3}{5}$
FIGURA 11.43

TEOREMA 2

La cónica central que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

cuando $a > 0$, tiene un foco en $(-ae, 0)$ cuya directriz correspondiente es $x = -a/e$, y un foco en $(ae, 0)$, cuya directriz correspondiente es $x = a/e$.

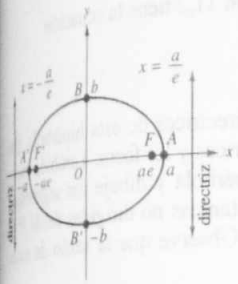


FIGURA 11.41

Las figuras 11.41 y 11.42 muestran las gráficas de la ecuación (12) junto con los focos y directrices en el caso respectivo de una elipse y una hipérbola.

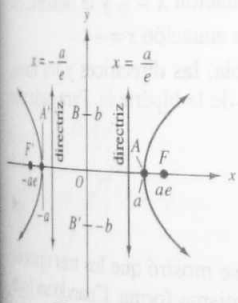


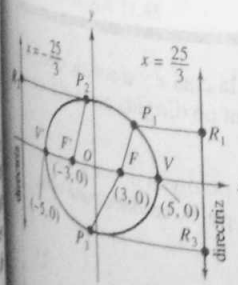
FIGURA 11.42

▸ EJEMPLO 1 *Determinación de la excentricidad y las directrices de una elipse a partir de su ecuación cartesiana*

La elipse del ejemplo 1 de la Sección 11.1 tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(**a**) Determine la excentricidad y las directrices de esta elipse. (**b**) Dibuje la elipse y muestre las directrices y los focos. También elija tres puntos cualesquiera P de la elipse y dibuje los segmentos rectilíneos cuyas longitudes son las distancias no dirigidas desde P al foco y a su directriz correspondiente. Observe que la razón de estas distancias es e.



$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{3}{5}$

FIGURA 11.43

Solución

(**a**) De la ecuación de la elipse, $a = 5$ y $b = 4$. Se mostró en el ejemplo 1 de la Sección 11.1 que $c = 3$. Puesto que $e = c/a$, $e = \frac{3}{5}$. Como $a/e = \frac{25}{3}$, se sigue del Teorema 2 que la directriz correspondiente al foco en (3, 0) tiene la ecuación $x = \frac{25}{3}$, y la directriz correspondiente al foco en (–3, 0) tiene la ecuación $x = -\frac{25}{3}$.

(**b**) La Figura 11.43 muestra la elipse, las directrices y los focos, así como los tres puntos P_1, P_2 y P_3 de la elipse. Para cada uno de estos puntos,

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{3}{5}$$

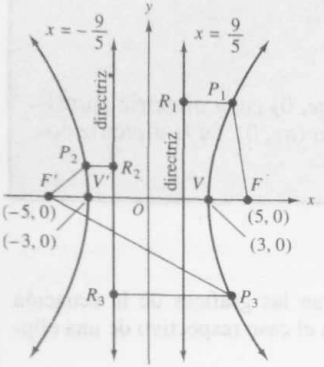
◂

▸ EJEMPLO 2 *Determinación de la excentricidad y las directrices de una hipérbola a partir de su ecuación cartesiana*

La hipérbola del ejemplo 1 de la Sección 11.2 tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) Determine la excentricidad y las directrices de esta hipérbola. **(b)** Dibuje la hipérbola y muestre las directrices y los focos. También escoja tres puntos cualesquiera P de la hipérbola y dibuje los segmentos rectilíneos cuyas longitudes son las distancias no dirigidas desde P al foco y a su directriz correspondiente. Observe que la razón de estas distancias es e.



$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{5}{3}$

FIGURA 11.44

Solución

(a) De la ecuación de la hipérbola, $a = 3$ y $b = 4$. En el ejemplo 1 de la Sección 11.2, se mostró que $c = 5$. Debido a que $e = c/a$, $e = \frac{5}{3}$. Como $a/e = \frac{9}{5}$, se concluye, por el Teorema 2, que la directriz correspondiente al foco (5, 0) tiene la ecuación $x = \frac{9}{5}$, y la directriz correspondiente al foco (−5, 0) tiene la ecuación $x = -\frac{9}{5}$.

(b) La Figura 11.44 muestra la hipérbola, las directrices y los focos, así como los tres puntos P_1, P_2 y P_3 de la hipérbola. Para cada uno de estos puntos,

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{5}{3}$$

◂

En la demostración del Teorema 1, se mostró que los tres tipos de cónicas tienen ecuaciones polares de la misma forma. Cuando un foco está en el polo y la directriz correspondiente es perpendicular o paralela al eje polar, una ecuación de la cónica tiene la forma (3), (10) u (11). Por tanto, se tiene el siguiente teorema.

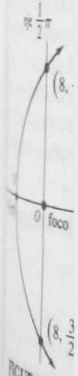


FIGURA 11.4

TEOREMA 3

Suponga que se tiene una cónica para la cual e y d son, respectivamente, la excentricidad y la distancia no dirigida entre el foco y la directriz correspondiente.

(i) Si un foco de la cónica está en el polo y la directriz correspondiente es perpendicular al eje polar, entonces una ecuación de la cónica es

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \tag{13}$$

donde el signo más se toma cuando la directriz correspondiente al foco, el cual está en el polo, se encuentra a su derecha, y

se toma el signo menos cuando la directriz está a la izquierda del foco.

(ii) Si un foco de la cónica está en el polo y la directriz correspondiente es paralela al eje polar, entonces una ecuación de la cónica es

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta} \tag{14}$$

donde el signo más se toma cuando la directriz correspondiente al foco, el cual está en el polo, se encuentra arriba, y se toma el signo menos cuando la directriz está debajo del foco.

▸ EJEMPLO 3 *Determinación de una ecuación polar de una cónica a partir de sus propiedades*

Una parábola tiene su foco en el polo y su vértice en $(4, \pi)$. Determine una ecuación polar de la parábola y una ecuación de la directriz. Dibuje la parábola y muestre la directriz. Compruebe la gráfica en la graficadora.

Solución Como el foco está en el polo y el vértice en $(4, \pi)$, el eje polar y su prolongación están a lo largo del eje de la parábola. Además, el vértice está a la izquierda del foco; así, la directriz está también a la izquierda del foco. En consecuencia, una ecuación de la parábola es de la forma de (13) con el signo menos. Puesto que el vértice está en $(4, \pi)$, $\frac{1}{2}d = 4$; de modo que $d = 8$. La excentricidad es $e = 1$ y, por tanto, se obtiene la ecuación

$$r = \frac{8}{1 - \cos \theta}$$

Una ecuación de la directriz está dada por $r \cos \theta = -d$, y como $d = 8$, entonces $r \cos \theta = -8$.

La Figura 11.45 muestra la parábola y la directriz. En la graficadora se obtiene la misma gráfica. ◂

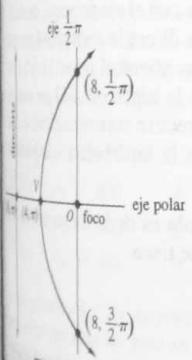


FIGURA 11.45

▸ EJEMPLO 4 *Identificación y determinación de las propiedades de una cónica a partir de su ecuación polar*

Una ecuación de una cónica es

$$r = \frac{5}{3 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

Identifique la cónica, encuentre la excentricidad, escriba una ecuación de la directriz correspondiente al foco que se localiza en el polo y halle los vértices. Dibuje la curva y verifique la gráfica en la graficadora.

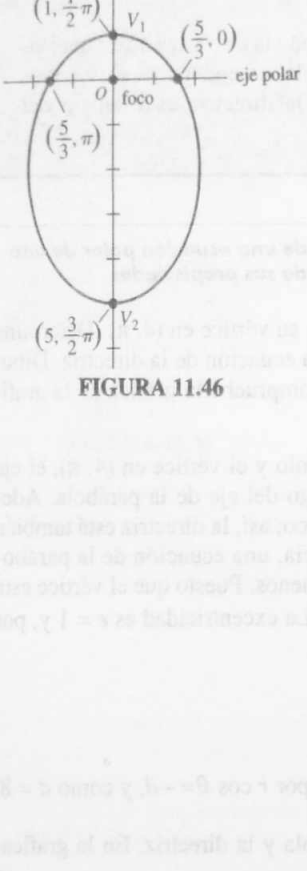


FIGURA 11.46

Solución Si se divide el numerador y el denominador de la fracción de la ecuación dada entre 3, se obtiene

$$r = \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$$

la cual es de la forma de (14) con el signo más. La excentricidad es $e = \frac{2}{3}$. Debido a que $e < 1$, la cónica es una elipse. Como $ed = \frac{5}{3}$, $d = \frac{5}{3} \div \frac{2}{3}$, así, $d = \frac{5}{2}$. El eje $\frac{1}{2}\pi$ y su prolongación coinciden con el eje principal. La directriz correspondiente al foco, que está en el polo, se encuentra por arriba del foco, y una ecuación de ella es $r \operatorname{sen}\theta = \frac{5}{2}$. Cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $r = 1$; y cuando $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $r = 5$. Por tanto, los vértices están en $(1, \frac{1}{2}\pi)$ y $(5, \frac{3}{2}\pi)$.

La elipse se muestra en la Figura 11.46. En la graficadora se obtiene la misma curva. ◀

► EJEMPLO 5 *Determinación de una ecuación polar de una cónica y otras propiedades de la cónica a partir de propiedades dadas*

El eje polar y su prolongación coinciden con el eje principal de una hipérbola que tiene un foco en el polo. La directriz correspondiente está a la izquierda del foco. Si la hipérbola contiene al punto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ y $e = 2$, determine **(a)** una ecuación polar de la hipérbola, **(b)** los vértices, **(c)** el centro, **(d)** una ecuación de la directriz correspondiente al foco que se encuentra en el polo. **(e)** Dibuje la hipérbola y compruebe la curva en la graficadora.

Solución Una ecuación de la hipérbola es de la forma de (13) con el signo menos, donde $e = 2$. Entonces, se tiene

$$r = \frac{2d}{1 - 2\cos\theta}$$

(a) Como el punto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ está en la hipérbola, sus coordenadas satisfacen la ecuación. Por tanto,

$$1 = \frac{2d}{1 - 2(-\frac{1}{2})}$$

de la cual se obtiene $d = 1$. De aquí, la ecuación de la hipérbola es

$$r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta} \tag{15}$$

(b) Los vértices son los puntos de la hipérbola para los cuales $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. De (15), cuando $\theta = 0$, $r = -2$; y cuando $\theta = \pi$, $r = \frac{2}{3}$. En consecuencia, el vértice izquierdo V_1 está en el punto $(-2, 0)$ y el vértice derecho V_2 está en el punto $(\frac{2}{3}, \pi)$.

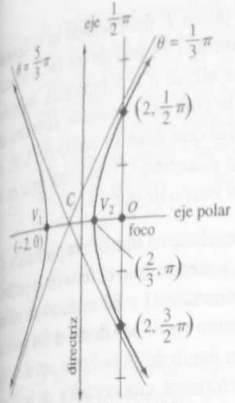


FIGURA 11.47

(c) El centro C es el punto del eje principal situado a la mitad entre los dos vértices. De modo que el centro es el punto $(\frac{4}{3}, \pi)$.

(d) Una ecuación de la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo está dada por $r \cos \theta = -d$. Como $d = 1$, esta ecuación es $r \cos \theta = -1$.

(e) Como una ayuda para dibujar la hipérbola, primero se dibujan las dos asíntotas. Éstas son rectas que pasan por el centro de la hipérbola que son paralelas a las rectas $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$, donde θ_1 y θ_2 son los valores de θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ para los cuales r no está definido. De (15), r no está definido cuando $1 - 2 \cos \theta = 0$. Por tanto, $\theta_1 = \frac{1}{3}\pi$ y $\theta_2 = \frac{5}{3}\pi$. La Figura 11.47 muestra la hipérbola, así como las dos asíntotas y la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo. En la graficadora se obtiene la misma curva. ◀

EJERCICIOS 11.5

En los ejercicios 1 a 8, (a) encuentre la excentricidad, los focos y las directrices de la cónica central. (b) Dibuje la cónica y muestre los focos y las directrices. También elija tres puntos P cualesquiera (en diferentes cuadrantes) de la cónica y dibuje los segmentos rectilíneos cuyas longitudes son las distancias no dirigidas desde P al foco y a su directriz correspondiente. Observe que la razón de estas distancias es e.

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$
2. $4x^2 + 9y^2 = 4$
3. $25x^2 + 4y^2 = 100$
4. $16x^2 + 9y^2 = 144$
5. $4x^2 - 25y^2 = 100$
6. $x^2 - 9y^2 = 9$
7. $16x^2 - 9y^2 = 144$
8. $4y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 9 y 10, la ecuación polar representa una cónica que tiene un foco en el polo. Identifique la cónica.

9. (a) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{6}{4 + 5\,\text{sen}\,\theta}$

(c) $r = \dfrac{5}{4 - \cos\theta}$ (d) $r = \dfrac{4}{1 + \text{sen}\,\pi}$

10. (a) $r = \dfrac{1}{1 - \text{sen}\,\theta}$ (b) $r = \dfrac{2}{3 + \text{sen}\,\theta}$

(c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$ (d) $r = \dfrac{5}{1 - \cos\pi}$

En los ejercicios 11 a 22, la gráfica de la ecuación es una cónica que tiene un foco en el polo. (a) Halle la excentricidad, (b) identifique la cónica, (c) escriba una ecuación de la directriz correspondiente al foco situado en el polo y (d) dibuje la curva y verifique la gráfica en la graficadora.

11. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$
12. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$
13. $r = \dfrac{5}{2 + \text{sen}\,\theta}$
14. $r = \dfrac{4}{1 - 3\cos\theta}$
15. $r = \dfrac{6}{3 - 2\cos\theta}$
16. $r = \dfrac{1}{2 + \text{sen}\,\theta}$
17. $r = \dfrac{9}{5 - 6\,\text{sen}\,\theta}$
18. $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$
19. $r = \dfrac{10}{7 - 2\,\text{sen}\,\theta}$
20. $r = \dfrac{7}{3 + 4\cos\theta}$
21. $r = \dfrac{10}{4 + 5\cos\theta}$
22. $r = \dfrac{1}{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

En los ejercicios 23 a 28, determine una ecuación polar de la cónica que tiene un foco en el polo y satisface las condiciones dadas.

23. Parábola; vértice en $(4, \frac{3}{2}\pi)$.
24. Elipse; $e = \frac{1}{2}$; vértice correspondiente en $(4, \pi)$.
25. Hipérbola; $e = \frac{4}{3}$; $r \cos \theta = 9$ es la directriz correspondiente al foco localizado en el polo.
26. Hipérbola; vértices en $(1, \frac{1}{2}\pi)$ y $(3, \frac{1}{2}\pi)$.
27. Elipse; vértices en $(3, 0)$ y $(1, \pi)$.

28. Parábola; vértice en $(6, \frac{1}{2}\pi)$.

29. (a) Encuentre una ecuación polar de la hipérbola que tiene un foco en el polo y la directriz correspondiente a la izquierda del foco y si el punto $(2, \frac{4}{3}\pi)$ está en la hipérbola y $e = 3$. (b) Escriba una ecuación de la directriz correspondiente al foco situado en el polo.

30. (a) Encuentre una ecuación polar de la hipérbola para la cual $e = 3$ y que tenga a la recta $r \operatorname{sen} \theta = 3$ como la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo. (b) Determine las ecuaciones polares de las dos rectas que pasan por el polo que son paralelas a las asíntotas de la hipérbola.

31. Muestre que una ecuación de una cónica, cuyo eje principal coincide con el eje polar y su prolongación, un foco en el polo, y la directriz correspondiente a la derecha del foco, es

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

32. Muestre que una ecuación de una cónica, cuyo eje principal coincide con el eje $\frac{1}{2}\pi$ y su prolongación, un foco en el polo, y la directriz correspondiente por arriba del foco, es

$$r = \frac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$$

33. Muestre que una ecuación de una cónica, cuyo eje principal coincide con el eje $\frac{1}{2}\pi$ y su prolongación, un foco en el polo, y la directriz correspondiente debajo del foco, es

$$r = \frac{ed}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$$

34. Muestre que el punto F mencionado en la demostración del Teorema 1 es uno de los focos cuando la cónica es una elipse o una hipérbola. *Sugerencia:* utilice (7), la cual es la ecuación cartesiana de una cónica central que tiene su centro en $(h, 0)$, el valor de h de la ecuación (5), el valor de a de la ecuación (6) y el hecho de que $c = ae$.

35. Un cometa se desplaza en una órbita parabólica alrededor del Sol y siendo éste el foco de la parábola. Cuando el cometa está a 80 millones de millas del Sol, el segmento rectilíneo desde el Sol hasta el cometa forma un ángulo de $\frac{1}{3}\pi$ radianes con el eje de la órbita. (a) Determine una ecuación de la órbita del cometa. (b) ¿Qué tanto se acerca el cometa al Sol?

36. Un satélite se desplaza alrededor de la Tierra en una órbita elíptica que tiene al centro de la Tierra como un foco y una excentricidad de $\frac{1}{3}$. La distancia más cercana del satélite a la Tierra es de 300 mi. Determine la distancia más lejana que el satélite se separa de la Tierra. Suponga que el radio de la Tierra es de 4 000 mi.

37. Muestre que la ecuación $r = k \csc^2 \frac{1}{2}\theta$, donde k es una constante, es una ecuación polar de una parábola.

38. Muestre que si α es el ángulo entre las asíntotas de una hipérbola de excentricidad e entonces $\alpha = 2 \tan^{-1} \sqrt{e^2 - 1}$.

39. Describa cómo la forma de una cónica cambia conforme la excentricidad toma los valores siguientes: 0.01, 0.10, 0.50, 0.99, 1.00, 1.01, $\sqrt{2}$, 1.50 y 2.00.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 11

▸ VISIÓN RETROSPECTIVA

11.1 Se obtuvieron las ecuaciones cartesianas de una elipse a partir de su definición como un conjunto de puntos en un plano. Después se presentó la prueba de Dandelin de que esta definición es consecuencia de la definición de una elipse como una sección cónica. Se determinaron las propiedades de una elipse a partir de su ecuación y se emplearon estas propiedades para dibujar la elipse. También se obtuvo la ecuación de una elipse a partir de sus propiedades. Se introdujeron las ecuaciones paramétricas de una elipse para poder trazarla en la graficadora.

11.2 La estructura de esta sección sobre hipérbolas fue similar a la sección anterior sobre elipses.

Se definió una hipérbola como un conjunto de puntos en un plano y después se obtuvo una ecuación cartesiana de la hipérbola a partir de esa definición. Se dibujó una hipérbola a partir de sus propiedades obtenidas de su definición. Las asíntotas de una hipérbola nos ayudaron a dibujar su gráfica. Se definieron las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico, para ser aplicadas en la obtención de ecuaciones paramétricas de una hipérbola, y éstas a su vez, empleadas para trazar la hipérbola en la graficadora.

11.3 A fin de determinar la gráfica de una ecuación de segundo grado en x y y con un término xy, se transformó la ecuación en otra sin término xy al rotar los ejes coordenados mediante la elección de un ángulo adecuado. Después se demostró que la gráfica de dicha ecuación es una cónica, o bien, una cónica degenerada, y el tipo de la cónica se determinó por medio del signo del discriminante $B^2 - 4AC$. Se dibujaron y trazaron gráficas de ecuaciones de segundo grado.

11.4 Antes de resolver sistemas que contienen ecuaciones cuadráticas, se averiguó el número de soluciones reales al trazar las gráficas de las ecuaciones y se calculó el número de puntos de intersección de las gráficas. Las soluciones algebraicas de los sistemas implicó los métodos de sustitución y eliminación.

11.5 Los tres tipos de cónicas tienen ecuaciones polares de la misma forma. Este hecho es parte de la demostración del teorema que define una sección cónica en términos de su excentricidad. Se determinaron las propiedades de una cónica a partir de su ecuación polar. También se determinaron la excentricidad, los focos y las directrices correspondientes de una cónica central a partir de su ecuación cartesiana.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 20, dibuje la gráfica de la ecuación. Si la gráfica es una elipse, determine (a) el centro, (b) una ecuación del eje principal, (c) los vértices, (d) los extremos del eje menor y (e) los focos. Si la gráfica es una hipérbola, determine (a) el centro, (b) una ecuación del eje principal y (c) los vértices. También para una hipérbola muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

1. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$
2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$
3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$
4. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$
5. $9x^2 - 25y^2 = 225$
6. $4y^2 - 25x^2 = 400$
7. $25x^2 + 9y^2 = 225$
8. $4x^2 + 25y^2 = 400$
9. $4x^2 + 25y^2 = 100$
10. $25x^2 - 4y^2 = 100$
11. $x^2 - 9y^2 = 144$
12. $9x^2 + 16y^2 = 144$
13. $25x^2 + y^2 - 100x + 8y + 91 = 0$
14. $16y^2 - 9x^2 - 64y - 80 = 0$
15. $4x^2 - 4y^2 - 32x + 16y + 39 = 0$
16. $x^2 + 2y^2 + 12x - 12y + 38 = 0$
17. $4x^2 + y^2 + 24x - 16y + 84 = 0$
18. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$
19. $25x^2 - y^2 + 50x + 6y - 9 = 0$
20. $3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y + 11 = 0$

En los ejercicios 21 a 24, encuentre las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola del ejercicio indicado.

21. Ejercicio 3
22. Ejercicio 6
23. Ejercicio 15
24. Ejercicio 20

En los ejercicios 25 a 32, defina la gráfica del ejercicio indicado por medio de un par de ecuaciones paramétricas, y utilícelas para trazar la gráfica.

25. Ejercicio 1
26. Ejercicio 2
27. Ejercicio 3
28. Ejercicio 4
29. Ejercicio 13
30. Ejercicio 14
31. Ejercicio 19
32. Ejercicio 18

En los ejercicios 33 a 36, encuentre una ecuación de la elipse que tiene las propiedades indicadas y dibuje su gráfica.

33. La suma de las distancias desde los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ a cualquier punto de la elipse es 10.

34. Vértices en $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ y pasa por el punto $(2, \sqrt{3})$.

35. Vértices en $(0, 8)$ y $(0, -4)$ y un foco en $(0, 6)$.

36. Focos en $(-3, -2)$ y $(-3, 6)$ y la longitud del semieje menor es tres cuartos de la longitud del semieje mayor.

En los ejercicios 37 a 40, encuentre una ecuación de la hipérbola que tiene las propiedades indicadas y dibuje su gráfica.

37. Vértices en $(0, 2\sqrt{2})$ y $(0, -2\sqrt{2})$ y pasa por el punto $(2, 4)$.

38. El valor absoluto de la diferencia de las distancias desde los puntos $(0, -5)$ y $(0, 5)$ a cualquier punto de la hipérbola es 8.

39. Focos en $(-5, 1)$ y $(1, 1)$ y un vértice en $(-4, 1)$.

40. Centro en $(-5, 2)$, un vértice en $(-1, 2)$ y un foco en $(0, 2)$.

En los ejercicios 41 a 44, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) elimine el término xy de la ecuación por medio de una rotación de ejes y (c) dibuje la gráfica y los dos sistemas de ejes.

41. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$

42. $2x^2 + 4\sqrt{3}xy - 2y^2 = 4$

43. $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y = 0$

44. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 240x - 320y = 0$

En los ejercicios 45 a 48, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) simplifique la ecuación mediante una rotación y traslación de ejes y (c) dibuje la gráfica y muestre los tres conjuntos de ejes.

45. $3x^2 - 3xy - y^2 - 6y = 0$

46. $4x^2 + 3xy + y^2 - 6x + 12y = 0$

47. $3x^2 + 4xy + 16x - 8y + 19 = 0$

48. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 36x + 28y + 24 = 0$

En los ejercicios 49 a 52, trace la gráfica de la ecuación del ejercicio indicado.

49. Ejercicio 41

50. Ejercicio 42

51. Ejercicio 45

52. Ejercicio 46

En los ejercicios 53 a 60, trace las gráficas de las ecuaciones del sistema y determine el número de pares ordenados de números reales que son soluciones del sistema. Después, determine el conjunto solución del sistema algebraicamente.

53. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

54. $\begin{cases} 7x + 3y = 9 \\ x^2 + 2y = 1 \end{cases}$

55. $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ x^2 - 3y = 3 \end{cases}$

56. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

57. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 7 \\ 5x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

58. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 4x^2 - xy - 3y^2 = 0 \end{cases}$

59. $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 8 \\ 4x^2 + xy + y^2 = 6 \end{cases}$

60. $\begin{cases} 4x^2 - 3y^2 = -8 \\ y^2 + 2xy = 8 \end{cases}$

En los ejercicios 61 a 64, la gráfica de la ecuación es una cónica que tiene un foco en el polo. (a) Determine la excentricidad, (b) identifique la cónica, (c) escriba una ecuación de la directriz correspondiente al foco situado en el polo, (d) dibuje la curva y verifique la gráfica en la graficadora.

61. $r = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

62. $r = \dfrac{5}{3 + 3\operatorname{sen}\theta}$

63. $r = \dfrac{4}{2 + 3\cos\theta}$

64. $r = \dfrac{4}{3 - 2\cos\theta}$

En los ejercicios 65 a 68, halle una ecuación polar de la cónica que satisfaga las condiciones indicadas. Dibuje la cónica y compruebe la curva en la graficadora.

65. Un foco en el polo; vértices en $(2, \pi)$ y $(4, \pi)$.

66. Un foco en el polo; el vértice correspondiente en $(6, \frac{1}{2}\pi)$; $e = \frac{3}{4}$.

67. Un foco en el polo; un vertice en $(3, \frac{3}{2}\pi)$; $e = 1$.

68. La recta $r \operatorname{sen}\theta = 6$ es la directriz correspondiente al foco ubicado en el polo y $e = \frac{5}{3}$.

En los ejercicios 69 y 70, (a) determine la excentricidad, los focos y las directrices de la cónica central. (b) Dibuje la cónica y muestre sus focos y directrices

69. $25x^2 - 9y^2 = 225$

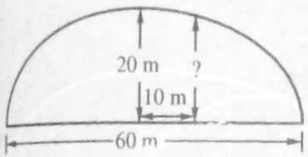
70. $4x^2 + y^2 = 64$

71. Muestre que la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$ tiene los mismos focos que la elipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

72. La órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol es de forma elíptica con el Sol en un foco, tiene un semieje mayor con longitud de 36 millones de millas y una excentricidad de 0.206. Determine (a) la menor distancia posible entre Mercurio y el Sol y

(b) la mayor distancia posible entre Mercurio y el Sol.

73. El arco de un puente tiene la forma de semielipse con una amplitud horizontal de 60 m y una altura de 20 m en su centro. ¿Cuál es la altura del arco a 10 m a la derecha o a la izquierda del centro?



74. El área de un triángulo rectángulo es 84 cm^2 y la longitud de la hipotenusa es de 25 cm. Halle las longitudes de los catetos del triángulo.

75. Se elabora una caja abierta a partir de un pedazo rectangular de cartón que tiene un área de 120 $pulg^2$, al cortar un cuadrado de 2 pulg de lado en cada esquina y doblar hacia arriba los extremos y lados. Si el volumen de la caja es de 96 $pulg^3$, ¿cuáles son las dimensiones del pedazo original de cartón?

76. Si la distancia entre las dos directrices de una elipse es tres veces la distancia entre los focos, determine su excentricidad.

77. Encuentre una ecuación polar de la parábola que contiene al punto $(2, \frac{1}{3}\pi)$, si el foco está en el polo y su vértice en la prolongación del eje polar.

78. Los puntos A y B están separados 1 000 m, y se determinó por el sonido de una explosión escuchada en estos puntos en diferentes tiempos, que la explosión se efectuó a 600 m más cerca de A que de B. Muestre que la ubicación de la explosión está restringida a una curva particular y encuentre una ecuación de la misma.

79. Una cuerda focal de una cónica es dividida en dos segmentos por el foco. Pruebe que la suma de los recíprocos de las medidas de las longitudes de los dos segmentos es la misma, sin importar qué cuerda se tomó. (*Sugerencia:* emplee coordenadas polares.)

80. Una cuerda focal de una cónica es un segmento rectilíneo que pasa por un foco y tiene sus extremos en la cónica. Demuestre que si dos cuerdas focales de una parábola son perpendiculares, entonces la suma de los recíprocos de sus longitudes es una constante. (*Sugerencia:* utilice coordenadas polares.)

81. Muestre que $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \pm\sqrt{a}$ representa una familia de cónicas de un parámetro y determine el tipo de cónica. Dibuje las cónicas para $a = 1$, $a = 2$ y $a = 4$.

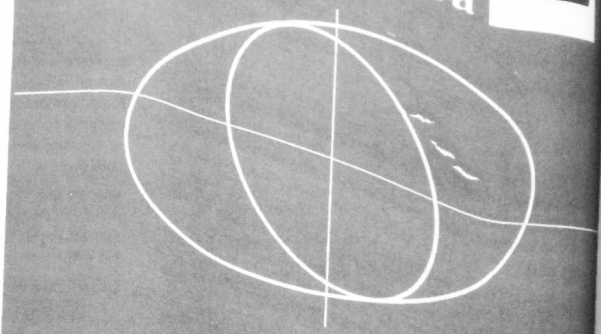
82. La gráfica de la ecuación

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$$

es una cónica central que tiene excentricidad e y un foco en $(p, 0)$. Simplifique la ecuación mediante una traslación de ejes. Halle el nuevo origen con respecto a los ejes x y y.

Capítulo 12

Temas de álgebra



▶ VISIÓN PRELIMINAR

Los temas de este capítulo le ayudarán a desarrollar habilidades sólidas en álgebra que serán cruciales para el estudio del Cálculo. Se aplicarán matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales, primero mediante el método de reducción de Gauss y después por medio de matrices inversas. El estudio de fracciones parciales, necesario para ciertas manipulaciones algebraicas en Cálculo, es independiente y puede efectuarse en cualquier momento. Se proporcionan los rudimentos de sucesiones y series, los cuales constituyen la mayor parte de los elementos del Cálculo. Necesitará la notación sigma a lo largo del curso de Cálculo, una técnica empleada para probar teoremas de cálculo. Se aplicará la inducción matemática para probar algunas propiedades de sucesiones y series aritméticas y geométricas, así como para demostrar el teorema del binomio en el desarrollo de $(a + b)^n$ para todos los valores enteros positivos de n. La sección final de este texto está dedicada a la introducción de las series infinitas que están relacionadas con la noción de límite, probablemente el concepto simple más importante en Cálculo.

SUMARIO

12.1 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices
12.2 Propiedades de las matrices y solución de sistemas lineales por medio de matrices inversas
12.3 Fracciones parciales
12.4 Sucesiones, series y notación sigma
12.5 Inducción matemática
12.6 Sucesiones y series aritméticas y geométricas
12.7 Teorema del binomio
12.8 Introducción a las series infinitas

12.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

OBJETIVOS

1. **Resolver un sistema de tres ecuaciones lineales mediante el método de eliminación.**
2. **Expresar un sistema de ecuaciones lineales en forma triangular.**
3. **Describir una matriz.**
4. **Aprender operaciones elementales con renglones de matrices.**
5. **Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de reducción de Gauss.**
6. **Utilizar el método de reducción de Gauss para determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente.**
7. **Utilizar el método de reducción de Gauss para determinar si un sistema de ecuaciones lineales es independiente o dependiente.**
8. **Resolver enunciados de problemas que tienen un sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático.**

En la Sección 3.2 se estudiaron sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables. Tal vez desee revisar esa sección en este momento. En esta sección se tratarán sistemas de ecuaciones lineales en tres variables.

Considere la ecuación

$$2x - y + 4z = 10$$

para la cual el conjunto de reemplazo, o dominio, de cada una de las tres variables x, y y z es el conjunto R de números reales. Esta ecuación es lineal en las tres variables. Una solución de una ecuación lineal en las tres variables x, y y z es una terna ordenada de números reales (r, s, t) tal que si x se sustituye por r, y por s, y z por t, el enunciado resultante es verdadero. El conjunto de todas las soluciones es el conjunto solución de la ecuación.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Para la ecuación

$$2x - y + 4z = 10$$

la terna ordenada (3, 4, 2) es una solución debido a que

$$2(3) - 4 + 4(2) = 10$$

Otras ternas ordenadas que satisfacen esta ecuación son $(-1, 8, 5)$, $(2, -6, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(5, 0, 0)$, $(0, -6, 1)$, $(8, 2, -1)$ y $(7, 2, -\frac{1}{2})$. Parece ser que el conjunto solución es infinito. ◀

La gráfica de una ecuación en tres variables es un conjunto de puntos representado por ternas ordenadas de números reales que perte-

necen a un sistema coordenado tridimensional. Cuando estudie geometría analítica sólida, aprenderá que la gráfica de una ecuación lineal en tres variables es un plano.

Suponga que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables x, y y z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

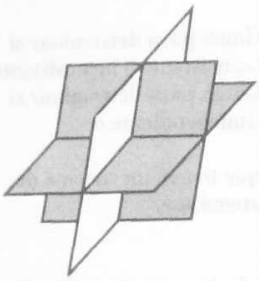


FIGURA 12.1

El conjunto solución de este sistema es la intersección de los conjuntos solución de las tres ecuaciones. Puesto que la gráfica de cada ecuación es un plano, el conjunto solución puede interpretarse geométricamente como la intersección de tres planos. Cuando esta intersección consta de sólo un punto como en la Figura 12.1, se dice que las ecuaciones del sistema son consistentes e independientes. Conforme se avance en la discusión, se mostrarán otras posibles posiciones relativas de tres planos.

Los métodos algebraicos para determinar el conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables son semejantes a los empleados para resolver sistemas lineales en dos variables. El ejemplo siguiente muestra el método de eliminación.

▸ EJEMPLO 1 *Solución de un sistema de tres ecuaciones lineales mediante el método de eliminación*

Determine el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ 5x + 3y - 4z = 4 \\ 6x - 4y - 5z = 12 \end{cases} \quad (I)$$

Solución Primero se obtiene un sistema equivalente en el cual las ecuaciones segunda y tercera no contengan a la variable x. Para eliminar x entre las dos primeras ecuaciones se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por -4 y se suman:

$$\begin{array}{rrrr} 20x - 10y - 15z = & 40 \\ -20x - 12y + 16z = & -16 \\ \hline -22y + z = & 24 \end{array}$$

Para eliminar x entre las ecuaciones primera y tercera del sistema dado, se multiplica la primera ecuación por 6 y la tercera por -4 y se suman:

$$\begin{array}{rrrr} 24x - 12y - 18z = & 48 \\ -24x + 16y + 20z = & -48 \\ \hline 4y + 2z = & 0 \end{array}$$

El siguiente sistema (II) es equivalente al sistema dado (I). Su primera ecuación es la misma que la primera ecuación de (I), y sus ecuaciones segunda y tercera son las obtenidas anteriormente.

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ -22y + z = 24 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Como el coeficiente de y es -22 en la segunda ecuación y 4 en la tercera, se puede obtener una ecuación que no contenga a y al calcular la suma de 2 veces la segunda ecuación y 11 veces la tercera:

$$\begin{array}{r} -44y + 2z = 48 \\ 44y + 22z = 0 \\ \hline 24z = 48 \end{array}$$

Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre 24, se tiene

$$z = 2$$

Ahora se sustituye la tercera ecuación del sistema (II) por esta ecuación. Así se tiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ -22y + z = 24 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Si se sustituye el valor de z de la tercera ecuación en la segunda, se obtiene

$$\begin{aligned} -22y + 2 &= 24 \\ -22y &= 22 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Al reemplazar la segunda ecuación del sistema (III) por esta ecuación, resulta el sistema equivalente

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Si se sustituyen los valores de y y z de las ecuaciones segunda y tercera en la primera, se obtiene

$$\begin{aligned} 4x - 2(-1) - 3(2) &= 8 \\ 4x + 2 - 6 &= 8 \\ 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Se reemplaza la primera ecuación del sistema (IV) para obtener el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \tag{V}$$

Como los sistemas (V) y (I) son equivalentes, el conjunto solución requerido es $\{(3, -1, 2)\}$.

El conjunto solución del ejemplo anterior se pudo determinar manipulando otras combinaciones de ecuaciones. Se siguió un procedimiento sistemático que consistió en obtener el sistema (III) que se denomina **forma triangular.** Con el sistema en forma triangular fácilmente se encuentra primero el valor de y y después el valor de x al sustituir regresivamente los valores conocidos de las variables en las ecuaciones. Este proceso se denomina **sustitución regresiva.** Cuando un sistema está en forma triangular, es cosa sencilla emplear la sustitución regresiva para obtener un sistema equivalente como el (V), lo cual es el objetivo final.

El procedimiento que se siguió en el ejemplo 1 conduce a la solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante *matrices.* El método de matrices reviste especial importancia porque la mayoría de las soluciones de ecuaciones lineales en computadoras y calculadoras dependen de matrices. La referencia anterior al sistema de ecuaciones del ejemplo 1, nos conducirá al método de matrices.

Al emplear un cero como el coeficiente de una variable que no aparece en una ecuación, la forma triangular (III) del sistema puede escribirse como

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ 0x - 22y + z = 24 \\ 0x + 0y + z = 2 \end{cases} \tag{VI}$$

El procedimiento empleado para obtener este sistema implica operaciones sobre las ecuaciones del sistema dado y una serie de sistemas equivalentes hasta que se encuentra un sistema equivalente en forma triangular. Dichas operaciones experimentan cambios en los coeficientes de las variables, así como en los términos constantes de los segundos miembros de las ecuaciones. De modo que esencialmente nos interesan estos números (coeficientes y términos constantes) que aparecen en cada uno de los sistemas equivalentes. Por tanto, a fin de simplificar las operaciones, se introduce una notación para registrar los coeficientes y los términos constantes de modo que las variables no tengan que escribirse. Para el sistema (I) los coeficientes de las variables se listan de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} \tag{VII}$$

Si también se listan los términos constantes que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (I), se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 6 & -4 & -5 & 12 \end{array}\right] \qquad \text{(VIII)}$$

donde la recta vertical separa los coeficientes de los términos constantes. Los números implicados en el sistema (VI) se listan como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & -22 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \text{(IX)}$$

Cada uno de los arreglos (VII), (VIII) y (IX) se llama **matriz.** Los números de la matriz se denominan **elementos.** Los elementos que se encuentran horizontalmente forman un **renglón,** y los elementos ubicados de modo vertical constituyen una **columna.** En la matriz (VIII), los elementos del primer renglón son 4, –2, –3 y 8, y los elementos de la segunda columna son –2, 3 y –4. Si hay m renglones y n columnas en una matriz, entonces su **orden** es $m \times n$ (léase "m por n"). Note que el número de renglones se establece primero. Si $m = n$ se tiene una **matriz cuadrada de orden n.** Las matrices (VIII) y (IX) son de orden 3×4, y la matriz (VII) es una matriz cuadrada de orden 3. La **diagonal principal** de una matriz contiene los elementos de la línea diagonal que inicia en la esquina superior izquierda. En la matriz (VII) los elementos de la diagonal principal son 4, 3 y –5, mientras que en la matriz (IX) son 4, –22 y 1.

Suponga que se tiene un sistema de ecuaciones lineales donde las constantes están en el miembro derecho y los términos que contienen a las variables, los cuales aparecen en el mismo orden en cada ecuación, están en el miembro izquierdo. El sistema (I) es uno de éstos. La matriz, cuyos únicos elementos son los coeficientes de las variables listados como aparecen en las ecuaciones, se denomina **matriz de coeficientes.** Así, la matriz (VII) es la matriz de coeficientes del sistema (I). La matriz obtenida a partir de la matriz de coeficientes listando las constantes en la columna adicional a la derecha, donde los coeficientes están separados de las constantes por una línea vertical, se denomina **matriz aumentada.** Para el sistema la matriz aumentada es la matriz (VIII).

A fin de resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices, se inicia con la matriz aumentada y se efectúan operaciones sobre los renglones para obtener una matriz de un sistema equivalente. El proceso se continúa hasta conseguir una matriz de un sistema en forma triangular, esto es, una matriz que tiene ceros por debajo de la diagonal principal. De tal matriz se dice que está en **forma escalonada.** Por ejemplo, (VI) es el sistema en forma triangular que es equivalente al sistema (I). Además, la matriz (IX) es la matriz aumentada del sistema (VI) y está en forma escalonada.

Las reglas para realizar operaciones en matrices se denominan **operaciones elementales con renglones,** y se presentan en el teorema siguiente.

TEOREMA 1

Si se tiene una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, cada una de las operaciones siguientes produce una matriz de un sistema equivalente de ecuaciones lineales:

(i) Intercambio de dos renglones cualesquiera.
(ii) Multiplicación de cada elemento de un renglón por el mismo número diferente de cero.
(iii) Sustitución de un renglón por un nuevo renglón cuyos elementos son la suma de k_1 veces los elementos del renglón dado y k_2 veces los elementos correspondientes de cualquier otro renglón, donde k_1 y k_2 son números reales y $k_1 \neq 0$.

La demostración del Teorema 1, la cual se omite, utiliza las operaciones correspondientes en las ecuaciones del sistema. Observe que el teorema contiene *sólo operaciones con renglones*. No cometa el error de aplicar las operaciones a las columnas, haciéndolo no se obtiene una matriz de un sistema equivalente.

En el inciso (ii) del Teorema 1, se sobrentiende que multiplicar un renglón por un número significa multiplicar cada elemento del renglón por el número. De igual modo, cuando se aplica el inciso (iii) al sumar un renglón a otro renglón, realmente deben sumarse los elementos correspondientes de los dos renglones.

El ejemplo ilustrativo siguiente muestra cómo se emplea el Teorema 1 para resolver el sistema (I). Se deben comparar las operaciones con las del ejemplo 1.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

El sistema (I) es

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = 8 \\ 5x + 3y - 4z = 4 \\ 6x - 4y - 5z = 12 \end{cases}$$

y la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 6 & -4 & -5 & 12 \end{array}\right]$$

A fin de obtener 0 como el primer elemento del segundo renglón, se reemplaza el segundo renglón por la suma de 5 veces el primero y -4 veces el segundo; y para conseguir 0 como el primer elemento del tercer renglón, se sustituye el tercer renglón por la suma de 6 veces el primer renglón y -4 veces el tercero. Así, se tiene la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & -22 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

A partir de esta matriz se obtiene 0 como segundo elemento del tercer renglón al reemplazar el tercer renglón por la suma de 2 veces el segundo renglón y 11 veces el tercero. Al hacerlo se tiene

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & -22 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 48 \end{array}\right]$$

Si se multiplica el tercer renglón por $\frac{1}{24}$, se obtiene

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & -22 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

la cual es la matriz (IX) y está en forma escalonada; es la matriz aumentada para el sistema (VI), el cual está en forma triangular. El conjunto solución se determina mediante la sustitución regresiva como en el ejemplo 1. ◀

El procedimiento mostrado en el ejemplo ilustrativo 2 para resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio de matrices se denomina *método de reducción de Gauss*, en honor al matemático y científico alemán **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855). El método reduce una matriz a la forma escalonada. Para hacer esto, en álgebra lineal, un curso más avanzado, se proporciona un proceso formal paso por paso. Para los sistemas simples de esta sección, la forma escalonada puede obtenerse mediante una secuencia de operaciones elementales con renglones determinada por observación y por ensayo y error.

En el ejemplo siguiente se resuelve un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro variables por medio del método de eliminación de Gauss. Por solución de un sistema de cuatro ecuaciones en w, x, y y z se entiende una cuaterna (r, s, t, u) tal que cada una de las ecuaciones se satisface si w, x, y y z se sustituyen por r, s, t y u, respectivamente.

► EJEMPLO 2 *Solución de un sistema de cuatro ecuaciones lineales mediante el método de reducción de Gauss*

Utilice el método de reducción de Gauss para determinar el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} w + x + y + z = 5 \\ 3z + x = w - 2 \\ 2x + 2y = 3w + 2 \\ y = w + z \end{cases}$$

Solución Se reemplaza cada ecuación por una equivalente en la cual los términos que contienen las variables estén en el miembro izquierdo y los términos constantes estén en el miembro derecho. Así, se tiene el siguiente sistema equivalente en donde las ecuaciones están escritas de modo que los términos que contienen la misma variable están en una columna vertical.

$$\begin{cases} w + x + y + z = 5 \\ -w + x + 3z = -2 \\ -3w + 2x + 2y = 2 \\ -w + y - z = 0 \end{cases}$$

La matriz aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Inicialmente se obtienen ceros como los primeros elementos de los renglones segundo, tercero y cuarto. Se reemplaza el segundo renglón por la suma del primero y segundo renglón; se reemplaza el tercer renglón por la suma de 3 veces el primero y el tercer renglón; se reemplaza el cuarto renglón por la suma de los renglones primero y cuarto. Entonces se tiene la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Ahora se intercambian los renglones segundo y cuarto, ya que entonces se tendrá 1 como un elemento en el segundo renglón y segunda columna; esto hará que sea más fácil obtener ceros en el tercer y cuarto renglón de la segunda columna. Se tiene entonces la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 17 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Al sustituir el tercer renglón por la suma del tercer renglón y –5 veces el segundo, y reemplazar el cuarto renglón por la suma del cuarto renglón y –2 veces el segundo, se obtiene la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{array}\right]$$

Si se reemplaza el tercer renglón por la suma de 3 veces el tercer renglón y –5 veces el cuarto, se tiene la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right]$$

A continuación se multiplica el cuarto renglón por $-\frac{1}{11}$ y se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Esta matriz está en forma escalonada y es la matriz aumentada del sistema en forma triangular

$$\begin{cases} w + x + y + z = 5 \\ x + 2y = 5 \\ -5y + 3z = -8 \\ z = -1 \end{cases}$$

Al sustituir regresivamente en la tercera ecuación el valor de z de la cuarta ecuación se obtiene $y = 1$; entonces al sustituir regresivamente 1 por y en la segunda ecuación, se tiene $x = 3$. Si se sustituye de manera regresiva en la primera ecuación 3 por x, 1 por y, y -1 por z, se obtiene $w = 2$. Entonces resulta el sistema siguiente que es equivalente al sistema dado:

$$\begin{cases} w = 2 \\ x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Así, el conjunto solución del sistema dado es $\{(2, 3, 1, -1)\}$. ◀

En la Sección 3.2 se mostró que cuando un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables es inconsistente, las gráficas de las dos ecuaciones son rectas paralelas. Para un sistema inconsistente de

tres ecuaciones lineales en tres variables, las gráficas de las tres ecuaciones son planos que no contienen una intersección común. Las diferentes posibilidades se muestran en la Figura 12.2(a)-(d).

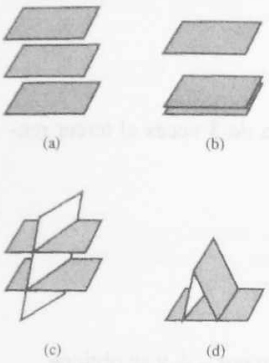


FIGURA 12.2

En (a) los tres planos son paralelos. En (b) dos de los planos son el mismo plano, y el tercer plano es paralelo a él. En (c) dos de los planos son paralelos, la intersección de cada uno de estos planos con el tercero es una recta, siendo las rectas paralelas. En (d) no hay dos planos paralelos, pero dos de los planos se intersectan en una recta que es paralela al tercer plano.

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra lo que ocurre cuando se aplica el método de reducción de Gauss a un sistema de ecuaciones inconsistente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Para el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + 2y + 4z = 1 \\ 5x + y - 7z = 4 \end{cases}$$

la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -7 & 4 \end{array}\right]$$

Si se reemplaza el segundo renglón por la suma del primer renglón y –2 veces el segundo, y se sustituye el tercer renglón por la suma de 5 veces el primer renglón y –2 veces el tercero, se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

Al reemplazar el tercer renglón por la suma de los renglones segundo y tercero se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Esta matriz está en forma escalonada y es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ -3y - 9z = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

en el que las ecuaciones son inconsistentes, como lo indica la tercera ecuación. ◀

Observe en el ejemplo ilustrativo 3 que en el último renglón de la matriz en forma escalonada hay un elemento diferente de cero en la última posición. Siempre que esta situación ocurra, se puede concluir que las ecuaciones del sistema son inconsistentes.

▶ EJEMPLO 3 *Solución de un sistema de tres ecuaciones lineales mediante el método de reducción de Gauss*

Utilice el método de reducción de Gauss para determinar el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ x - y - 3z = -6 \end{cases}$$

Solución La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

Al reemplazar el segundo renglón por la suma de 3 veces el primer renglón y –2 veces el segundo, y sustituir el tercer renglón por la suma del primero y –2 veces el tercero, se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right]$$

Enseguida se reemplaza el tercer renglón por la suma de 3 veces el segundo renglón y el tercero, para obtener

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz está en forma escalonada y es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -y - z = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, se observa que las ecuaciones del sistema son dependientes. La tercera ecuación es una identidad para cualquier terna ordenada (x, y, z) y en particular para $(0, 0, t)$ Así, al reemplazar la ecuación $0 = 0$ por la ecuación $z = t$, se obtiene el sistema equivalente en forma triangular,

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -y - z = -4 \\ z = t \end{cases}$$

Ahora se sustituye regresivamente el valor de z de la tercera ecuación en la segunda, y se despeja y; luego, si se sustituyen de forma regresiva los valores de y y z de las ecuaciones segunda y tercera, respectivamente, en la primera, se obtiene

$$\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$$

Por tanto, el conjunto solución del sistema dado es $\{(2t - 2, 4 - t, t)\}$.◂

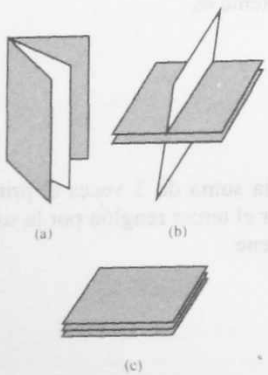


FIGURA 12.3

En el ejemplo 3, observe que cuando el método de reducción de Gauss se emplea para resolver un sistema de ecuaciones dependientes, la matriz en forma escalonada tiene sólo ceros en el último renglón.

Las gráficas de tres ecuaciones lineales dependientes en tres variables son tres planos con una recta en común o los planos son idénticos. La Figura 12.3(a)-(c) muestra las diferentes posibilidades. En (a) las gráficas son tres planos diferentes con una recta en común. En (b) dos planos idénticos intersectan al tercer plano en una recta. En (c) los tres planos son idénticos.

El método de reducción de Gauss puede extenderse a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, y la calculadora puede emplearse para realizar las operaciones en la matriz. Consulte el manual para el manejo de matrices de su calculadora.

En la solución del enunciado del problema del ejemplo siguiente se obtiene un sistema de tres ecuaciones que son dependientes. Sin embargo, el enunciado del problema tiene un número finito de soluciones.

▸ EJEMPLO 4 *Solución del enunciado de un problema que tiene un sistema de tres ecuaciones lineales dependientes como modelo matemático*

Un grupo de 14 personas gastó \$56 en boletos de entrada al Cinema Uno, los cuales costaban \$5 por adulto, \$3 por estudiante y \$2 por niño. Si hubieran asistido las mismas personas al Cinema Dos, que cobraba \$4 por adulto, \$2 por estudiante y \$1 por niño, habrían gastado \$42 en boletos de entrada. ¿Cuántos adultos, cuántos estudiantes y cuántos niños había en el grupo?

Solución Las cantidades desconocidas son el número de adultos, el número de estudiantes y el número de niños en el grupo. Se representan estas cantidades por a, s y c, respectivamente. Entonces como hay 14 personas en el grupo,

$$a + s + c = 14$$

Como el Cinema Uno cobra \$5 por adulto, \$3 por estudiante y \$2 por niño y el total por los boletos de entrada a este cinema fue \$56, se tiene la ecuación

$$5a + 3s + 2c = 56$$

Puesto que el Cinema Dos cobraba \$4 por adulto, \$2 por estudiante y \$1 por niño y el total por boletos de entrada a este cinema sería \$42, se tiene la ecuación

$$4a + 2s + c = 42$$

De modo que se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + s + c = 14 \\ 5a + 3s + 2c = 56 \\ 4a + 2s + c = 42 \end{cases} \quad \textbf{(X)}$$

La matriz aumentada de este sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 5 & 3 & 2 & 56 \\ 4 & 2 & 1 & 42 \end{array}\right]$$

A fin de obtener ceros como los primeros elementos de los renglones segundo y tercero, se reemplaza el segundo renglón por la suma de -5 veces el primer renglón y el segundo, y se sustituye el tercer renglón por la suma de -4 veces el primer renglón y el tercero. De modo que se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \end{array}\right]$$

Al reemplazar el tercer renglón por la suma de -1 vez el segundo renglón y el tercero, se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz, en forma escalonada, es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{cases} a + s + c = 14 \\ -2s - 3c = -14 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación de este sistema indica que las ecuaciones son dependientes. Si se reemplaza esta ecuación por la ecuación $c = t$, se tiene el sistema equivalente en forma triangular,

$$\begin{cases} a + s + c = 14 \\ 2s + 3c = 14 \\ c = t \end{cases}$$

Al sustituir el valor de c de la tercera ecuación en la segunda, y al despejar s y sustituir los valores de s y c en la primera ecuación, resulta

$$\begin{cases} a = 7 + \frac{1}{2}t \\ s = 7 - \frac{3}{2}t \\ c = t \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al sistema (X). Así, la solución de (X) es una terna ordenada de la forma $\{(7 + \frac{1}{2}t, 7 - \frac{3}{2}t, t)\}$.

Puesto que a, s y c deben representar números enteros no negativos, cada uno de los números t, $7 - \frac{3}{2}t$ y $7 + \frac{1}{2}t$ debe ser un entero no negativo. Si $t = 0$, $7 - \frac{3}{2}t = 7$ y $7 + \frac{1}{2}t = 7$. Por tanto $(7, 7, 0)$ es una solución. Si $t = 1$, $7 - \frac{3}{2}t = \frac{11}{2}$ y $7 + \frac{1}{2}t = \frac{15}{2}$; entonces $t = 1$ no proporciona una solución del problema. Si $t = 2$, $7 - \frac{3}{2}t = 4$ y $7 + \frac{1}{2}t = 8$. Por tanto $(8, 4, 2)$ es una solución. Si $t = 3$, tanto $7 - \frac{3}{2}t$ como $7 + \frac{1}{2}t$ no son enteros, por lo que $t = 3$ no proporciona una solución del sistema. Si $t = 4$, $7 - \frac{3}{2}t = 1$ y $7 + \frac{1}{2}t = 9$. De donde $(9, 1, 4)$ es una solución. Si t es un entero mayor que 4, entonces $7 - \frac{3}{2}t$ es un número negativo. Por tanto, el conjunto solución del problema es $\{(7, 7, 0), (8, 4, 2), (9, 1, 4)\}$.

Conclusión: Existen tres posibles combinaciones de personas en el grupo: siete adultos, siete estudiantes y ningún niño; ocho adultos, cuatro estudiantes y dos niños; o nueve adultos, un estudiante y cuatro niños.

Comprobación: Si en el grupo hay siete adultos, siete estudiantes y ningún niño, el costo total por los boletos de entrada al Cinema Uno es $5(7) + 3(7) = 56$; mientras que el costo total por los boletos de entrada al Cinema Dos sería $(4)(7) + (2)(7) = 42$. Si en el grupo hubiesen 8 adultos, 4 estudiantes y 2 niños, el costo total por los boletos al Cinema Uno sería $5(8) + 3(4) + 2(2) = 56$; en cambio, si hubieran asistido al Cinema Dos el costo total por los boletos de entrada sería $(4)(8) + (2)(4) + (1)(2) = 42$. Por otro lado, si el grupo estuviese formado por nueve adultos, un estudiante y cuatro niños, entonces el costo total por los boletos de entrada al Cinema Uno sería $5(9) + 3(1) + 2(4) = 56$; y si estas mismas personas hubiesen asistido al Cinema Dos el costo total de los boletos de entrada hubiese sido $(4)(9) + (2)(1) + (1)(4) = 42$. ◀

El método de matrices puede aplicarse a sistemas de cualquier número de ecuaciones lineales en cualquier número de variables. Cuando hay tantas ecuaciones como variables, es muy probable que el sistema tenga una solución única; sin embargo, como se ha visto, es posible que las ecuaciones sean dependientes o inconsistentes. Cuando el número de variables es mayor que el número de ecuaciones, es más común que el sistema tenga un número infinito de soluciones. No obstante, es posible que las ecuaciones sean inconsistentes, como en el caso de un sistema de dos ecuaciones lineales en tres variables cuando las gráficas son planos paralelos. Cuando hay más ecuaciones que variables, es muy común que las ecuaciones sean inconsistentes, aunque esto no es necesariamente así. En el ejercicio 23 el sistema tiene más variables que ecuaciones, y se le pedirá que muestre que el sistema tiene un número infinito de soluciones. En el ejercicio 24 el sistema tiene más ecuaciones que variables, y se le pedirá que muestre que las ecuaciones son inconsistentes.

EJERCICIOS 12.1

En los ejercicios 1 a 10, determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones mediante el método de eliminación. Si las ecuaciones son inconsistentes o dependientes, indíquelo.

1. $\begin{cases} 4x + 3y + z = 15 \\ x - y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ 5x + 2y - 3z = -13 \\ x - 2y + 5z = 15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - z = 5 \\ 5x + 2z = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 4 \\ 7x + 5y - z = 9 \\ x + 9y - 9z = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 4 \\ x + 7y + 6z = -7 \\ 7x - 2y - 9z = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - 5y + 2z = -2 \\ 2x + 3z = -3 \\ 4y - 3z = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3y + z = 1 \\ x - 2z = 7 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x - 4y + 5z = 6 \\ 6x + y - 2z = 4 \\ 4x - 9y + 12z = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 5 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 12 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} = 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{z} = -1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{4}{z} = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{1}{z} = 5 \end{cases}$

En los ejercicios 11 a 22, emplee el método de reducción de Gauss para determinar el conjunto solución del sistema. Si las ecuaciones son inconsistentes o dependientes, indíquelo.

11. El sistema del ejercicio 1.

12. El sistema del ejercicio 2.

13. $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \\ x - 3y - z = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x + 2y = 4 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 2 \\ \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} - \frac{z}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{2} = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{3y}{4} + \frac{z}{3} = \frac{5}{8} \\ \frac{3x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = -\frac{1}{8} \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 4 \\ x + 2y - 5z = 6 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} w + 3x + y + z = 3 \\ -w - 3y - z = 0 \\ -2w + 3x - 4y + z = 0 \\ -w - 6x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2w + x - 3y - 3z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \\ 2w - x + 3z = -3 \\ 5w - y + z = -6 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2w - 4x + y - 2z = 3 \\ 3w + x + 2y + 3z = 12 \\ w - 4x + 2y - 6z = 1 \\ 5w + x + 11z = 16 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2w + 3x - 4y - z = 3 \\ 3w + x + y + 2z = 1 \\ w - 2x + 3y - z = 0 \\ w - 2x - y - 9z = 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4w + x - 2y + z = 4 \\ 2w + 3x + 4y - 3z = -2 \\ 3w - 2x + 5y + 3z = 2 \\ w + 4x + 3y + z = 5 \end{cases}$

23. Utilice el método de reducción de Gauss para mostrar que el sistema siguiente tiene un número infinito de soluciones:

$$\begin{cases} w - x + y + z = 4 \\ 3w - 2y + z = 2 \\ w + 2x - 3y - 5z = 3 \end{cases}$$

24. Use el método de reducción de Gauss para mostrar que el sistema siguiente es inconsistente:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 5 \\ 2x + y + 5z = 2 \\ 3x - 2y - 4z = 4 \\ 4x - 5y + 4z = -3 \end{cases}$$

En los ejercicios 25 a 28, el sistema tiene más variables que ecuaciones. Utilice el método de reducción de Gauss para determinar el conjunto solución del sistema.

25. $\begin{cases} 5x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - 5y + 7z = 11 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5 \\ 2x - y - 4z = 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5w - x - 2y + 5z = 7 \\ 3w + 2x - 3y + 2z = 4 \\ w - 8x + 5y + 4z = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} w + 2x - 3y - z = -2 \\ 3w - 4x + y - 3z = 1 \\ 4w + x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$

En los ejercicios 29 a 36, el sistema tiene más ecuaciones que variables. Emplee el método de reducción de Gauss para determinar si las ecuaciones son consistentes o inconsistentes. Si son consistentes encuentre el conjunto solución.

29. El sistema del ejercicio 39 de la Sección 3.2.

30. El sistema del ejercicio 40 de la Sección 3.2.

31. El sistema del ejercicio 41 de la Sección 3.2.

32. El sistema del ejercicio 42 de la Sección 3.2.

33. $\begin{cases} 2x + y + 3z = -4 \\ x - 4y - 2z = 3 \\ 4x - 2y + z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x - 3y + 3z = 5 \\ 3x + y + 4z = 2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 5 \\ x - 4y - 2z = 7 \\ 4x - 3y + 5z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ x - y + 2z = 6 \\ 3x + y - 5z = -1 \\ x - 2y + z = 7 \end{cases}$

En los ejercicios 37 y 38, encuentre una ecuación de la circunferencia que contenga los puntos indicados. Sugerencia: recuerde que una ecuación de una circunferencia es de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

37. (-2, 8), (2, 6) y (-7, 3).

38. (5, 4), (-2, 3) y (-4, 1).

39. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje y, si contiene los puntos (1, -1), (2, 3) y (3, 15). *Sugerencia:* una ecuación de una de estas parábolas es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

40. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje x, si contiene los puntos (3, 0), (1, -4) y (-1, 6). *Sugerencia:* una ecuación de una de estas parábolas es de la forma $x = ay^2 + by + c$.

En los ejercicios 41 a 48, resuelva el enunciado del problema al encontrar un sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático. No olvide escribir una conclusión.

41. Se invierten $25 000, una parte a 10%, otra parte a 12% y una tercera parte a 16%. El interés total anual de estas tres inversiones es de $3 200. Además, la inversión a 16% reditúa la misma cantidad que la suma de los intereses de las otras dos inversiones. ¿Cuánto se invierte en cada tasa?

42. Si t grados Celcius es la temperatura a la cual hierve el agua a una altura de h pies sobre el nivel del mar, entonces $h = a + bt + ct^2$. Si el agua hierve a 100° C al nivel del mar, a 95° C a una altura de 7 400 pie sobre el nivel del mar y a 90° C a una altura de 14 550 pie sobre el nivel del mar, determine a, b y c.

43. En 20 onzas de una aleación hay 6 oz de cobre, 4 oz de cinc y 10 oz de plomo. En 20 oz de una segunda aleación hay 12 oz de cobre, 5 oz de cinc y 3 oz de plomo, mientras que en 20 oz de una tercera aleación hay 8 oz de cobre, 6 oz de cinc y 6 oz de plomo. ¿Cuántas onzas de cada aleación deben mezclarse para hacer una nueva aleación que contenga 34 oz de cobre, 17 oz de cinc y 19 oz de plomo?

44. Se invierte un total de $50 000 en tres tipos de valores para los cuales se determinan los dividendos anuales a 8%, 10% y 12%. Si el ingreso total anual de los tres valores es $5 320, y el ingreso procedente del valor a 12% es $1 080 más que el del valor a 10%, determine la cantidad invertida en cada valor.

45. En una tienda de regalos se venden tres tipos de tarjetas de navidad. Las tarjetas grandes cuestan $1 cada una; las tarjetas medianas cuestan 80 centavos por unidad; y las tarjetas pequeñas cuestan 60 centavos cada una. Una mujer compró 10 tarjetas que consistían en la cuarta parte de las tarjetas grandes, la tercera parte de las tarjetas medianas y la mitad de las tarjetas pequeñas. El costo total de las tarjetas fue de $8.20. Si quedaron 21 tarjetas en el estante después de su compra, ¿cuántas tarjetas compró de cada tipo?

46. El alimento A tiene 560 calorías por libra y 80 unidades de vitaminas por libra, el alimento B tiene 240 calorías por libra y 400 unidades de vitaminas por libra, y el alimento C tiene 480 calorías por libra y 160 unidades de vitaminas por libra. Se desea preparar una mezcla de 10 libras de los alimentos A, B y C que contenga un total de 2 000 calorías y 1 200 unidades de vitaminas. Demuestre que estos requerimientos conducen a un sistema inconsistente de ecuaciones y, por tanto, la mezcla no es posible.

47. Suponga que en el ejercicio 46 en lugar de una mezcla de 10 libras, se desea tener una mezcla de 5 libras de los alimentos A, B y C que contenga un total de 2 000 calorías y 1 200 unidades de vitaminas. **(a)** Muestre que estas condiciones conducen a

un sistema dependiente de ecuaciones. (b) Si x libras de A, y libras de B y z libras de C se emplean para preparar las 5 libras, ¿cuáles son las restricciones para x, y y z?

48. Un folleto que promueve exhibiciones en una galería de arte se envía cada mes a las personas cuyos nombres aparecen en una lista de suscriptores, y los empleados A, B y C ayudan en la preparación del envío postal. Cuando los tres trabajan juntos, les lleva 2 horas y 55 minutos preparar la remesa. El mes pasado el empleado C salió de vacaciones y los empleados A y B tardaron juntos 5 horas en preparar el envío. Para el envío de este mes cada empleado inició a un tiempo diferente: el empleado A empezó a las 9 a. m.; el empleado B se unió a A a las 10 a. m.; y el empleado C se unió a A y B a las 10:54 a. m. Terminaron el trabajo a la 1 p. m. ¿Cuánto tardará cada empleado si trabajara individualmente en preparar el envío? *Véase* la sugerencia para el ejercicio 33 de la Sección 3.2.

49. Explique por qué el intercambio de dos renglones de una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales produce una matriz de un sistema equivalente, y por qué el intercambio de dos columnas no.

50. Explique por qué la multiplicación de cada elemento de un renglón, de una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales por el mismo número diferente de cero, produce una matriz de un sistema equivalente, y por qué no cuando se efectúa la misma operación con cada elemento de una columna.

12.2 PROPIEDADES DE LAS MATRICES Y SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR MEDIO DE MATRICES INVERSAS

OBJETIVOS

1. **Evaluar un determinante de segundo orden.**
2. **Evaluar un determinante de tercer orden.**
3. **Calcular el producto de un escalar y una matriz.**
4. **Calcular el producto de dos matrices.**
5. **Definir el idéntico multiplicativo para un conjunto de matrices cuadradas.**
6. **Aprender que una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero.**
7. **Calcular a mano la inversa de una matriz cuadrada de orden dos, si existe.**
8. **Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices inversas.**

En la Sección 12.1 se mostró cómo se emplean las matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio del método de reducción de Gauss. En esta sección se presentará otro método para resolver sistemas lineales mediante matrices cuando el número de ecuaciones del sistema es igual al número de variables. Se inicia la discusión con la definición de cierta terminología.

Asociado con cada matriz cuadrada existe un número denominado *determinante* de la matriz.

DEFINICIÓN **Determinante de segundo orden**

Si H es la matriz cuadrada de orden dos

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

entonces el **determinante** de H, denotado por $\det H$ o $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, está definido por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

y es de **segundo orden.**

▸ EJEMPLO 1 *Evaluación de un determinante de segundo orden*

Evalúe el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 4(-2)$$

$$= 5$$ ◂

DEFINICIÓN **Determinante de tercer orden**

Si H es la matriz cuadrada de orden tres

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

entonces el **determinante** de H, denotado por $\det H$ o $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, está definido por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

y es de **tercer orden.**

Observe que los términos del miembro derecho de la ecuación que define un determinante de tercer orden consta de los elementos del primer renglón multiplicados por el determinante de segundo orden que se obtiene al eliminar el renglón y la columna en los que el elemento se encuentra. Esto es, a_1 se multiplica por el determinante que resulta al eliminar el primer renglón y la primera columna, b_1 (precedido por un signo menos) se multiplica por el determinante obtenido al eliminar el primer renglón y la segunda columna, y c_1 se multiplica por el determinante que se obtiene al eliminar el primer renglón y la tercera columna.

▶ EJEMPLO 2 *Evaluación de un determinante de tercer orden*

Evalúe el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3 - 0) - 3(12 + 10) + (-1)(0 - 5)$$

$$= 2(-3) - 3(22) - 1(-5)$$

$$= -67$$

Frecuentemente se dice que el matemático alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), uno de los inventores del Cálculo, fue el creador de los determinantes. Sin embargo, de hecho, el matemático japonés **Seki Kowa** (1642-1708) los empleó primero.

Los determinantes se han introducido de modo que puedan aplicarse posteriormente en esta sección para la solución de sistemas lineales. No se proporciona una definición formal de un determinante de orden mayor que tres porque el cálculo a mano de tales determinantes es engorroso. No obstante, se puede calcular el determinante de una matriz en la calculadora en la que se puedan realizar operaciones con matrices. Consulte el manual de su calculadora para este procedimiento.

En la Sección 12.1 se definió una matriz de orden $m \times n$ como una matriz que tiene m renglones y n columnas. Si una matriz tiene únicamente una columna, se denomina **matriz columna,** y si tiene sólo un renglón se llama **matriz renglón.**

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Las matrices siguientes tienen el orden indicado debajo de ellas:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & -1 & 6 \\ 2 & -10 & -8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad [0 \quad 2 \quad -5] \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 11 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

3×2 $\quad$ 2×3 $\quad$ 4×1 $\quad$ 1×3 $\quad$ 3×3

Matriz columna $\quad$ Matriz renglón $\quad$ Matriz cuadrada

◁

Se dice que dos matrices son **iguales** si y sólo si sus órdenes son iguales y los elementos correspondientes son iguales. Esto es,

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

si y sólo si

$$r = a \qquad s = b \qquad t = c \qquad u = d$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & -3 & 0 \\ 3 - 2 & \frac{6}{2} & \frac{2}{1} \end{bmatrix}$$

entonces $A \neq B$ y $B \neq C$, pero $A = C$. ◁

A continuación se define la *multiplicación* de una matriz por un *escalar* donde, para nuestro propósito, un **escalar** denota un número real.

DEFINICIÓN **Producto de un escalar y una matriz**

El **producto** de un escalar k y una matriz H, denotado por kH, es la matriz en la que cada elemento se obtiene multiplicando k por el elemento correspondiente de H.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

$$2\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 12 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$-3\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 \\ -6 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

◂

La definición del producto de dos matrices tal vez le parezca rara. Sin embargo, existen aplicaciones que garantizan tal definición. Antes de dar la definición formal, se consideran algunos casos especiales y se inicia con el siguiente ejemplo ilustrativo que implica una matriz renglón y una matriz columna.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea

$$R = [2 \quad 3 \quad -5] \qquad \text{y} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El producto de R y C, denotado por RC, es la matriz que contiene un elemento simple que es la suma de los productos formados al multiplicar cada elemento de R por el elemento correspondiente de C:

$$\begin{aligned} RC &= [2 \quad 3 \quad -5]\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= [(2)(1) + (3)(4) + (-5)(2)] \\ &= [2 + 12 - 10] \\ &= [4] \end{aligned}$$

◂

Observe que el método de multiplicación de matrices del ejemplo ilustrativo 4 nos permite escribir la ecuación lineal

$$ax + by + cz = d$$

en forma matricial como

$$[a \quad b \quad c]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [d]$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Considere el producto de las matrices C y D, donde

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Para obtener el elemento en el renglón 1, columna 1 de CD se multiplican los elementos del renglón 1 de C por los elementos correspondientes de la columna 1 de D y se suman los productos como sigue:

$$(3)(2) + (0)(4) + (-4)(1) = 2$$

Para el elemento en el renglón 1, columna 2 de CD se multiplican los elementos del renglón 1 de C por los elementos correspondientes de la columna 2 de D y se suman los productos:

$$(3)(-3) + (0)(-1) + (-4)(5) = -29$$

Para el elemento en el renglón 2, columna 1 de CD, se suman los productos obtenidos al multiplicar los elementos del renglón 2 de C por los elementos correspondientes de la columna 1 de D:

$$(-2)(2) + (2)(4) + (-1)(1) = 3$$

Para el elemento en el renglón 2, columna 2 de CD, se suman los productos obtenidos al multiplicar los elementos del renglón 2 de C por los elementos correspondientes de la columna 2 de D:

$$(-2)(-3) + (2)(-1) + (-1)(5) = -1$$

Por tanto, se ha obtenido el producto siguiente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -29 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

◀

Ahora se presentará la definición formal del producto de dos matrices A y B. Es necesario que el número de columnas de la primera matriz A sea el mismo que el número de renglones de la segunda matriz B.

DEFINICIÓN Producto de dos matrices

Suponga que A es una matriz de orden $m \times p$ y que B es una matriz de orden $p \times n$. Entonces el **producto** de A y B, denotado por AB, es la matriz de orden $m \times n$ para la cual el elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna es la suma de los productos formados al multiplicar cada elemento del i-ésimo renglón de A por el elemento correspondiente de la j-ésima columna de B.

▸ EJEMPLO 3 *Determinación del producto de dos matrices*

Aplique la definición para determinar el producto DC para las matrices del ejemplo ilustrativo 5.

Solución

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(3) + (-3)(-2) & (2)(0) + (-3)(2) & (2)(-4) + (-3)(-1) \\ (4)(3) + (-1)(-2) & (4)(0) + (-1)(2) & (4)(-4) + (-1)(-1) \\ (1)(3) + (5)(-2) & (1)(0) + (5)(2) & (1)(-4) + (5)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -6 & -5 \\ 14 & -2 & -15 \\ -7 & 10 & -9 \end{bmatrix}$$

Otra vez se enfatiza que para obtener el producto de dos matrices A y B, el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B; en caso contrario el producto no está definido. Cuando AB está definido, su producto tiene tantos renglones como A y tantas columnas como B. *Véase* los ejemplos ilustrativos 4 y 5, así como el ejemplo 3 y observe lo siguiente:

Ejemplo ilustrativo 4: matriz 1×3 por matriz 3×1 da matriz 1×1

Ejemplo ilustrativo 5: matriz 2×3 por matriz 3×2 da matriz 2×2

Ejemplo 3: matriz 3×2 por matriz 2×3 da matriz 3×3

Otra observación del ejemplo ilustrativo 5 y del ejemplo 3 es que CD no es igual a DC; esto es, la multiplicación de matrices *no es conmutativa*. Sin embargo, el teorema siguiente establece que la multiplicación de matrices es *asociativa* cuando el producto existe.

TEOREMA 1

Si A, B y C son matrices tales que los productos siguientes existen, entonces

$$A(BC) = (AB)C$$

La demostración de este teorema se omite. No obstante, se le pedirá que verifique el teorema en los ejercicios 21 y 22 para matrices particulares.

El método de multiplicación de matrices puede emplearse para escribir un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Antes de utilizar esta forma matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales se necesitan dos conceptos: el *idéntico multiplicativo* para un conjunto de matrices cuadradas y el *inverso multiplicativo* (o *inversa*) de una matriz cuadrada.

El número 1 es el idéntico multiplicativo para los números reales, tal que para cualquier número real a

$$a \cdot 1 = a$$

¿El conjunto de matrices de un orden dado tendrá idéntico multiplicativo? La respuesta, en general, es no. Sin embargo, existe un idéntico multiplicativo para el conjunto de matrices cuadradas de un orden determinado.

DEFINICIÓN **Idéntico multiplicativo**

El **idéntico multiplicativo** para el conjunto de matrices cuadradas de orden n, denotado por I_n, es la matriz de orden n, cuyos elementos de la diagonal principal son unos y todos los demás elementos son ceros.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Los idénticos multiplicativos para los conjuntos de matrices cuadradas de órdenes 2, 3 y 4, son I_2, I_3 e I_4, respectivamente, donde

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacktriangleleft$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Sea H cualquier matriz cuadrada de orden tres:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$HI_3 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= H \qquad = H$$

En el ejemplo ilustrativo 7 se ha probado el teorema siguiente para matrices cuadradas de orden tres. Una demostración similar puede darse para matrices cuadradas de cualquier orden.

TEOREMA 2

Si H es una matriz cuadrada de orden n y si I_n es el idéntico multiplicativo de orden n, entonces

$$HI_n = H \quad \text{e} \quad I_nH = H$$

Se sabe que para cada número real a, excepto cero, existe un número real a^{-1}, denominado inverso multiplicativo de a, tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad a^{-1} \cdot a = 1$$

A fin de que una matriz cuadrada H de orden n tenga un *inverso multiplicativo* H^{-1}, es necesario que

$$HH^{-1} = I_n \quad \text{y} \quad H^{-1}H = I_n$$

Enseguida se presentará un teorema que establece que tal matriz H^{-1}, llamada **inverso multiplicativo** de H, existe si y sólo si $\det H \neq 0$; esto es, un determinante *determina* si una matriz tiene un inverso.

TEOREMA 3

Si H es una matriz cuadrada de orden n, entonces existe una matriz H^{-1} tal que

$$HH^{-1} = I_n \qquad \text{y} \qquad H^{-1}H = I_n$$

si y sólo si $\det H \neq 0$.

Se omite la demostración del Teorema 3.

Si una matriz H tiene un inverso (esto es, si $\det H \neq 0$), se dice que H es **invertible,** o **no singular.** Si una matriz H no tiene inverso (esto es, $\det H = 0$), entonces se dice que H es **singular.**

El Teorema 3 se denomina teorema de existencia porque proporciona una condición para que exista el inverso de una matriz. Observe que el teorema no indica cómo encontrar el inverso. No obstante, se puede determinar el inverso de una matriz cuadrada invertible de orden dos al aplicar el teorema siguiente.

TEOREMA 4

Si H es la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y si $\det H \neq 0$, entonces

$$H^{-1} = \frac{1}{\det H}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Demostración Se mostrará que $H^{-1}H = I_2$. La prueba de que $HH^{-1} = I_2$ es semejante.

$$\begin{aligned} H^{-1}H &= \left(\frac{1}{\det H}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det H}\begin{bmatrix} ad - bc & bd - bd \\ -ac + ac & -bc + ad \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det H}\begin{bmatrix} \det H & 0 \\ 0 & \det H \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= I_2 \end{aligned}$$

■

▶ EJEMPLO 4 *Determinación del inverso de una matriz cuadrada de orden dos*

Si

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

demuestre que H es invertible y determine H^{-1}.

Solución

$$\begin{aligned} \det H &= 2(-5) - 3(-4) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Como $\det H \neq 0$, H es invertible. Del Teorema 4

$$\begin{aligned} H^{-1} &= \frac{1}{\det H}\begin{bmatrix} -5 & -(-4) \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En general, el cálculo a mano de matrices inversas es tedioso. Afortunadamente, una calculadora que pueda manejar matrices determinará el inverso de una matriz invertible de manera rápida. Consulte el manual del usuario para el procedimiento. Recuerde, primero verifique que la matriz es en realidad invertible mostrando que su determinante es diferente de cero.

▶ EJEMPLO 5 *Determinación de que una matriz cuadrada de orden tres es invertible*

Si

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

muestre que H es invertible.

Solución Del Teorema 3, H es invertible si y sólo si $\det H \neq 0$. De la definición de un determinante de tercer orden

$$\begin{aligned}\det H &= 1\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}\\ &= 1(6-0) - 2(2-0) + 1(0-12)\\ &= -10\end{aligned}$$

Como $\det H \neq 0$, entonces H es invertible. ◀

▶ EJEMPLO 6 *Multiplicación de una matriz por su inversa*

En una calculadora determine H^{-1}, la inversa de H del ejemplo 5, y muestre que $HH^{-1} = I_3$.

Solución El cálculo de H^{-1} en una calculadora da

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10}\\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

Así,

$$\begin{aligned}HH^{-1} &= \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10}\\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{10}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{6}{5} & \frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{4}{5} & \frac{3}{10}-\frac{2}{10}-\frac{1}{10}\\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+0 & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}+0 & \frac{3}{10}-\frac{3}{10}+0\\ -\frac{12}{5}+0+\frac{12}{5} & \frac{8}{5}+0-\frac{8}{5} & \frac{12}{10}+0-\frac{2}{10}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= I_3\end{aligned}$$

◀

Ahora se tienen los medios para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices inversas.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

Para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

primero se escribe el sistema en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La primera matriz de la izquierda se denomina *matriz de coeficientes* para el sistema; al denotar esta matriz por H se tiene

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces, la forma matricial del sistema es

$$H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Debido a que H es la matriz del ejemplo 4, se sabe que H^{-1} existe. En consecuencia, se pueden multiplicar ambos miembros de esta ecuación, por la izquierda, por H^{-1} y obtener

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Al emplear el resultado del ejemplo 4 para H^{-1}, se tiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} + 4 \\ -\frac{3}{2} + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, $x = \frac{3}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$.

▸ EJEMPLO 7 *Solución de un sistema de ecuaciones lineales mediante la inversa de una matriz*

Utilice la inversa de una matriz para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 3y = 1 \\ 4x + 2z = -4 \end{cases}$$

Solución Si

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema en forma matricial es

$$H \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Como H es la matriz del ejemplo 5, se sabe que H^{-1} existe. En consecuencia, se pueden multiplicar ambos miembros de esta ecuación, por la izquierda, por H^{-1} para obtener

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Si se utiliza el resultado del ejemplo 6 para H^{-1}, se tiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $x = -2$, $y = 1$ y $z = 2$. ◂

EJERCICIOS 12.2

En los ejercicios 1 a 4, evalúe el determinante.

1. (a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

2. (a) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} -6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

5. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

determine lo siguiente: **(a)** el orden de A; **(b)** el orden de B; **(c)** el elemento en el primer renglón y la segunda columna de A; **(d)** el producto de 3 y A; **(e)** el producto de -2 y B.

6. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = [2 \quad -1 \quad 5 \quad -6]$$

determine lo siguiente: **(a)** el orden de A; **(b)** el orden de B; **(c)** el elemento en el tercer renglón y la segunda columna de A; **(d)** el producto de 2 y A; **(e)** el producto de -3 y B.

En los ejercicios 7 a 16, determine el producto.

7. (a) $4\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $-5\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

8. (a) $-2\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$

(b) $3\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

9. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

10. (a) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $[-1 \quad 3 \quad -2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

11. (a) $[1 \quad 2 \quad -3]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}[1 \quad 2 \quad -3]$

12. (a) $[2 \quad 1]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}[2 \quad 1]$

13. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 17 a 22, verifique el enunciado donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

e I es el idéntico multiplicativo de orden 2.

17. $AI = A$ e $IA = A$

18. $BI = B$ e $IB = B$

19. $AB \neq BA$

20. $BC \neq CB$

21. $A(BC) = (AB)C$

22. $C(BA) = (CB)A$

En los ejercicios 23 y 24, la matriz dada es H. Demuestre que H es invertible, encuentre H^{-1} y muestre que $HH^{-1} = I_2$.

23. $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 25 a 28, determine si la matriz es invertible.

25. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 29 a 32, resuelva el sistema de ecuaciones por medio de una matriz inversa. Para los ejercicios 29 y 30, primero verifique en la calculadora que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

y para los ejercicios 31 y 32, primero verifique en la calculadora que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

29. $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -5x + 3y = 7 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -5x + 3y = -5 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + 2z = 5 \\ -y + z = 3 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 2z = 12 \\ -y + z = 7 \\ x + 3y = -4 \end{cases}$

En los ejercicios 33 a 36, resuelva el sistema de ecuaciones mediante una matriz inversa. Determine la inversa de la matriz de coeficientes en la calculadora.

33. $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 6x - 6y = 1 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 4 \\ 5x - y + 4z = 12 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 5 \\ x + y + z = 0 \\ 4x + y - 2z = -15 \end{cases}$

En los ejercicios 37 y 38, encuentre H^{-1} para la matriz H dada sin emplear la calculadora o el Teorema 4. (Sugerencia: sea $H^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, y del hecho de que $HH^{-1} = I_2$, obtenga cuatro ecuaciones en a, b, c y d.)

37. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 39 a 48, verifique la igualdad si

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

39. $\det(MN) = (\det M)(\det N)$

40. $\det(NM) = (\det N)(\det M)$

41. $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

42. $(NM)^{-1} = M^{-1}N^{-1}$

43. $(M^{-1})^{-1} = M$

44. $(N^{-1})^{-1} = N$

45. $(M^{-1})^2 = (M^2)^{-1}$

46. $(N^{-1})^2 = (N^2)^{-1}$

47. $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det M}$

48. $\det(N^{-1}) = \dfrac{1}{\det N}$

49. Explique en palabras (sin símbolos) el significado de las igualdades de los ejercicios 41 y 43.

50. Explique en palabras (sin símbolos) el significado de las igualdades de los ejercicios 45 y 47.

12.3 FRACCIONES PARCIALES

OBJETIVOS

1. **Descomponer una fracción en fracciones parciales cuando todos los factores del denominador son lineales y ninguno se repite.**
2. **Descomponer una fracción en fracciones parciales cuando todos los factores del denominador son lineales y algunos se repiten.**
3. **Descomponer una fracción en fracciones parciales cuando los factores del denominador son lineales y cuadráticos y ninguno se repite.**
4. **Descomponer una fracción en fracciones parciales cuando los factores del denominador son lineales y cuadráticos y algunos de los factores cuadráticos se repiten.**

Usted ya sabe cómo combinar dos o más expresiones racionales en una expresión racional mediante adición o sustracción. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$$

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ En ocasiones es necesario invertir el proceso, esto es, representar una expresión racional simple como una suma de dos o más cocientes más simples, denominadas **fracciones parciales.** En Cálculo se necesita hacer esto para efectuar la operación de integración de algunas funciones racionales. Con frecuencia se emplean sistemas de ecuaciones para descomponer una expresión racional en fracciones parciales.

Considere la función racional definida por

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Se asumirá que se tiene una **fracción propia,** esto es, una fracción en la que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Si se tiene una función racional en la que el grado del numerador no es menor que el grado del denominador, entonces se tiene una **fracción impropia,** y en este caso se divide el numerador entre el denominador hasta que se obtenga una fracción propia. Por ejemplo,

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$$

En general, se tratará un método para descomponer una fracción propia de la forma $P(x)/Q(x)$ en dos o más fracciones parciales. Los denominadores de las fracciones parciales se obtienen al factorizar $Q(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos. En ocasiones podrá ser difícil encontrar estos factores. Sin embargo, recuerde el Teorema

5 de la Sección 5.4, el cual establece que un polinomio con coeficientes reales puede expresarse como un producto de polinomios lineales o cuadráticos con coeficientes reales.

Después de que $Q(x)$ ha sido factorizado en un producto de factores lineales o cuadráticos, el método para determinar las fracciones parciales depende de la naturaleza de estos factores. Se considerarán diferentes casos de forma separada.

Caso 1: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y ninguno se repite. Esto es,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_nx + b_n)$$

donde ningún par de factores es idéntico. En este caso se escribe

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes a determinar. Observe que esta ecuación es una identidad porque es verdadera para cada valor de x, tal que ningún denominador es cero. El siguiente ejemplo ilustrativo muestra un método para determinar los valores de A_i.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Para descomponer la fracción

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6}$$

en fracciones parciales, se factoriza el denominador y se obtiene

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)}$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} \qquad (1)$$

La ecuación (1) es una identidad para todo x excepto -2 y 3. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por el MCDn, se obtiene

$$7x - 1 = A(x - 3) + B(x + 2)$$

Esta ecuación es una identidad. Es verdadera para todo valor de x incluyendo a -2 y 3. Enseguida se determinan las constantes A y B. Si se sustituye 3 por x en la ecuación anterior, se tiene

$$20 = 5B \Leftrightarrow B = 4$$

Al sustituir -2 por x en la misma ecuación, se obtiene

$$-15 = -5A \Leftrightarrow A = 3$$

Con estos valores de A y B, se tiene de (1)

$$\frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{3}{x + 2} + \frac{4}{x - 3}$$

Observe que esta ecuación es equivalente a la ecuación con que se inició esta sección. ◂

▸ **EJEMPLO 1** ***Descomposición de una fracción en fracciones parciales cuando los factores del denominador son lineales y ninguno se repite***

Descomponga la fracción

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x}$$

en fracciones parciales.

Solución Al factorizar el denominador se tiene

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)}$$

De modo que

$$\frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 1} \qquad (2)$$

La ecuación (2) es una identidad para todo x excepto 0, 2 y −1. Si se multiplican los dos miembros de la ecuación por el MCDn se obtiene

$$x - 1 = A(x - 2)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 2)$$

Esta ecuación es una identidad para todos los valores de x incluyendo 0, 2 y −1. A fin de encontrar las constantes, primero se sustituye 0 por x, obteniéndose

$$-1 = -2A \Leftrightarrow A = \tfrac{1}{2}$$

Al reemplazar 2 por x, se consigue

$$1 = 6B \Leftrightarrow B = \tfrac{1}{6}$$

Si se sustituye −1 por x, se obtiene

$$-2 = 3C \Leftrightarrow C = -\tfrac{2}{3}$$

Con estos valores de A, B y C se tiene de (2)

$$\frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x - 2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{6(x - 2)} - \frac{2}{3(x + 1)}$$

◂

Caso 2: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y algunos se repiten.

Suponga que $(ax + b)^p$ aparece como un factor de $Q(x)$. Entonces se dice que $ax + b$ es un factor p-múltiple de $Q(x)$, y a este factor le corresponderá la suma de p fracciones parciales

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_{p-1}}{(ax + b)^{p-1}} + \frac{A_p}{(ax + b)^p}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_p$ son constantes a determinar. El ejemplo 2 ilustra este caso y el método para determinar cada A_i.

► EJEMPLO 2 *Descomposición de una fracción en fracciones parciales cuando todos los factores del denominador son lineales y algunos se repiten*

Descomponga la fracción

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x - 2)^2}$$

en fracciones parciales.

Solución Se escribe la fracción dada como una suma de fracciones parciales como sigue:

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x - 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 2} + \frac{E}{(x - 2)^2} \qquad (3)$$

Al multiplicar ambos miembros de (3) por el MCDn se tiene

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = Ax^2(x - 2)^2 + Bx(x - 2)^2 + C(x - 2)^2 + Dx^3(x - 2) + Ex^3 \qquad (4)$$

Si se sustituye 0 por x en esta ecuación, se obtiene

$$-12 = 4C \Leftrightarrow C = -3$$

Al reemplazar 2 por x en (4) se consigue

$$40 = 8E \Leftrightarrow E = 5$$

Con estos valores de C y E en (4) y al desarrollar las potencias de los binomios, se tiene

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = Ax^2(x^2 - 4x + 4) + Bx(x^2 - 4x + 4) - 3(x^2 - 4x + 4) + Dx^3(x - 2) + 5x^3$$

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = (A + D)x^4 + (-4A + B - 2D + 5)x^3 + (4A - 4B - 3)x^2 + (4B + 12)x - 12$$

Como esta ecuación es una identidad, los coeficientes de la izquierda deben ser iguales a los coeficientes correspondientes de la derecha. Por tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + D = 1 \\ -4A + B - 2D + 5 = 0 \\ 4A - 4B - 3 = 1 \\ 4B + 12 = 16 \end{cases}$$

De la cuarta ecuación, $B = 1$. Al sustituir B por 1 en la tercera ecuación y despejar A, se tiene $A = 2$. Con $A = 2$ en la primera ecuación, se obtiene $D = -1$. Se emplea la segunda ecuación para verificar los valores encontrados:

$$\begin{aligned} -4A + B - 2D + 5 &= -4(2) + 1 - 2(-1) + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De modo que los valores de las constantes son los siguientes:

$$A = 2 \quad B = 1 \quad C = -3 \quad D = -1 \quad E = 5$$

Con estos valores se tiene de (3)

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$ ◂

Caso 3: Los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos y ninguno de los factores cuadráticos se repite.

Al factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ del denominador le corresponde la fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

▸ EJEMPLO 3 *Descomposición de una fracción en fracciones parciales cuando los factores del denominador son lineales y cuadráticos y ninguno se repite*

Descomponga la fracción

$$\frac{x^2 - x - 5}{x^3 + x^2 - 2}$$

en fracciones parciales.

Solución Se pretende factorizar el denominador utilizándose división sintética para dividir $x^3 + x^2 - 2$ entre expresiones lineales de la forma $x - r$, donde r es un factor entero de -2. La división entre $x - 1$ es como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Por tanto $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$. La fracción dada se escribe como una suma de fracciones parciales de la manera siguiente:

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} \tag{5}$$

Al multiplicar los dos miembros por el MCDn, se obtiene

$$x^2 - x - 5 = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2) \tag{6}$$

Se calcula C sustituyendo 1 por x en (6), de modo que

$$-5 = 5C \Leftrightarrow C = -1$$

Si se reemplaza C por -1 en (6) y se multiplican los factores del miembro derecho se obtiene

$$x^2 - x - 5 = (A - 1)x^2 + (B - A - 2)x + (-B - 2)$$

Al igualar los coeficientes de potencias semejantes de x se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A - 1 = 1 \\ B - A - 2 = -1 \\ -B - 2 = -5 \end{cases}$$

Por tanto,

$$A = 2 \qquad B = 3$$

Al sustituir los valores de A, B y C en (5) se obtiene

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{x - 1}$$ ◀

Caso 4: Los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos, y algunos de los factores cuadráticos se repiten.

Si $ax^2 + bx + c$ es un factor cuadrático p-múltiple de $Q(x)$, entonces en correspondencia con este factor $(ax^2 + bx + c)^p$, se tiene la suma siguiente de las p fracciones parciales:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^p}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Si el denominador contiene el factor $(x^2 - 5x + 2)^3$, se tiene, en correspondencia con este factor, la suma de las fracciones parciales

$$\frac{Ax + B}{x^2 - 5x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 5x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 - 5x + 2)^3}$$ ◀

▸ EJEMPLO 4 *Descomposición de una fracción en fracciones parciales cuando los factores del denominador son lineales y cuadráticos y algún factor cuadrático se repite*

Descomponga la fracción

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2}$$

en fracciones parciales.

Solución La fracción dada se escribe como una suma de fracciones parciales como sigue:

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 3x - 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 3x - 2)^2} + \frac{E}{x} \quad (7)$$

Al multiplicar ambos miembros por el MCDn se tiene

$$3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4 = x(Ax + B)(x^2 - 3x - 2) + x(Cx + D) + E(x^2 - 3x - 2)^2 \quad (8)$$

Si se sustituye 0 por x en esta ecuación, se obtiene

$$4 = 4E \Leftrightarrow E = 1$$

Con $E = 1$ en (8) y al multiplicar los polinomios, se consigue

$$\begin{aligned} &3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4 \\ &= Ax^4 - 3Ax^3 - 2Ax^2 + Bx^3 - 3Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Dx + x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 4x^2 + 12x \\ &= (A + 1)x^4 + (-3A + B - 6)x^3 + (-2A - 3B + C + 5)x^2 + (-2B + D + 12)x + 4 \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias semejantes de x se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A + 1 = 3 \\ -3A + B - 6 = -12 \\ -2A - 3B + C + 5 = 4 \\ -2B + D + 12 = 11 \end{cases}$$

Se resuelve este sistema para obtener

$$A = 2 \quad B = 0 \quad C = 3 \quad D = -1 \quad E = 1$$

Si se sustituyen estos valores en la (7) se obtiene

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{2x}{x^2 - 3x - 2} + \frac{3x - 1}{(x^2 - 3x - 2)^2} + \frac{1}{x}$$

Observe que en cada uno de los ejemplos, el número de constantes a determinar es igual al grado del denominador de la fracción original que se descompone en fracciones parciales. Este hecho siempre ocurre.

EJERCICIOS 12.3

En los ejercicios 1 a 10, descomponga la fracción en fracciones parciales.

1. $\dfrac{12}{x^2 - 4}$

2. $\dfrac{1}{2x^2 - x}$

3. $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

4. $\dfrac{x + 15}{x^2 - 9}$

5. $\dfrac{x + 5}{x^2 - 4x + 3}$

6. $\dfrac{3x}{x^2 + x - 2}$

7. $\dfrac{x + 12}{3x^2 - 5x - 2}$

8. $\dfrac{3x - 7}{4x^2 + 3x - 1}$

9. $\dfrac{3x^2 + 3x - 12}{6x^3 + 5x^2 - 6x}$

10. $\dfrac{2x^2 - 11x - 9}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

En los ejercicios 11 a 14, exprese la fracción impropia como la suma de un polinomio y fracciones parciales.

11. $\dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - 4}$

12. $\dfrac{x^3 + 5}{x^2 - 1}$

13. $\dfrac{4x^3 - 8x^2 - 10x + 30}{2x^2 + x - 6}$

14. $\dfrac{6x^3 + x^2 - 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$

En los ejercicios 15 a 38, descomponga la fracción en fracciones parciales.

15. $\dfrac{3x^2 + 13x - 10}{x^3 - 2x^2}$

16. $\dfrac{x^3 + x + 1}{x^4 - x^3}$

17. $\dfrac{x^2 - 11x + 6}{(x + 2)(x^2 - 4x + 4)}$

18. $\dfrac{x^2 + 11}{(x - 5)(x^2 + 2x + 1)}$

19. $\dfrac{3x + 15}{(2x^2 - x - 1)^2}$

20. $\dfrac{9x^3 - 8x^2 - 4x + 48}{(x^2 - 4)^2}$

21. $\dfrac{x^3 + 6x - 4}{(x - 2)^3}$

22. $\dfrac{x^2 + 2}{(x - 3)^3}$

23. $\dfrac{3x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x}$

24. $\dfrac{3x + 8}{x^3 + 4x}$

25. $\dfrac{3x^2 + 2x - 4}{x^3 - 8}$

26. $\dfrac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + 1}$

27. $\dfrac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

28. $\dfrac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$

29. $\dfrac{11x^2 + 11x + 8}{2x^3 + 8x^2 + 3x + 12}$

30. $\dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^3 + x^2 + x}$

31. $\dfrac{3x^2 - 4x}{(x^2 + 1)(x^2 - x - 1)}$

32. $\dfrac{4x - 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$

33. $\dfrac{x + 6}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$

34. $\dfrac{3x^4 + 4}{x^4 + 4x^2 + 4}$

35. $\dfrac{x^3 - x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$

36. $\dfrac{x^4 + 2x^2 - 2x - 4}{(x^2 + 3)^3}$

37. $\dfrac{x^4 + x^3 - 5x^2 - 14x - 1}{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4}$

38. $\dfrac{11x - 28}{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2}$

12.4 SUCESIONES, SERIES Y NOTACIÓN SIGMA

OBJETIVOS

1. **Definir una función de sucesión finita.**
2. **Definir una función de sucesión infinita.**
3. **Escribir los elementos de una sucesión cuando se conoce el elemento general.**
4. **Aprender la notación sigma.**
5. **Escribir una suma con notación sigma.**
6. **Escribir una serie con notación sigma.**

En matemáticas se presentan con frecuencia las sucesiones de números. Por ejemplo, los números

$$2, 4, 6, 8, 10$$

forman una sucesión. Se dice que esta sucesión es *finita* porque existe un número final. Si un conjunto de números que forma una sucesión no tiene número final, se dice que la sucesión es *infinita*. Por ejemplo

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots$$

es una sucesión infinita porque los tres puntos indican que no existe un número final.

Antes de definir una sucesión, se define una **función de sucesión** como una función cuyo dominio es un subconjunto de los enteros positivos. Una **función de sucesión finita** es aquella cuyo dominio es el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ de los primeros n enteros positivos. Una **función de sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los enteros positivos. Los números del contradominio de una función de sucesión se llaman **elementos.** Una **sucesión** consiste de los elementos de una función de sucesión listados en orden.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea f la función definida por

$$f(n) = 2n \qquad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Entonces f es una función de sucesión finita, y

$$f(1) = 2 \quad f(2) = 4 \quad f(3) = 6 \quad f(4) = 8 \quad f(5) = 10$$

Por tanto, los elementos de la sucesión definida por f son 2, 4, 6, 8 y 10, y la sucesión es

$$2, 4, 6, 8, 10$$

Los pares ordenados de f son (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8) y (5, 10). La gráfica de f, mostrada en la Figura 12.4, consta de los cinco puntos cuyas coordenadas son los pares ordenados de f. ◀

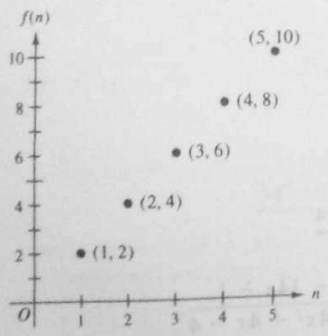


FIGURA 12.4

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Sea h la función definida por

$$h(n) = \frac{2n - 1}{n^2} \qquad n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

La función h es una función de sucesión infinita. Los elementos de h son

$$h(1) = \tfrac{1}{1} \qquad h(2) = \tfrac{3}{4} \qquad h(3) = \tfrac{5}{9} \qquad h(4) = \tfrac{7}{16}$$

y así sucesivamente. Por tanto, la sucesión definida por h es

$$1, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{9}, \tfrac{7}{16}, \ldots$$

Algunos de los pares ordenados de h son $(1, 1)$, $(2, \frac{3}{4})$, $(3, \frac{5}{9})$, $(4, \frac{7}{16})$ y $(5, \frac{9}{25})$. ◀

Se denota el primer elemento de una sucesión por a_1, el segundo elemento por a_2, el tercer elemento por a_3 y así sucesivamente. El n-ésimo elemento es a_n, y se denomina **elemento general** de la sucesión.

Para la sucesión del ejemplo ilustrativo 1, $a_n = f(n)$; esto es, $a_n = 2n$. Por tanto, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ y $a_5 = 10$. Para la sucesión del ejemplo ilustrativo 2, $a_n = h(n)$; esto es,

$$a_n = \frac{2n - 1}{n^2}$$

De donde, $a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{5}{9}$ y así sucesivamente. Con frecuencia el elemento general de una sucesión se indica cuando se listan los elementos en orden. De modo que los elementos de la sucesión del ejemplo ilustrativo 2, se escribiría

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \ldots, \frac{2n - 1}{n^2}, \ldots$$

Se dice que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es **igual** a una sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

si y sólo si $a_i = b_i$ para cada entero positivo i. Recuerde que una sucesión consiste de un ordenamiento de los elementos de una función de sucesión. Por tanto, es posible que dos sucesiones tengan los mismos elementos y sean diferentes. Esta situación se presenta en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La sucesión en la que $a_n = \frac{1}{n}$, tiene como sus elementos a los recíprocos de los enteros positivos:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \tag{1}$$

La sucesión en la que

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{2}{n+2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

tiene como elementos

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \tfrac{1}{2} \quad a_3 = 1 \quad a_4 = \tfrac{1}{3} \quad a_5 = 1 \quad a_6 = \tfrac{1}{4}$$

y así sucesivamente. La sucesión es

$$1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{4}, \ldots \tag{2}$$

Los elementos de las sucesiones

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \quad \text{y} \quad 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots$$

son los mismos, sin embargo, las sucesiones no son iguales. Las gráficas de las funciones de sucesión para las sucesiones (1) y (2) se muestran en las figuras 12.5 y 12.6, respectivamente. ◂

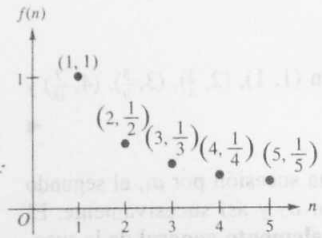


FIGURA 12.5

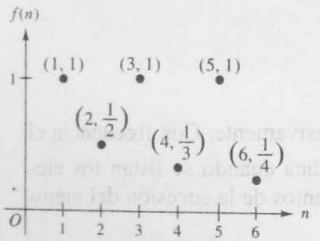


FIGURA 12.6

Debe advertirse que el hecho de conocer varios elementos de una sucesión no determina un elemento general único, según se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) La sucesión en la que $a_n = 2n$ es

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$$

(b) La sucesión para la cual

$$a_n = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2a_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

es

$$2, 4, 6, 12, 10, 20, \ldots, a_n, \ldots$$

(c) La sucesión en la que $a_n = 2n + (n-1)(n-2)(n-3)$ es

$$2, 4, 6, 14, 34, 72, \ldots, 2n + (n-1)(n-2)(n-3), \ldots$$

◂

Observe que las tres sucesiones del ejemplo ilustrativo 4 tienen 2, 4 y 6 como sus primeros tres elementos, pero cada sucesión, y su elemento general, es diferente. A fin de determinar una sucesión única, se debe tener un método para obtener cualquier elemento. Una manera es encontrar una ecuación que defina al elemento general, pero esto no siempre es posible. Por ejemplo, la sucesión de números primos puede escribirse como

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots a_n, \ldots$$

donde a_n es el n-ésimo número primo. No se puede escribir una ecuación que defina a_n. Sin embargo, a_n puede determinarse (teóricamente) para cada entero positivo n.

▸ EJEMPLO 1 *Escribir elementos de una sucesión cuando se conoce el elemento general*

Escriba los primeros cinco elementos de la sucesión para cada uno de los siguientes elementos generales.

(a) $a_n = \dfrac{n+2}{n(n+1)}$ **(b)** $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{3^{n-1}}$ **(c)** $a_n = (-1)^{n-1} x^{2n+1}$

Solución

(a) $a_1 = \dfrac{3}{1 \cdot 2} = \dfrac{3}{2}$ $a_2 = \dfrac{4}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$ $a_3 = \dfrac{5}{3 \cdot 4} = \dfrac{5}{12}$ $a_4 = \dfrac{6}{4 \cdot 5} = \dfrac{3}{10}$ $a_5 = \dfrac{7}{5 \cdot 6} = \dfrac{7}{30}$

De donde los primeros cinco elementos son

$$\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{12}, \frac{3}{10}, \frac{7}{30}$$

(b) $a_1 = (-1)^1 \dfrac{1}{3^0}$ $a_2 = (-1)^2 \dfrac{1}{3^1}$ $a_3 = (-1)^3 \dfrac{1}{3^2}$

$a_4 = (-1)^4 \dfrac{1}{3^3}$ $a_5 = (-1)^5 \dfrac{1}{3^4}$

Por tanto, los primeros cinco elementos son

$$-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}$$

(c) $a_1 = (-1)^0 x^3$; $a_2 = (-1)^1 x^5$; $a_3 = (-1)^2 x^7$; $a_4 = (-1)^3 x^9$; $a_5 = (-1)^4 x^{11}$.

De modo que los primeros cinco elementos son

$$x^3, -x^5, x^7, -x^9, x^{11}$$

◀

▶ EJEMPLO 2 *Escribir elementos de una sucesión cuando se conoce el elemento general*

Escriba los primeros doce elementos de la sucesión para la cual

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ n & \text{si } n \text{ es par y no es divisible entre 4} \\ \frac{1}{2}(n + a_{n-2}) & \text{si } n \text{ es par y divisible entre 4} \end{cases}$$

Solución $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = \frac{1}{2}(4 + 2)$; $a_5 = 5$; $a_6 = 6$; $a_7 = 7$; $a_8 = \frac{1}{2}(8 + 6)$; $a_9 = 9$; $a_{10} = 10$; $a_{11} = 11$; $a_{12} = \frac{1}{2}(12 + 10)$. Por tanto, los primeros doce elementos son

$$1, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 7, 9, 10, 11, 11$$

◀

Se introduce la **notación sigma** para facilitar la escritura de la suma de los elementos de una sucesión. Esta notación implica el uso del símbolo Σ, la letra sigma mayúscula del alfabeto griego, la cual corresponde a la letra *S*. El símbolo i, denominado **índice de sumatoria,** también está implicado. Antes de establecer la definición formal de la notación sigma, se presentan algunos ejemplos de ella en el siguiente ejemplo ilustrativo.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

Observe que $i = 1$ aparece bajo el símbolo sigma. Esto indica que el primer término del miembro derecho es el valor de i^2 cuando $i = 1$. Los siguientes cuatro términos son los valores de i^2 cuando i es igual a 2, 3, 4 y 5. Se termina en 5 porque el número 5 está sobre el símbolo sigma.

(b) $$\sum_{i=-2}^{3} (4i + 1) = [4(-2) + 1] + [4(-1) + 1] + [4(0) + 1] + [4(1) + 1] + [4(2) + 1] + [4(3) + 1]$$
$$= (-7) + (-3) + 1 + 5 + 9 + 13$$

Note que $i = -2$ aparece debajo del símbolo sigma y el 3 encima del mismo. Por tanto, el primer término del miembro derecho es el valor de $4i + 1$ cuando $i = -2$, y los términos restantes son los valores de $4i + 1$ cuando i es igual a -1, 0, 1, 2 y 3.

(c) $\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$

(d) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ ◀

La notación sigma puede definirse por la ecuación

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \ldots + F(n)$$

donde m y n son enteros y $m \leq n$. El miembro derecho de esta ecuación consta de la suma de $n - m + 1$ términos, el primero de los cuales se obtiene al sustituir i por m en $F(i)$, el segundo al reemplazar i por $m + 1$ en $F(i)$, y así sucesivamente, hasta que se obtiene el último término sustituyendo 1 por n en $F(i)$. El número m se denomina **límite inferior** de la suma y n se llama **límite superior.** El símbolo i es un símbolo "convencional" porque cualquier otro símbolo puede emplearse sin cambiar el miembro derecho. Por ejemplo,

$$\sum_{i=4}^{6} i^3 = 4^3 + 5^3 + 6^3$$

puede escribirse también como

$$\sum_{j=4}^{6} j^3 = 4^3 + 5^3 + 6^3$$

En ocasiones, los términos de una suma contienen subíndices. Por ejemplo, la suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

puede escribirse con notación sigma como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

▶ EJEMPLO 3 *Escribir una suma con notación sigma*

Escriba las sumas siguientes con notación sigma:

(a) $2 + 4 + 6 + 8$

(b) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

(c) $-3a_3 + 4a_4 - 5a_5 + 6a_6 - 7a_7 + 8a_8$

(d) $x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + x^{10} - x^{12} + x^{14}$

Solución

(a) Los números 2, 4, 6 y 8 son los primeros cuatro enteros positivos pares, y pueden escribirse como $2i$ donde i es igual a 1, 2, 3 y 4. Por tanto,

$$2 + 4 + 6 + 8 = \sum_{i=1}^{4} 2i$$

(b) Observe que 1, 3, 5, 7 y 9 son los primeros cinco enteros positivos impares, y pueden escribirse como $2i - 1$, donde i es igual a 1, 2, 3, 4 y 5. De modo que

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{i=1}^{5} (2i - 1)$$

(c) Note que en la suma indicada los términos impares están precedidos por un signo negativo y los términos pares por un signo positivo. De modo que los términos impares contienen una potencia impar de -1 y los términos pares contienen una potencia par de -1. Estos requisitos se satisfacen al escribir el factor $(-1)^i$ en la notación sigma. En consecuencia se tiene

$$-3a_3 + 4a_4 - 5a_5 + 6a_6 - 7a_7 + 8a_8 = \sum_{i=3}^{8} (-1)^i ia_i$$

(d) En la suma indicada los términos impares están precedidos por un signo positivo y los términos pares están precedidos por un signo negativo. Por tanto, los términos impares requieren una potencia par de -1 y los términos pares requieren una potencia impar de -1; de modo que se escribe el factor $(-1)^{i-1}$ en la notación sigma. Por tanto,

$$x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + x^{10} - x^{12} + x^{14} = \sum_{i=1}^{7} (-1)^{i-1} x^{2i}$$ ◀

Observe que existe un número ilimitado de maneras de escribir una suma con la notación sigma. Así, en el ejemplo 3, la suma del inciso (b) puede también escribirse como

$$\sum_{i=2}^{6} (2i - 3) \qquad \sum_{i=0}^{4} (2i + 1) \qquad \sum_{i=3}^{7} (2i - 5)$$

y así sucesivamente.

La suma de los elementos de una sucesión es una **serie.** Por ejemplo, asociada con la sucesión 3, 6, 9, 12, 15, 18 se tiene la serie

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = \sum_{i=1}^{6} 3i$$

Asociada con la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

está la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Los términos de una serie son los mismos que los elementos correspondientes de la sucesión asociada. El **término general** de una serie es el elemento general de la sucesión asociada.

▸ EJEMPLO 4 *Escribir una serie con notación sigma*

Escriba las series siguientes con notación sigma:

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ **(b)** $-1 + 5 - 9 + 13 - 17$

(c) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + \frac{1}{27}x^7 - \frac{1}{81}x^9$

Solución

(a) El primer término puede escribirse como $\frac{1}{1}$. Así, cada término es una fracción cuyo numerador es 1 y su denominador es el número del término. Por tanto,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$$

(b) Excepto para el primer término, cada uno de los números 1, 5, 9, 13 y 17 es el anterior más cuatro. Esto sugiere $4i$ en la notación sigma. Como el primer término es 1, se necesita escribir $4i - 3$ para obtener 1 cuando $i = 1$. Entonces observe que $4i - 3 = 5$ cuando $i = 2$, $4i - 3 = 9$ cuando $i = 3$, y así sucesivamente. Puesto que los términos impares en la serie dada están precedidos por un signo negativo y los términos pares son precedidos por un signo positivo, se necesita un factor $(-1)^i$. De modo que se tiene

$$-1 + 5 - 9 + 13 - 17 = \sum_{i=1}^{5} (-1)^i(4i - 3)$$

(c) Los exponentes de x son los enteros impares 3, 5, 7 y 9, los cuales se pueden escribir como $2i + 1$, cuando i es igual a 1, 2, 3 y 4. De modo que en la notación sigma se debe tener un factor x^{2i+1}. Como los coeficientes numéricos son los recíprocos de las potencias sucesivas de 3, se necesita un factor $\frac{1}{3^i}$. Además, como los términos impares son precedidos por un signo positivo y los tér-

minos pares están precedidos por un signo negativo, también se necesita un factor $(-1)^{i-1}$. En consecuencia, se tiene

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + \frac{1}{27}x^7 - \frac{1}{81}x^9 = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i-1}\frac{1}{3^i}x^{2i+1}$$

EJERCICIOS 12.4

En los ejercicios 1 a 16, escriba los primeros ocho elementos de la sucesión cuyo elemento general se indica.

1. $a_n = 2n + 3$

2. $a_n = -\dfrac{3n - 1}{2}$

3. $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{n}$

4. $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 2}$

5. $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n + 1}{2n - 1}$

6. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^n}$

7. $a_n = (-1)^n\dfrac{2^n}{1 + 2^n}$

8. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n + 1)}$

9. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + 2}x^n$

10. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}x^{2n-1}$

11. $a_n = n + (-1)^n n$

12. $a_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3n}$

13. $a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n + 1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

14. $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{4}{(n + 2)^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

15. $a_n = \begin{cases} \dfrac{n + 1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

16. $a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2}n & \text{si } n \text{ es par y no divisible entre 4} \\ \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}) & \text{si } n \text{ es par y divisible entre 4} \end{cases}$

En los ejercicios 17 a 30, escriba las series. En los ejercicios 17 a 24, encuentre la suma de las series.

17. $\sum_{i=1}^{5} (4i - 3)$

18. $\sum_{i=1}^{7} (i + 1)^2$

19. $\sum_{j=2}^{6} \dfrac{j}{j - 1}$

20. $\sum_{k=1}^{4} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

21. $\sum_{i=1}^{100} 5$

22. $\sum_{i=1}^{8} \dfrac{3i - 6}{2}$

23. $\sum_{k=0}^{5} \dfrac{1}{2^k}$

24. $\sum_{j=0}^{3} \dfrac{(-1)^j}{2^j + 1}$

25. $\sum_{i=1}^{8} (-1)^{i-1}x^{2i-1}$

26. $\sum_{i=1}^{5} 2^i x^{3i}$

27. $\sum_{i=0}^{7} (-1)^i(i + 1)a_i$

28. $\sum_{i=0}^{6} a_i x^{2i+1}$

29. $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$

30. $\sum_{i=0}^{n} f(x_{i+1})h$

En los ejercicios 31 a 38, escriba la serie con notación sigma (hay varias soluciones).

31. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

32. $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

33. $4 - 7 + 10 - 13 + 16$

34. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$

35. $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \frac{11}{36}$

36. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64}$

37. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^6}{8} + \dfrac{x^8}{10}$

38. $x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^7 + \frac{1}{5}x^9$

39. Escriba el elemento general y los primeros seis términos de tres diferentes sucesiones, las cuales tengan como sus primeros tres elementos a 1, 3 y 5.

40. Escriba el elemento general de una sucesión cuyos primeros tres elementos sean 2, 4 y 6, y su cuarto elemento sea x, donde x puede ser cualquier número real.

41. Explique por qué dos sucesiones que tienen los mismos elementos no necesariamente son iguales.

42. Explique la diferencia entre una sucesión y una serie.

12.5 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

OBJETIVOS

1. **Establecer el principio de inducción matemática.**
2. **Demostrar una fórmula mediante inducción matemática.**
3. **Demostrar una desigualdad mediante inducción matemática.**
4. **Demostrar un enunciado mediante inducción matemática.**
5. **Demostrar un teorema mediante inducción matemática.**

Al matemático italiano **Francesco Maurolycus** (1494-1575) se le acredita con frecuencia la introducción de la **inducción matemática** como un método de demostración. Él lo empleó en su *Aritmética* de 1575 para probar que la suma de los primeros n enteros positivos es n^2, esto es,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

A continuación se verifica esta fórmula para algunos valores de n.

$n = 1$: $\quad 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1^2$

$n = 2$: $\quad 1 + 3 = 4 \Leftrightarrow 1 + 3 = 2^2$

$n = 3$: $\quad 1 + 3 + 5 = 9 \Leftrightarrow 1 + 3 + 5 = 3^2$

$n = 4$: $\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

$n = 5$: $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$

De estos cálculos puede percatarse que la fórmula es verdadera para los valores de n de 1 a 5. Se podría continuar con más valores de n y se observaría que la fórmula también es verdadera. Por supuesto, este procedimiento *no es una demostración* de que la fórmula es verdadera para todos los valores enteros positivos de n. La técnica de inducción matemática nos proporciona una demostración de este hecho. Enseguida se establece el *principio de inducción matemática* que provee las bases para este método de demostración, el cual se presenta en el ejemplo ilustrativo 1.

Principio de inducción matemática

Un enunciado P_n, que se refiere al entero positivo n, es válido para todos los valores enteros positivos de n si se satisfacen las dos siguientes condiciones:

(i) P_1 es verdadera; esto es, el enunciado es verdadero para $n = 1$.

(ii) Si k es un entero positivo arbitrario para el cual P_k es verdadera, entonces P_{k+1} también es verdadera; esto es, siempre que el enunciado es verdadero para $n = k$, también es verdadero para $n = k + 1$, donde k es un entero positivo arbitrario.

No se demostrará el principio de inducción matemática. Su empleo implica el siguiente razonamiento:

De (i) el enunciado P_n es verdadero para $n = 1$. Como P_n es verdadero para $n = 1$, se deduce de (ii) que P_n es verdadero para $n = 1 + 1$, o 2. Puesto que P_n es verdadero para $n = 2$, es verdadero para $n = 2 + 1$, o 3. Ya que P_n es verdadero para $n = 3$, es verdadero para $n = 3 + 1$, o 4; y así sucesivamente. De modo que P_n es verdadero para todos los valores enteros positivos de n.

Una demostración por inducción matemática consta de dos partes que verifican las dos condiciones del principio de inducción matemática. Se completa la demostración escribiendo una conclusión.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Se empleará inducción matemática a fin de demostrar que

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

para todos los valores enteros positivos de n.

Parte 1: Primero se verifica que la fórmula sea verdadera para $n = 1$. Si $n = 1$, la fórmula se convierte en

$$1 = 1^2$$

lo cual es verdad.

Parte 2: Ahora se mostrará que si la fórmula es verdadera para $n = k$, entonces también es verdadera para $n = k + 1$, donde k es un entero positivo arbitrario. Esto es, se supondrá que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \qquad (1)$$

Lo que se desea demostrar es que si la Ecuación (1) es verdadera, entonces

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2 \qquad (2)$$

también es verdadera. El último término del miembro izquierdo de la Ecuación (2) se puede escribir como $2k + 1$. Al sumar $2(k + 1) - 1$ al miembro izquierdo de la Ecuación (1) y su equivalente $2k + 1$ al miembro derecho, se obtiene

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = k^2 + (2k + 1)$$
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

la cual es la Ecuación (2).

Conclusión: En la parte 1 se probó que la fórmula es verdadera para $n = 1$. En la parte 2 se demostró que cuando la fórmula es verdadera para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, la fórmula es válida para todos los valores enteros positivos de n. ◂

En el ejemplo siguiente, se demuestra que la suma de los primeros n enteros positivos pares está dada por la fórmula

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$$

▸ EJEMPLO 1 *Demostración de una fórmula mediante inducción matemática*

Utilice inducción matemática para demostrar

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n + 1)$$

Solución

Parte 1: Primero se verifica la fórmula para $n = 1$. Cuando $n = 1$, el miembro izquierdo es

$$\sum_{i=1}^{1} 2i = 2$$

y el miembro derecho es

$$1(1 + 1) = 2$$

Por tanto, la fórmula es verdadera para $n = 1$.

Parte 2: Se supondrá que la fórmula es verdadera cuando $n = k$, donde k es cualquier entero positivo:

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = k(k + 1) \tag{3}$$

Con esta suposición, se desea demostrar que también la fórmula es verdadera cuando $n = k + 1$. De modo que se desea probar

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2i = (k + 1)[(k + 1) + 1]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k+1} 2i = (k + 1)(k + 2) \tag{4}$$

Cuando $n = k + 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} 2i &= 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} 2i + (2k + 2) \\
&= k(k + 1) + (2k + 2) \qquad \text{[aplicando (3)]} \\
&= k^2 + k + 2k + 2 \\
&= k^2 + 3k + 2 \\
&= (k + 1)(k + 2)
\end{aligned}$$

la cual es (4).

Conclusión: Se ha probado que la fórmula es verdadera cuando $n = 1$; y también se probó que cuando la fórmula es verdadera para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, la fórmula es verdadera cuando n es cualquier entero positivo. ◀

En el ejemplo siguiente se demuestra la fórmula que proporciona la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos.

▶ EJEMPLO 2 *Demostración de una fórmula mediante inducción matemática*

Utilice inducción matemática para demostrar

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Solución

Parte 1: Primero se verifica la fórmula para $n = 1$. Con este valor de n, el miembro izquierdo es

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2$$
$$= 1$$

y el miembro derecho es

$$\frac{1(1 + 1)(2 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$
$$= 1$$

De modo que la fórmula es verdadera cuando $n = 1$.

Parte 2: Se supone que la fórmula es verdadera cuando $n = k$, donde k es cualquier entero positivo, o bien

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} \tag{5}$$

Bajo esta suposición se desea demostrar que la fórmula también es verdadera cuando $n = k + 1$; esto es, se desea demostrar

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6} \tag{6}$$

Cuando $n = k + 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad \text{[aplicando (5)]} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

la cual es (6).

Conclusión: Se ha probado que la fórmula es verdadera cuando $n = 1$; y también se probó que cuando la fórmula es verdadera para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, la fórmula es verdadera cuando n es cualquier entero positivo. ◀

▶ EJEMPLO 3 *Demostración de una desigualdad mediante inducción matemática*

Emplee inducción matemática a fin de probar que

$$2^n \geq 2n$$

para todos los valores enteros positivos de n.

Solución

Parte 1: Se verifica la desigualdad para $n = 1$. Cuando $n = 1$ el miembro izquierdo es 2 y el miembro derecho también es 2. Como $2 \geq 2$, la desigualdad es verdadera cuando $n = 1$.

Parte 2: Se supone que la desigualdad es verdadera cuando $n = k$, donde k es cualquier entero positivo; esto es, se supone que

$$2^k \geq 2k \tag{7}$$

Con esta suposición se desea probar que la desigualdad es verdadera cuando $n = k + 1$; esto es, se desea demostrar

$$2^{k+1} \geq 2(k + 1) \tag{8}$$

En ambos miembros de (7) se multiplica por 2 y se obtiene

$$2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot 2k$$

$$2^{k+1} \geq 2k + 2k \tag{9}$$

Como $k \geq 1$, entonces $2k \geq 2$. De modo que

$$2k + 2k \geq 2k + 2 \tag{10}$$

De (9) y (10) se obtiene

$$2^{k+1} \geq 2k + 2$$

$$2^{k+1} \geq 2(k + 1)$$

la cual es (8).

Conclusión: Como la desigualdad es verdadera cuando $n = 1$, y se ha probado que cuando es verdadera para $n = k$, también es verdadera para $n = k + 1$, se infiere, por el principio de inducción matemática, que la desigualdad es verdadera cuando n es cualquier entero positivo. ◂

En el ejemplo 3 se ha probado que la desigualdad no estricta

$$2^n \geq 2n$$

es válida para todos los valores enteros positivos de n. Mediante un procedimiento semejante, como se indica en el ejemplo ilustrativo siguiente, se puede demostrar la desigualdad estricta correspondiente

$$2^n > 2n \qquad \text{cuando } n > 2 \tag{11}$$

y n es cualquier entero positivo. Como 3 es el menor valor de n para el cual la desigualdad es verdadera, la parte 1 de la prueba mediante inducción matemática consiste en verificar que P_3 (en vez de P_1) es verdadera. En este caso, se aplica una extensión del principio de inducción matemática.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Para probar la Ecuación (11) mediante inducción matemática, la parte 1 es como sigue:

Se verifica (11) para $n = 3$. Cuando $n = 3$, el miembro izquierdo de la desigualdad es 8 y el miembro derecho es 6. Puesto que $8 > 6$, la desigualdad de (11) es verdadera cuando $n = 3$.

La parte 2 de la prueba de (11) es la misma que la parte 2 en la solución del ejemplo 3, excepto que el símbolo de desigualdad $\geq$ se reemplaza por $>$.

Entonces, la conclusión establece que como la desigualdad es verdadera cuando $n = 3$, y en la parte 2 se probó que cuando es verdadera

para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$, se deduce del principio de inducción matemática que la desigualdad de (11) es verdadera cuando n es un entero positivo y $n > 2$. ◀

▶ **EJEMPLO 4** ***Demostración de un enunciado mediante inducción matemática***

Pruebe el siguiente enunciado mediante inducción matemática: $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todos los valores enteros positivos de n.

Solución

Parte 1: Cuando $n = 1$, $x^n - y^n$ se transforma en $x - y$, lo cual ciertamente tiene a $x - y$ como un factor.

Parte 2: Se supone que $x - y$ es un factor de $x^k - y^k$, donde k es cualquier entero positivo; y bajo esta suposición se desea probar que $x - y$ también es un factor de $x^{k+1} - y^{k+1}$. Si se resta y suma xy^k a $x^{k+1} - y^{k+1}$, se tiene

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{k+1} - y^{k+1} = x(x^k - y^k) + y^k(x - y) \tag{12}$$

Se ha supuesto que $x - y$ es factor de $x^k - y^k$; además, $x - y$ es un factor de $y^k(x - y)$. Por tanto $x - y$ es un factor de los dos términos en el miembro derecho de (12). En consecuencia, $x - y$ es factor de $x^{k+1} - y^{k+1}$.

Conclusión: Se ha mostrado que el enunciado es verdadero cuando $n = 1$; y se probó que cuando el enunciado es verdadero para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, el enunciado es verdadero para todos los valores enteros positivos de n. ◀

Ciertos teoremas se refieren a leyes de exponentes que pueden probarse mediante inducción matemática. En el ejemplo 5 se presenta una demostración, la cual emplea la siguiente definición de exponentes enteros positivos:

Sea a cualquier número real. Entonces

$$a^1 = a \tag{13}$$

Si k es cualquier entero positivo tal que a^k está definido, sea

$$a^{k+1} = a^k \cdot a \tag{14}$$

▶ **EJEMPLO 5** ***Demostración de un teorema mediante inducción matemática***

Demuestre que si m y n son enteros positivos y a es un número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{15}$$

Solución Sea m un entero positivo arbitrario. Se desea demostrar que la Ecuación (15) es verdadera para todos los valores enteros positivos de n.

Parte 1: Se verifica que (15) es verdadera cuando $n = 1$. De (13)

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a$$

Al aplicar la Ecuación (14) en el miembro derecho de esta ecuación, se tiene

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$$

En consecuencia, (15) es verdadera cuando $n = 1$.

Parte 2: Se supone que (15) es verdadera cuando $n = k$, donde k es cualquier entero positivo:

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k} \tag{16}$$

Con esta suposición se desea demostrar que

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+(k+1)}$$

A fin de probar esto, se inicia con el miembro izquierdo y se sustituye a^{k+1} por $a^k \cdot a$, lo cual se infiere de (14). Así,

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{k+1} &= a^m \cdot (a^k \cdot a) \\ &= (a^m \cdot a^k) \cdot a && \text{(de la ley asociativa para la multiplicación)} \\ &= a^{m+k} \cdot a && \text{[de (16)]} \\ &= a^{(m+k)+1} && \text{[de (14)]} \\ &= a^{m+(k+1)} && \text{(de la ley asociativa para la adición)} \end{aligned}$$

lo cual es lo que se deseaba demostrar.

Conclusión: De la parte 1 se sabe que la Ecuación (15) es verdadera cuando $n = 1$. De la parte 2 se sabe que cuando (15) es verdadera para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$, donde k es cualquier entero positivo. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, la (15) es verdadera cuando n es cualquier entero positivo. ◀

Como se prometió en la Sección 10.6, ahora se demostrará el Teorema 1 de esa sección mediante inducción matemática.

▶ EJEMPLO 6 *Demostración de un teorema mediante inducción matemática*

Demuestre mediante inducción matemática el teorema de De Moivre para enteros positivos: si n es cualquier entero positivo, entonces

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Solución

Parte 1: Cuando $n = 1$ ambos miembros se convierten en $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$; de modo que el teorema es válido para $n = 1$.

Parte 2: Se supone que el teorema es verdadero para $n = k$, donde k es cualquier entero positivo; esto es, se supone que

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \quad (17)$$

Se desea mostrar que el teorema es verdadero para $n = k + 1$; esto es, se desea probar que

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k + 1)\theta + i \operatorname{sen}(k + 1)\theta] \quad (18)$$

Se tiene

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{k+1} = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)][r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^k$$

Al sustituir de (17) en el miembro derecho de esta ecuación, se obtiene

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{k+1} = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)][r^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)]$$

En el miembro derecho de esta ecuación se aplica el Teorema 1(i) de la Sección 10.5, y se consigue

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{k+1} = r^{k+1}[\cos(\theta + k\theta) + i \operatorname{sen}(\theta + k\theta)]$$

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k + 1)\theta + i \operatorname{sen}(k + 1)\theta]$$

la cual es (18).

Conclusión: De la parte 1 se sabe que el teorema es verdadero cuando $n = 1$. De la parte 2, se sabe que cuando el teorema es verdadero para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$, donde k es cualquier entero positivo. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, el teorema es verdadero cuando n es cualquier entero positivo. ◀

EJERCICIOS 12.5

En los ejercicios 1 a 33, demuestre la fórmula, la desigualdad, el enunciado o el teorema mediante inducción matemática. No olvide completar la demostración escribiendo una conclusión.

En los ejercicios 1 a 14, demuestre que la fórmula es verdadera para todos los valores enteros positivos de n.

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} 4i = 2n(n+1)$

3. $\sum_{i=1}^{n} (3i - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

4. $\sum_{i=1}^{n} (3i - 1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$

5. $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{i(i+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

6. $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

7. $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2(2^n - 1)$

8. $\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

9. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

10. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

11. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

12. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

13. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$

14. $\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a - ar^n}{1-r}, \; r \neq 1$

En los ejercicios 15 a 18, demuestre que la desigualdad es verdadera para todos los valores enteros positivos de n.

15. $3^n \geq 3n$ **16.** $2^n > n$

17. $a^n > 1$ si a es un número real y $a > 1$.

18. $0 < a^n < 1$ si a es un número real y $0 < a < 1$.

En los ejercicios 19 y 20, demuestre que la desigualdad es verdadera para los valores enteros positivos indicados de n.

19. $2^n > n^2$ si $n > 4$

20. $3^n > 2^n + 10n$ si $n > 3$

En los ejercicios 21 a 26, demuestre que el enunciado es verdadero para todos los valores enteros positivos de n.

21. 2 es un factor de $n^2 + n$.

22. 2 es un factor de $n^2 - n + 2$.

23. 6 es un factor de $n^3 + 3n^2 + 2n$.

24. 3 es factor de $4^n - 1$.

25. $x + y$ es un factor de $x^{2n} - y^{2n}$.

26. $x + y$ es un factor de $x^{2n-1} + y^{2n-1}$.

En los ejercicios 27 y 28, demuestre que la fórmula es verdadera para todos los valores enteros positivos de n.

27. $\operatorname{sen}(x + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen} x$.

28. $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$.

En los ejercicios 29 a 33, demuestre el teorema.

29. Si m y n son enteros positivos y a es un número real, entonces

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

30. Si n es un entero positivo y a y b son números reales, entonces

$$(ab)^n = a^n b^n$$

31. Si n es un entero positivo, a y b son números reales, y $b \neq 0$, entonces

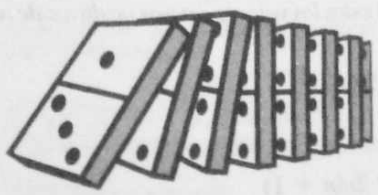
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

32. Si P dólares se invierten a una tasa de interés anual de $100i\%$ compuesto m veces por año, y si A_n dólares es el monto de la inversión al final de n periodos de interés, entonces

$$A_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$$

33. Si $n \geq 3$, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)180°$. *Sugerencia:* elija un vértice y forme $n-2$ triángulos al dibujar $n-3$ rectas desde el vértice elegido a cada uno de los otros $n-3$ vértices.

34. Explique por qué la idea detrás del principio de inducción matemática puede compararse con el siguiente concepto: suponga que un número infinito de fichas de dominó se arreglan en una línea sin fin y cuando una ficha de dominó cae, tira la siguiente de la línea; entonces, todas las fichas deben caer si se empuja la primera y tira a la segunda.



12.6 SUCESIONES Y SERIES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

OBJETIVOS

1. **Definir una sucesión aritmética.**
2. **Aprender y aplicar la fórmula para el *N*-ésimo elemento de una sucesión aritmética.**
3. **Definir y determinar los medios aritméticos entre dos números.**
4. **Definir y determinar la media aritmética de un conjunto de números.**
5. **Aprender y aplicar la fórmula para la suma de una serie aritmética.**
6. **Definir una sucesión geométrica.**
7. **Aprender y aplicar la fórmula para el *N*-ésimo elemento de una sucesión geométrica.**
8. **Definir y determinar los medios geométricos entre dos números.**
9. **Definir y determinar la media geométrica de un conjunto de números.**
10. **Aprender y aplicar la fórmula para la suma de una serie geométrica.**
11. **Resolver enunciados de problemas que tengan sucesiones y series aritméticas y geométricas como modelos matemáticos.**

Las *sucesiones aritméticas y geométricas* son dos tipos particulares de sucesiones que tienen muchas aplicaciones. Un ejemplo de una sucesión aritmética es

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

donde cada elemento, excepto el primero, es el anterior más tres. La sucesión

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

es un ejemplo de sucesión geométrica. Cada elemento, excepto el primero, puede obtenerse al multiplicar el elemento anterior por 2.

Primero se discutirán las sucesiones aritméticas.

DEFINICIÓN **Sucesión aritmética**

Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cualquier elemento, excepto el primero, puede obtenerse al sumar una constante al elemento anterior.

Una sucesión aritmética suele también denominarse **progresión aritmética.**

La constante sumada en una sucesión aritmética se llama **diferencia común** y se denota por d. Se puede comprobar si una sucesión dada es una sucesión aritmética al restar cada elemento del precedente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Para la sucesión

$$9, 5, 1, -3, -7, -11$$

observe que $5 - 9 = -4$; $1 - 5 = -4$; $-3 - 1 = -4$; $-7 - (-3) = -4$; y $-11 - (-7) = -4$. Por tanto, se tiene una sucesión aritmética en la que la diferencia común d es -4. ◂

En una sucesión aritmética el número de elementos se denota por N, el primer elemento se denota por a_1 y el último por a_N. En la sucesión del ejemplo ilustrativo 1, $N = 6$, $a_1 = 9$ y $a_6 = -11$.

La definición de una sucesión aritmética puede enunciarse simbólicamente al proporcionar el valor del primer elemento a_1, el número de elementos N y la fórmula

$$a_{n+1} = a_n + d$$

de la cual cada elemento, después del primero, puede obtenerse a partir del anterior. Esta fórmula recibe el nombre de **fórmula recursiva.** Las fórmulas recursivas se emplean en la programación de computadoras porque está implicada frecuentemente la aplicación repetida de una fórmula simple.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

Si $a_1 = 4$, $N = 8$, y

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

la sucesión aritmética es

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$$ ◂

A partir de la fórmula recursiva se puede escribir la sucesión aritmética general, para la cual el primer elemento es a_1, la diferencia común es d y el número de elementos es N. Se inicia con el elemento a_1, y cada elemento sucesivo se obtiene del anterior sumándole d. En consecuencia, se tiene

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \ldots, a_N$$

Observe en los primeros cinco elementos que cada elemento es a_1 más un múltiplo de d, donde el coeficiente de d es menor en uno que el número del elemento. Intuitivamente, es evidente que $a_N = a_1 +$

$(N - 1)d$. Se establecerá esto formalmente y se probará mediante inducción matemática.

TEOREMA 1

El N-ésimo elemento de una sucesión aritmética está determinado por

$$a_N = a_1 + (N - 1)d$$

Demostración

Parte 1: Se muestra que la fórmula es verdadera para $N = 1$ al sustituir 1 por N.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + (1 - 1)d \\ &= a_1 \end{aligned}$$

Parte 2: Ahora se supone que la fórmula es verdadera si $N = k$, esto es,

$$a_k = a_1 + (k - 1)d$$

Se desea mostrar que la fórmula es verdadera si $N = k + 1$, esto es,

$$a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1]d$$

Por la definición de una sucesión aritmética,

$$a_{k+1} = a_k + d$$

Al sustituir a_k por $a_1 + (k - 1)d$, se tiene

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= [a_1 + (k - 1)d] + d \\ &= a_1 + kd - d + d \\ &= a_1 + [(k + 1) - 1]d \end{aligned}$$

lo cual se deseaba mostrar.

Conclusión: Se ha probado que la fórmula es verdadera cuando $N = 1$, y también se comprobó que cuando la fórmula es verdadera para $N = k$, también lo es para $N = k + 1$. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, la fórmula es válida para todos los números naturales. ■

► **EJEMPLO 1** ***Determinación de un elemento particular de una sucesión aritmética***

Determine el trigésimo elemento de la sucesión aritmética para la cual el primer elemento es 5 y el segundo es 9.

Solución Sea a_{30} el trigésimo elemento de la sucesión aritmética

$$5, 9, \ldots, a_{30}$$

Entonces $d = 9 - 5$, o 4, $a_1 = 5$ y $N = 30$. Por el Teorema 1

$$\begin{aligned} a_{30} &= a_1 + (30 - 1)d \\ &= 5 + 29 \cdot 4 \\ &= 121 \end{aligned}$$

DEFINICIÓN **Medios aritméticos**

Si $a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$ es una sucesión aritmética, entonces los números $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son los k **medios aritméticos** entre a y b.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Como

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$$

es una sucesión aritmética, los números 5, 8, 11, 14 y 17 son los cinco medios aritméticos entre 2 y 20.

► EJEMPLO 2 *Determinación de los medios aritméticos entre dos números*

Inserte tres medios aritméticos entre 11 y 14.

Solución Si c_1, c_2 y c_3 son los tres medios aritméticos, entonces

$$11, c_1, c_2, c_3, 14$$

es una sucesión aritmética. Con $N = 5$ en el Teorema 1

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)d$$

Puesto que $a_1 = 11$ y $a_5 = 14$,

$$\begin{aligned} 14 &= 11 + 4d \\ d &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} c_1 &= 11 + \tfrac{3}{4} \\ &= 11\tfrac{3}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_2 &= 11\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} \\ &= 12\tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_3 &= 12\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} \\ &= 13\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Por tanto, los tres medios aritméticos son $11\frac{3}{4}$, $12\frac{1}{2}$ y $13\frac{1}{4}$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

A fin de insertar un medio aritmético entre dos números x y y, sea M el medio aritmético, de modo que se tiene la sucesión aritmética

$$x, M, y$$

La diferencia común puede representarse por $M - x$ o $y - M$. Por tanto,

$$\begin{aligned} M - x &= y - M \\ 2M &= x + y \\ M &= \frac{x + y}{2} \end{aligned}$$

◀

El número M obtenido en el ejemplo ilustrativo 4 se denomina *media aritmética* (o *promedio*) de los números x y y. Se puede generalizar este concepto y referirse a la *media aritmética* (o *promedio*) de un conjunto de números. Enseguida se presenta la definición formal.

DEFINICIÓN **Media aritmética**

(i) La **media aritmética** (o **promedio**) de los números x y y es el número

$$\frac{x + y}{2}$$

(ii) La **media aritmética** (o **promedio**) de los números x_1, x_2, x_3, . . . , x_n es el número

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

▶ EJEMPLO 3 *Determinar la media aritmética de un conjunto de números*

Un estudiante obtuvo, en cinco exámenes diferentes las calificaciones siguientes: 78, 89, 62, 75 y 84. Determine la media aritmética de estas calificaciones.

Solución Si M es la media aritmética, se tiene de la definición

$$\begin{aligned} M &= \frac{78 + 89 + 62 + 75 + 84}{5} \\ &= \frac{388}{5} \\ &= 77.6 \end{aligned}$$

◀

Una **serie aritmética** es la suma indicada de los elementos de una sucesión aritmética.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

La serie aritmética asociada con la sucesión aritmética del ejemplo ilustrativo 2 es

$$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25$$

Esta serie aritmética puede escribirse con notación sigma como

$$\sum_{i=1}^{8} (3i + 1)$$

◀

La serie aritmética asociada con la sucesión aritmética general es

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (N - 1)d]$$

Si se denota esta suma por S_N, se tiene

$$S_N = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (N - 1)d]$$

La serie del miembro derecho puede escribirse en orden inverso con el término N-ésimo escrito como a_N, el $(N - 1)$-ésimo término escrito como $a_N - d$, y así sucesivamente, hasta el primer término escrito como $a_N - (N - 1)d$. Por tanto,

$$S_N = a_N + (a_N - d) + (a_N - 2d) + \ldots + [a_N - (N - 1)d]$$

Si se suman término a término las dos ecuaciones que definen a S_N, se obtiene

$$S_N + S_N = (a_1 + a_N) + (a_1 + a_N) + (a_1 + a_N) + \ldots + (a_1 + a_N)$$

donde en el miembro derecho el término $a_1 + a_N$ se presenta N veces. En consecuencia,

$$2S_N = N(a_1 + a_N)$$

$$S_N = \frac{N}{2}(a_1 + a_N)$$

Si se sustituye en esta ecuación el valor de a_N de la fórmula del Teorema 1, se tiene

$$S_N = \frac{N}{2}(a_1 + [a_1 + (N - 1)d])$$

$$S_N = \frac{N}{2}[2a_1 + (N - 1)d]$$

Así, se ha probado el teorema siguiente.

TEOREMA 2

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$ es una sucesión aritmética con diferencia común d, y

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

entonces

$$S_N = \frac{N}{2}(a_1 + a_N)$$

y

$$S_N = \frac{N}{2}[2a_1 + (N - 1)d]$$

La primer fórmula del Teorema 2 puede escribirse como

$$S_N = N\left(\frac{a_1 + a_N}{2}\right)$$

De modo que S_N es el producto del número de términos y la media aritmética de los términos primero y último.

▶ EJEMPLO 4 *Determinación de la suma de una serie aritmética*

Determine la suma de los enteros positivos pares menores que 100.

Solución Los enteros positivos pares menores que 100 forman la sucesión aritmética

$$2, 4, 6, \ldots, 96, 98$$

Se desea determinar la suma de la serie aritmética asociada, la cual es

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98$$

Para esta serie $a_1 = 2$, $d = 2$, $N = 49$ y $a_{49} = 98$. Del Teorema 2

$$S_{49} = \frac{49}{2}(a_1 + a_{49})$$

$$= \frac{49}{2}(2 + 98)$$

$$= 2\,450$$

◀

▶ EJEMPLO 5 *Solución del enunciado de un problema que tiene una serie aritmética como modelo matemático*

Un vendedor con cierta propiedad de bienes raíces recibió las siguientes dos ofertas de posibles compradores:

Oferta 1: El pago para el primer año es \$24 000, y para los próximos nueve años se aplica un incremento anual de \$1 800 en los pagos.

Oferta 2: El pago para los primeros seis meses es \$12 000, y para los segundos seis meses es \$12 450. En los próximos nueve años se aplica un incremento semestral de \$450 en los pagos.

¿Qué oferta le proporcionará más dinero al vendedor durante un periodo de 10 años y a cuánto ascenderá?

Solución De acuerdo con la oferta 1, el monto del dinero recibido por el vendedor durante un periodo de 10 años, es la suma de la siguiente serie aritmética de diez términos:

$$24\,000 + 25\,800 + 27\,600 + \ldots + a_{10}$$

Sea S_{10} esta suma. Entonces, de la segunda fórmula del Teorema 2

$$S_{10} = \tfrac{10}{2}[2a_1 + (10 - 1)d]$$

Como $a_1 = 24\,000$ y $d = 1\,800$,

$$\begin{aligned} S_{10} &= 5[2(24\,000) + 9(1\,800)] \\ &= 321\,000 \end{aligned}$$

De acuerdo con la oferta 2, el número de dólares recibidos por el vendedor durante un periodo de diez años, es la suma de la siguiente serie aritmética de veinte términos:

$$12\,000 + 12\,450 + 12\,900 + \ldots + a_{20}$$

Si se denota esta suma por S_{20}, y del Teorema 2 con $a_1 = 12\,000$ y $d = 450$, se tiene

$$\begin{aligned} S_{20} &= \tfrac{20}{2}[2a_1 + (20 - 1)d] \\ &= 10[2(12\,000) + 19(450)] \\ &= 325\,500 \end{aligned}$$

Conclusión: La oferta 2 proporcionará \$4 500 más durante un periodo de diez años. ◀

DEFINICIÓN **Sucesión geométrica**

Una sucesión geométrica es una sucesión tal que cualquier elemento, después del primero, puede obtenerse al multiplicar el elemento anterior por una constante.

Una sucesión geométrica también se denomina **progresión geométrica.**

La constante que se multiplica en una sucesión geométrica recibe el nombre de **razón común** y se denota por r. Se puede calcular r al dividir cualquier término, excepto el primero, entre el término anterior.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Para la sucesión

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$$

se tiene $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{16}{8} = 2$, $\frac{32}{16} = 2$, $\frac{64}{32} = 2$ y $\frac{128}{64} = 2$. La razón común r es 2. ◀

Como con una sucesión aritmética, el número de elementos en una sucesión geométrica se denota por N, el primer elemento se denota por a_1 y el último por a_N. En la sucesión del ejemplo ilustrativo 6, $N = 8$, $a_1 = 1$ y $a_8 = 128$.

Una sucesión geométrica puede definirse proporcionando los valores de a_1 y N, y una fórmula recursiva

$$a_{n+1} = a_n r$$

de la cual cada elemento, después del primero, se obtiene a partir del precedente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

Considere la sucesión geométrica para la cual $a_1 = 128$, $N = 5$ y $a_{n+1} = a_n(-\frac{1}{4})$. Entonces

$$a_2 = 128(-\tfrac{1}{4}) = -32 \qquad a_3 = -32(-\tfrac{1}{4}) = 8 \qquad a_4 = 8(-\tfrac{1}{4}) = -2 \qquad a_5 = -2(-\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto, la sucesión es

$$128, -32, 8, -2, \tfrac{1}{2}$$ ◀

La sucesión geométrica general, para la cual el primer elemento es a_1, la razón común es r y el número de elementos es N, puede obtenerse al aplicar la fórmula recursiva. Se inicia con el elemento a_1, y se obtiene cada elemento sucesivo al multiplicar el elemento anterior por r. Al hacer esto, se tiene

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots, a_N$$

En los primeros cinco elementos se observa que cada elemento es el producto de a_1 y una potencia de r, donde el exponente de r es menor en 1 que el número del elemento. Por tanto, nuestra intuición sugiere que el N-ésimo (último) elemento es $a_N = a_1 r^{N-1}$.

TEOREMA 3

El N-ésimo elemento de una sucesión geométrica está determinado por

$$a_N = a_1 r^{N-1}$$

La demostración de este teorema es mediante inducción matemática y se deja como ejercicio. *Véase* el ejercicio 52.

▸ EJEMPLO 6 *Solución del enunciado de un problema que tiene una sucesión geométrica como modelo matemático*

Una ciudad tiene una población de 100 000 habitantes. Si se espera que la población se incremente en 10% cada cinco años, ¿cuál será la población al cabo de 40 años?

Solución La población dentro de cinco años será

$$100\,000 + 0.10(100\,000) = (1.10)(100\,000)$$

La población esperada al final de cada periodo sucesivo de cinco años es 1.10 veces la población al final del periodo anterior de cinco años. En consecuencia, se tiene la sucesión geométrica de nueve elementos

$$100\,000, (1.10)(100\,000), (1.10)^2(100\,000), \ldots, a_9$$

donde a_9 es la población esperada al cabo de los 40 años. Del Teorema 3 con $N = 9$, $a_1 = 100\,000$ y $r = 1.10$,

$$\begin{aligned} a_9 &= a_1 r^{9-1} \\ &= 100\,000(1.10)^8 \\ &\approx (2.144)10^5 \end{aligned}$$

Conclusión: La población que se espera dentro de 40 años será 214 400, con aproximación de cientos. ◂

DEFINICIÓN **Medios geométricos**

Si $a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$ es una sucesión geométrica, entonces los números $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son un conjunto de k **medios geométricos** entre a y b.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

La sucesión

$$2, 6, 18, 54, 162$$

es una sucesión geométrica con $r = 3$. De la definición, los números 6, 18 y 54 forman un conjunto de tres medios geométricos entre 2 y 162.

Como la sucesión

$$2, -6, 18, -54, 162$$

también es una sucesión geométrica ($r = -3$), los números -6, 18 y -54 forman otro conjunto de tres medios geométricos entre 2 y 162. ◀

Si m es un medio geométrico entre los dos números x y y, entonces

$$x, m, y$$

es una sucesión geométrica. Por tanto,

$$\frac{m}{x} = \frac{y}{m}$$

$$m^2 = xy$$

Esta ecuación implica que tanto x como y son positivos, o ambos son negativos. Además, la ecuación tiene dos soluciones: $m = \sqrt{xy}$ y $m = -\sqrt{xy}$. Como se quiere que el medio geométrico esté entre los números x y y, se elige para el valor de m el número que tenga el mismo signo que x y y. Por tanto, se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN **Media geométrica**

La **media geométrica** de los números x y y es

$\sqrt{xy}$ si x y y son positivos

$-\sqrt{xy}$ si x y y son negativos

▶ EJEMPLO 7 *Determinación de la media geométrica de dos números*

Determine la media geométrica de cada uno de los conjuntos de números: **(a)** 4 y 9; **(b)** $-\frac{3}{10}$ y $-\frac{5}{6}$.

Solución Para cada inciso sea m la media geométrica. Se calcula m al aplicar la definición.

(a) $m = \sqrt{4 \cdot 9}$
$= \sqrt{36}$
$= 6$

(b) $m = -\sqrt{(-\frac{3}{10})(-\frac{5}{6})}$
$= -\sqrt{\frac{15}{60}}$
$= -\sqrt{\frac{1}{4}}$
$= -\frac{1}{2}$ ◂

Mediante una generalización de la definición de la media geométrica de dos números, se define la **media geométrica** de un conjunto de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ como el número $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 9

La media geométrica de los números 4, 10 y 25 es

$$\sqrt[3]{(4)(10)(25)} = \sqrt[3]{1000}$$
$$= 10$$ ◂

Con cualquier sucesión geométrica, se tiene una **serie geométrica** asociada, la cual es la suma indicada de los elementos de la sucesión geométrica.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

La sucesión geométrica del ejemplo ilustrativo 7 es

$$128, -32, 8, -2, \tfrac{1}{2}$$

Asociada con esta sucesión se tiene la serie geométrica

$$128 - 32 + 8 - 2 + \tfrac{1}{2}$$

la cual puede escribirse con notación sigma como

$$\sum_{i=1}^{5} 128(-\tfrac{1}{4})^{i-1}$$ ◂

Sea S_N la suma de los N términos de una serie geométrica. Entonces

$$S_N = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{N-2} + a_1 r^{N-1}$$

Si se multiplican ambos miembros de esta ecuación por r, se tiene

$$rS_N = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \ldots + a_1 r^{N-1} + a_1 r^N$$

De la suma de la primera ecuación y -1 vez la segunda resulta

$$S_N - rS_N = a_1 - a_1 r^N$$
$$(1 - r)S_N = a_1 - a_1 r^N$$

Si $1 - r \neq 0$, se puede dividir cada miembro de esta ecuación entre $1 - r$ para obtener

$$s_N = \frac{a_1 - a_1 r^N}{1 - r} \qquad \text{si } r \neq 1$$

$$s_N = \frac{a_1(1 - r^N)}{1 - r} \qquad \text{si } r \neq 1$$

Una fórmula para S_N en términos de a_1, r y a_N se obtiene al expresar $a_1 r^N$ como $r(a_1 r^{N-1})$. Al hacer esto, se tiene

$$S_N = \frac{a_1 - r(a_1 r^{N-1})}{1 - r} \qquad \text{si } r \neq 1$$

Del Teorema 3, $a_1 r^{N-1} = a_N$. De modo que

$$S_N = \frac{a_1 - r a_N}{1 - r} \qquad \text{si } r \neq 1$$

Así, se ha demostrado el teorema siguiente.

TEOREMA 4

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$ es una sucesión geométrica con razón común r, y

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

entonces

(i) $S_N = \dfrac{a_1(1 - r^N)}{1 - r}$ si $r \neq 1$

y

(ii) $S_N = \dfrac{a_1 - r a_N}{1 - r}$ si $r \neq 1$

▸ EJEMPLO 8 *Determinación de la suma de una serie geométrica*

Determine la suma de la serie geométrica

$$\sum_{i=1}^{5} 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{i-1}$$

Solución Para la serie dada $a_1 = 2$, $r = \frac{1}{3}$ y $N = 5$. Así, del Teorema 4(i)

$$
\begin{aligned}
S_5 &= \frac{a_1(1 - r^5)}{1 - r} \\
&= \frac{2[1 - (\frac{1}{3})^5]}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{2(1 - \frac{1}{243})}{\frac{2}{3}} \\
&= 3 - \tfrac{1}{81} \\
&= 2\tfrac{80}{81}
\end{aligned}
$$

En el próximo ejemplo se emplea el Teorema 3 de la Sección 6.2, el cual establece que si P dólares se invierten a una tasa de interés de $100i\%$ compuesto m veces por año, y si A_n dólares es el monto de la inversión al cabo de n periodos de interés, entonces

$$A_n = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$$

▸ EJEMPLO 9 *Solución del enunciado de un problema que tiene una serie geométrica como modelo matemático*

A fin de crear un fondo de amortización que proporcionará capital para comprar nuevo equipo, una compañía deposita \$25 000 en una cuenta bancaria el 1 de enero de cada año durante 10 años. Si la cuenta reditúa 12% de interés compuesto anualmente, ¿a cuánto asciende el fondo inmediatamente después de efectuar el décimo depósito?

Solución Inmediatamente después de efectuar el décimo depósito, el décimo pago no ha devengado interés; el noveno pago ha redituado interés durante un año; el octavo pago ha redituado interés durante dos años, y así sucesivamente, y el primer pago ha redituado interés durante nueve años. Para determinar la cantidad de dólares en el fondo de manera inmediata después de efectuar el décimo pago, se aplica la fórmula presentada anteriormente para A_n con $P = 25\,000$, $i = 0.12$ y $m = 1$ para determinar el monto de cada pago. Los resultados son los siguientes:

10° pago: 25 000	(sin interés)
9° pago: $25\,000(1.12)^1$	(interés durante 1 año; $n = 1$)
8° pago: $25\,000(1.12)^2$	(interés durante 2 años; $n = 2$)
.	
.	
.	
1er pago: $25\,000(1.12)^9$	(interés durante 9 años; $n = 9$)

Si x dólares es el monto total en el fondo de amortización inmediatamente después de efectuar el décimo depósito, entonces

$$x = 25\,000 + 25\,000(1.12)^1 + 25\,000(1.12)^2 + \ldots + 25\,000(1.12)^9$$

Observe que x es la suma de una serie geométrica para la cual $N = 10$, $r = 1.12$ y $a_1 = 25\,000$. Del Teorema 4(i)

$$x = \frac{25{,}000[1 - (1.12)^{10}]}{1 - 1.12}$$

$$\approx (4.39)10^5$$

Conclusión: Inmediatamente después de efectuar el décimo depósito, la cantidad del fondo de amortización es \$439 000, con aproximación de miles de dólares. ◀

EJERCICIOS 12.6

En los ejercicios 1 a 4, escriba los primeros cinco elementos de una sucesión aritmética cuyo primer elemento es a y su diferencia común es d.

1. (a) $a = 5, d = 3$ (b) $a = 10, d = -4$
2. (a) $a = -3, d = 2$ (b) $a = 16, d = -5$
3. (a) $a = -5, d = -7$ (b) $a = x, d = 2y$
4. (a) $a = 20, d = 10$ (b) $a = u + v, d = -3v$

En los ejercicios 5 a 8, escriba los primeros cinco elementos de una sucesión geométrica cuyo primer elemento es a y su razón común es r.

5. (a) $a = 5, r = 3$ (b) $a = 8, r = -\frac{1}{2}$
6. (a) $a = 3, r = 2$ (b) $a = 2, r = \sqrt{2}$
7. (a) $a = -\frac{9}{16}, r = -\frac{2}{3}$ (b) $a = \frac{x}{y}, r = -\frac{y}{x}$
8. (a) $a = -81, r = \frac{1}{3}$ (b) $a = \frac{s}{t}, r = \frac{1}{u}$

En los ejercicios 9 a 12, determine si los elementos forman una sucesión aritmética o una sucesión geométrica. Si forman una sucesión, escriba los dos siguientes elementos.

9. (a) $3, -1, -5$ (b) $1, 3, 9$
   (c) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}$ (d) $-6, 10, -14$
10. (a) $12, 7, 2$ (b) $2, -4, 8$
    (c) $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
11. (a) $3.33, 2.22, 1.11$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$
    (c) $-6, 2, -\frac{2}{3}$ (d) $x, 2x + y, 3x + 2y$
12. (a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ (b) $3^{-2}, 3^0, 3^2$
    (c) $\sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{3}, 1$ (d) $s, t, 2t - s$
13. Halle el duodécimo elemento de una sucesión aritmética si su primer elemento es 2 y el segundo es 5.
14. Halle el décimo elemento de una sucesión aritmética si su primer elemento es 8 y el tercero es 2.
15. Halle el primer elemento de una sucesión aritmética si su octavo elemento es 2 y su diferencia común es -2.
16. El noveno elemento de una sucesión aritmética es 28 y el vigésimo primero es 100. ¿Cuál es el decimoquinto elemento?
17. Los tres primeros elementos de una sucesión aritmética son 20, 16 y 12. ¿Qué lugar ocupa el elemento -96?
18. En la sucesión aritmética cuyos tres primeros elementos son $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$. ¿Cuál sería el cuarto elemento?
19. Halle el tercer elemento de una sucesión geométrica si su quinto elemento es 81 y su noveno elemento es 16.
20. Si el primer elemento de una sucesión geométrica es $\frac{1}{8}$ y el octavo elemento es -16, halle el sexto elemento.
21. Halle la razón común de una sucesión geométrica cuyo tercer elemento es -2 y su sexto elemento es 54.
22. Si el primer elemento de una sucesión geométrica es 1 y la razón común es 3, determine el menor número de cuatro dígitos que represente un elemento de esta sucesión geométrica.
23. En la sucesión geométrica cuyo primer elemento es 0.0003 y su razón común es 10, ¿qué lugar ocupa el elemento es 3 000 000?
24. En la sucesión geométrica cuyos tres primeros elementos son 27, -18 y 12, ¿qué lugar ocupa el elemento $-\frac{512}{729}$?

25. (a) Inserte cuatro medios aritméticos entre 5 y 6; (b) inserte cinco medios geométricos entre 1 y 64.

26. (a) Inserte siete medios aritméticos entre 3 y 9; (b) inserte tres medios geométricos entre 162 y 2.

27. (a) Encuentre la media geométrica entre $\frac{2}{3}$ y -6; (b) Encuentre la media geométrica de los números 9, 21 y 49.

28. (a) Encuentre la media geométrica de 16 y 25; (b) Encuentre la media geométrica de los números $\frac{1}{3}$, 4 y 6.

En los ejercicios 29 a 34, encuentre la suma de las series.

29. (a) $\sum_{i=1}^{8} (3i - 1)$ (b) $\sum_{i=1}^{8} 2^i$

30. (a) $\sum_{i=1}^{18} \frac{2i - 1}{3}$ (b) $\sum_{i=2}^{7} (-3)^i$

31. (a) $\sum_{i=2}^{12} (8 - 2i)$ (b) $\sum_{i=3}^{9} 5\left(\frac{1}{3}\right)^{i-3}$

32. (a) $\sum_{k=1}^{50} (2k - 1)$ (b) $\sum_{i=1}^{10} (1.02)^i$

33. (a) $\sum_{i=1}^{12} (1.02)^{i-1}$ (b) $\sum_{k=1}^{20} (5k - 1)$

34. (a) $\sum_{i=1}^{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i$ (b) $\sum_{i=3}^{12} \left(\frac{1}{2}i - 5\right)$

35. Halle la media aritmética del siguiente conjunto de calificaciones: 72, 53, 85, 74, 62 y 83.

36. Encuentre la suma de todos los enteros positivos menores que 100.

37. Encuentre la suma de todos los enteros positivos pares que constan de dos dígitos.

38. Encuentre la suma de todos los enteros múltiplos de 8 entre 9 y 199.

En los ejercicios 39 a 47, resuelva el enunciado del problema empleando como modelo matemático una sucesión o serie, aritmética o geométrica. No olvide escribir una conclusión.

39. La cantidad de \$1 000 se distribuye entre cuatro personas de modo que cada persona, después del primero, reciba \$20 menos que la precedente. ¿Cuánto recibió cada persona?

40. La calificación de un estudiante en el primero de doce exámenes, en su curso de álgebra, fue 45. Sin embargo, en cada examen sucesivo fue 5 más que en el anterior. ¿Cuál es la media aritmética (promedio) de las doce calificaciones?

41. Un empleado desea colocar, en un aparador, cajas de detergente en forma piramidal de modo que la capa inferior contenga 15 cajas, la siguiente capa tenga 14 cajas, la siguiente capa 13 cajas, y así sucesivamente, hasta tener una caja arriba. ¿Cuántas cajas de detergente son necesarias para la pirámide?

42. Una compañía cobra por perforar un pozo \$80 por el primer pie, \$100 por el segundo, \$120 por el tercer, y así sucesivamente; el costo de cada pie perforado es \$20 más que el costo del pie anterior. ¿Cuál es la profundidad de un pozo cuya perforación costó \$23 400?

43. De un tonel que contiene un galón de vino, se extrae una pinta* y se rellena con agua. Si este procedimiento se repite seis veces, ¿qué parte fraccionaria del contenido original queda en el tonel?

44. Si una ciudad tiene una población de 5 000 habitantes en 1971, y se incrementa 20% cada cinco años, ¿cuál es la población esperada para el año 2001?

45. A un contratista que no cumple con el plazo fijado de la construcción de un edificio se le multa con \$800 por día para cada uno de los primeros diez días de retraso, y por cada día adicional subsecuente la multa se incrementa en \$160 cada día. Si el contratista es multado con \$20 160, ¿cuántos días más se dilató la construcción?

46. Se deben apilar algunos troncos en capas de modo que la capa superior tenga un tronco, la siguiente capa contenga dos troncos, la siguiente tenga tres troncos, y así sucesivamente, cada capa contiene un tronco más que la capa superior precedente. Si hay 190 troncos, determine si todos los troncos pueden utilizarse en tal agrupamiento, y en tal caso, ¿cuántos troncos hay en la capa inferior?

47. Se depositan pagos de \$1 000 en un fondo de amortización cada seis meses y la cuenta reditúa

* N.de T. Medida de capacidad equivalente a 0.568 de litro en Inglaterra y 0.473 en Estados Unidos.

10% de interés compuesto de manera semestral. ¿Cuánto habrá en el fondo inmediatamente después de efectuar el vigésimo pago?

48. Encuentre una sucesión de cuatro números, tal que el primero de los números sea 6 y el cuarto 16, de modo que los tres primeros números formen una sucesión aritmética y los tres últimos formen una sucesión geométrica.

49. Tres números forman una sucesión aritmética que tiene una diferencia común de 4. Si el primer número se incrementa en 2, el segundo número se incrementa en 3, y el tercer número se incrementa en 5; los números resultantes forman una sucesión geométrica. Determine los números originales.

50. Tres números cuya suma es 3 forman una sucesión aritmética, y sus cuadrados forman una sucesión geométrica. ¿Cuáles son los números?

51. Explique por qué la media geométrica de dos números positivos diferentes es menor que su media aritmética.

52. Demuestre el Teorema 3 mediante inducción matemática.

12.7 TEOREMA DEL BINOMIO

OBJETIVOS

1. **Aprender y aplicar la notación factorial.**
2. **Aprender y aplicar la notación de coeficientes binomiales.**
3. **Aprender y aplicar el teorema del binomio.**
4. **Demostrar el teorema del binomio por inducción matemática.**
5. **Aprender y aplicar la fórmula del *r*-ésimo término en un desarrollo binomial.**
6. **Emplear el triángulo de Pascal para encontrar los coeficientes en un desarrollo binomial.**

Una potencia de un binomio es un tipo especial de serie denominada **desarrollo binomial.** En esta sección se presentará el *teorema del binomio*, el cual proporciona el desarrollo de

$$(a + b)^n$$

donde n es cualquier entero positivo. En la discusión del teorema del binomio se emplearán dos notaciones con las cuales necesitará familiarizarse. Una es la **notación factorial** $n!$, léase "n factorial", la que se define por

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

$1! = 1$ $\quad 2! = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $\quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ◀

Como

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

y

$$(n - 1)! = (n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

se infiere que

$$n! = n(n - 1)! \tag{1}$$

En particular,

$$5! = 5 \cdot 4! \quad \text{y} \quad 26! = 26 \cdot 25!$$

Además, si se sustituye 1 por n en la fórmula (1), se obtiene

$$1! = 1(1 - 1)!$$

o, equivalentemente,

$$1! = 1 \cdot 0!$$

Por tanto, se define

$$0! = 1$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

A fin de simplificar $\frac{10!}{7!}$, primero se escribe $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot (7!)$ y después se divide el numerador y el denominador entre 7!.

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot (7!)}{7!}$$
$$= 10 \cdot 9 \cdot 8$$
$$= 720$$

◂

También se necesitará la **notación de coeficientes binomiales** $\binom{n}{r}$, léase "n sobre r", que se define como sigue: si n y r son enteros positivos y $r \leq n$,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1)}{r!}$$

Note que un coeficiente binomial es un número entero. Además,

$$\binom{n}{0} = 1$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

De la definición

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \qquad \binom{5}{5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \qquad \binom{9}{0} = 1$$

◀

En el ejemplo ilustrativo 3 se mostró que $\binom{5}{5} = 1$. De manera más general, de la definición se deduce que

$$\binom{n}{n} = 1$$

El teorema siguiente presenta otra fórmula para calcular $\binom{n}{r}$.

TEOREMA 1

Si n es un entero positivo y r es un entero no negativo, y $r \leq n$, entonces

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Demostración De la definición, si r es un entero positivo,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La fórmula también es válida si $r = 0$ porque $\binom{n}{0} = 1$ y

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!}$$

$$= \frac{n!}{(1)n!}$$

$$= 1$$

■

▶ EJEMPLO 1 *Cálculo de un coeficiente binomial*

Calcule el coeficiente binomial indicado mediante dos métodos: primero utilice la definición, después aplique el Teorema 1.

(a) $\binom{5}{3}$ (b) $\binom{6}{6}$ (c) $\binom{4}{1}$

Solución

(a) De la definición

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Del Teorema 1

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

(b) De la definición

$$\binom{6}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

Del Teorema 1

$$\binom{6}{6} = \frac{6!}{6!0!} = \frac{6!}{6!(1)} = 1$$

(c) De la definición

$$\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

Del Teorema 1

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

◀

El siguiente teorema se necesitará en la demostración del teorema del binomio.

TEOREMA 2

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

Demostración Del Teorema 1

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)![n-(r-1)]!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{n-r+1}{n-r+1} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \cdot \frac{r}{r} \\
&= \frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!} + \frac{(r)n!}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{[(n-r+1)+r]n!}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{r!(n+1-r)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\
&= \binom{n+1}{r}
\end{aligned}$$

■

Enseguida se considera el desarrollo binomial de

$$(a+b)^n$$

para valores específicos de n.

$n = 1$: $(a+b)^1 = a + b$

$n = 2$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$n = 3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n = 4$: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$n = 5$: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$n = 6$: $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Cada ecuación, después de la primera, se obtiene al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por $a + b$. En el miembro derecho de cada ecuación, el primer término puede escribirse con un factor b^0 y el último término con un factor a^0. Por tanto, cada término contiene potencias enteras no negativas de a y b. También observe las siguientes propiedades de cada uno de los seis desarrollos:

1. Hay $n + 1$ términos en el desarrollo.
2. La suma de los exponentes de a y b en cualquier término es n; de un término al siguiente, el exponente de a disminuye en 1 y el exponente de b aumenta en 1.
3. **(i)** El primer término del desarrollo es

$$a^n = \binom{n}{0} a^n$$

(ii) El segundo término es

$$\frac{n}{1}a^{n-1}b = \binom{n}{1}a^{n-1}b$$

(iii) El tercer término es

$$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}a^{n-2}b^2 = \binom{n}{2}a^{n-2}b^2$$

(iv) El cuarto término es

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}a^{n-3}b^3 = \binom{n}{3}a^{n-3}b^3$$

(v) El quinto término es

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^{n-4}b^4 = \binom{n}{4}a^{n-4}b^4$$

(vi) El término que contiene a b^r es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

(vii) El último término es

$$b^n = \binom{n}{n}b^n$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

El desarrollo binomial de $(a+b)^n$ cuando $n=6$ es

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Se mostrará que las propiedades anteriores se aplican a este desarrollo.

1. Hay siete términos en el desarrollo.
2. La suma de los exponentes de a y b en cualquier término es 6; de cada término al siguiente, el exponente de a disminuye en 1 y el exponente de b aumenta en 1.
3. **(i)** El primer término del desarrollo es

$$a^6 = \binom{6}{0}a^6$$

(ii) El segundo término es

$$\frac{6}{1}a^{6-1}b = \binom{6}{1}a^5b$$

(iii) El tercer término es

$$\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} a^{6-2} b^2 = \binom{6}{2} a^4 b^2$$

(iv) El cuarto término es

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{6-3} b^3 = \binom{6}{3} a^3 b^3$$

(v) El quinto término es

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a^{6-4} b^4 = \binom{6}{4} a^2 b^4$$

(vi) El sexto término es

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a^{6-5} b^5 = \binom{6}{5} a b^5$$

(vii) El último término es

$$b^6 = \binom{6}{6} b^6$$

◀

El ejemplo ilustrativo 4 y el análisis precedente sugieren una expresión semejante para el desarrollo de $(a + b)^n$, donde n es cualquier entero positivo. Esto se establece en el teorema del binomio.

TEOREMA *Teorema del binomio*

Si n es cualquier entero positivo,

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Demostración Se hará mediante inducción matemática.

Parte 1: Primero se verifica que el teorema sea verdadero para $n = 1$. Se tiene

$$\begin{aligned} (a + b)^1 &= \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b \\ &= 1 \cdot a + 1 \cdot b \\ &= a + b \end{aligned}$$

Parte 2: Ahora se supone que el teorema es verdadero para $n = k$, esto es,

$$(a + b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \quad (2)$$

Se desea probar que el teorema es verdadero para $n = k + 1$, de modo que

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1} \quad (3)$$

Primero se escribe

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$$

A fin de obtener $(a + b)(a + b)^k$, se multiplica cada término del miembro derecho de (2) por a y después por b y se suman los resultados. Por tanto,

$$(a + b)^{k+1} = \left[\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k\right] + \left[\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}\right]$$

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \ldots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \quad (4)$$

Del Teorema 2

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}; \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}; \ldots; \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k} \quad (5)$$

Además, como $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$, se tiene

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} \quad \text{y} \quad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} \quad (6)$$

Al sustituir de (5) y (6) en (4), se obtiene

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

la cual es la Ecuación (3).

Conclusión: Se ha probado que el teorema es verdadero cuando $n = 1$, y también se probó que cuando el teorema es verdadero para $n = k$, lo es para $n = k + 1$. Por tanto, mediante el principio de inducción matemática, el teorema es válido para todos los valores enteros positivos de n.

■

▶ EJEMPLO 2 *Aplicación del teorema del binomio*

Desarrolle y simplifique mediante el teorema del binomio $(x^2 + 3y)^5$.

Solución Al aplicar el teorema del binomio cuando $a = x^2$, $b = 3y$ y $n = 5$, se tiene

$$\begin{aligned}(x^2+3y)^5 &= \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4(3y)^1 + \binom{5}{2}(x^2)^3(3y)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3}(x^2)^2(3y)^3 + \binom{5}{4}(x^2)^1(3y)^4 + \binom{5}{5}(3y)^5 \\ &= 1\cdot x^{10} + \frac{5}{1}x^8(3y) + \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}x^6(9y^2) + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}x^4(27y^3) \\ &\quad + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^2(81y^4) + 1(243y^5) \\ &= x^{10} + 15x^8y + 90x^6y^2 + 270x^4y^3 + 405x^2y^4 + 243y^5 \quad ◀\end{aligned}$$

▶ EJEMPLO 3 *Aplicación del teorema del binomio*

Desarrolle y simplifique

$$\left(2\sqrt{t} - \frac{1}{t}\right)^4$$

Solución Se emplea el teorema del binomio con $a = 2\sqrt{t}$, $b = -\frac{1}{t}$ y $n = 4$.

$$\left(2\sqrt{t} - \frac{1}{t}\right)^4 = \binom{4}{0}(2\sqrt{t})^4 + \binom{4}{1}(2\sqrt{t})^3\left(-\frac{1}{t}\right)^1 + \binom{4}{2}(2\sqrt{t})^2\left(-\frac{1}{t}\right)^2 + \binom{4}{3}(2\sqrt{t})^1\left(-\frac{1}{t}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(-\frac{1}{t}\right)^4$$

$$= 1(16t^2) + \frac{4}{1}(8t^{3/2})\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}(4t)\left(\frac{1}{t^2}\right) + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}(2t^{1/2})\left(-\frac{1}{t^3}\right) + 1\left(\frac{1}{t^4}\right)$$

$$= 16t^2 - 32t^{1/2} + \frac{24}{t} - \frac{8}{t^{5/2}} + \frac{1}{t^4}$$

◀

Del teorema del binomio, el término que contiene b^r en el desarrollo de $(a + b)^n$ es el $(r + 1)$-ésimo término, el cual es

$$\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

El r-ésimo término del desarrollo de $(a + b)^n$ se obtiene a partir de esta expresión al sustituir r por $r - 1$. Así,

el r-ésimo término en $(a + b)^n$ es $\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$

Observe que el exponente de b es 1 menos que el número del término, y la suma de los exponentes de a y b es n.

► **EJEMPLO 4** ***Determinación de un término particular en un desarrollo binomial***

Determine el séptimo término del desarrollo de $(2u^3 - \frac{1}{4}v^4)^{10}$.

Solución Al aplicar la fórmula del r-ésimo término con $r = 7$, $n = 10$, $a = 2u^3$ y $b = -\frac{1}{4}v^4$, se tiene

$$\binom{10}{6}(2u^3)^4\left(-\frac{1}{4}v^4\right)^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(2^4u^{12})\left(\frac{1}{2^{12}}v^{24}\right)$$

$$= \frac{210}{2^8}u^{12}v^{24}$$

$$= \frac{105}{128}u^{12}v^{24}$$

◀

▸ EJEMPLO 5 *Determinación de un término particular en un desarrollo binomial*

Determine el término que contiene x^3 en el desarrollo de $(x - 3x^{-1})^9$.

Solución De la fórmula para el r-ésimo término, con $a = x$, $b = -3x^{-1}$ y $n = 9$, el r-ésimo término tiene los factores

$$x^{10-r}(-3x^{-1})^{r-1} = (-3)^{r-1}x^{11-2r}$$

El término que contiene x^3 es aquél en el cual el exponente de x es 3; de donde se resuelve la ecuación

$$\begin{aligned} 11 - 2r &= 3 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

De modo que el cuarto término es el término buscado, y es

$$\begin{aligned} \binom{9}{3}x^6(-3x^{-1})^3 &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}(-27)x^3 \\ &= -2268x^3 \end{aligned}$$

◀

Existe un modelo interesante para los coeficientes en el desarrollo binomial. Los coeficientes pueden escribirse como en el siguiente arreglo triangular:

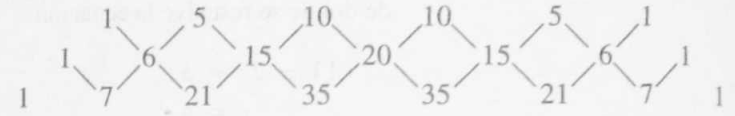
$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & . & & . & & . & & . & & . & & . \\ & . & & . & & . & & . & & . & & . \\ & . & & . & & . & & . & & . & & . \end{array}$$

El primer renglón contiene los coeficientes de $(a + b)^1$; el segundo renglón contiene los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^2$; en el tercer renglón están los coeficientes de $(a + b)^3$; y así sucesivamente. Observe que cada renglón comienza y termina con el número 1. También observe que cada uno de los otros números es la suma de los dos números del renglón anterior, uno a la derecha y otro a la izquierda del número. Por ejemplo, los números del quinto renglón son los coeficientes para $(a + b)^5$. Los números primero y último son 1. El segundo número, 5, es la suma de 1 y 4; después, 10 es la suma de 4 y 6; 10 es la suma de 6 y 4; y 5 es la suma de 4 y 1. Este arreglo triangular se denomina **triángulo de Pascal,** llamado así en honor al matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662), quien lo empleó en su trabajo sobre probabilidad, aunque se conoció antes de su tiempo.

▸ EJEMPLO 6 *Empleo del triángulo de Pascal para determinar los coeficientes de un desarrollo binomial*

Desarrolle $(a + b)^7$ determinando primero los coeficientes con el triángulo de Pascal.

Solución Se escribe el quinto renglón y después se obtienen los renglones sexto y séptimo mediante el procedimiento descrito anteriormente.



Los coeficientes para $(a + b)^7$ están en el séptimo renglón. Por tanto,

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \quad \blacktriangleleft$$

Cuando n es pequeño, el uso del triángulo de Pascal para determinar los coeficientes de $(a + b)^n$ es ventajoso. Sin embargo, si n es grande o se desea un término específico, deberá emplear el teorema del binomio o la fórmula del r-ésimo término.

EJERCICIOS 12.7

En los ejercicios 1 a 4, simplifique la expresión racional.

1. (a) $\dfrac{6!}{9!}$ (b) $\dfrac{32!}{28!}$
2. (a) $\dfrac{8!}{4!}$ (b) $\dfrac{49!}{51!}$
3. (a) $\dfrac{12!}{8!\,6!}$ (b) $\dfrac{3! + 4!}{7!}$
4. (a) $\dfrac{2!\,5!}{7!}$ (b) $\dfrac{8!}{6! + 7!}$

En los ejercicios 5 a 8, determine el número.

5. (a) $\binom{7}{3}$ (b) $\binom{6}{6}$
6. (a) $\binom{9}{4}$ (b) $\binom{5}{1}$
7. (a) $\binom{12}{9}$ (b) $\binom{50}{48}$
8. (a) $\binom{20}{17}$ (b) $\binom{15}{15}$

En los ejercicios 9 a 20, desarrolle la potencia del binomio.

9. $(a + b)^8$
10. $(a + b)^9$
11. $(x - y)^9$
12. $(x - y)^{10}$
13. $(x + 3y)^5$
14. $(2x - y)^6$
15. $(4 - ab)^6$
16. $(2t + s^2)^7$
17. $(3e^x - 2e^{-x})^5$
18. $(2u^{-1} - 3u^2)^5$
19. $(a^{1/2} + b^{1/2})^8$
20. $(xy^{-1} - x^{-1}y)^7$

En los ejercicios 21 a 26, encuentre los primeros cuatro términos del desarrollo de la potencia del binomio y simplifique cada término.

21. $(2x^2 + y^2)^{12}$
22. $(a^3 - 2b^2)^{14}$
23. $(u^{-1} - 3v^2)^{11}$
24. $(e^{x/2} - e^{-x/2})^{20}$
25. $(a^{1/3} - b^{1/3})^9$
26. $(\frac{2}{5}a^{2/3} + b^{3/2})^{11}$
27. Determine el séptimo término del desarrollo de $(a + b)^{14}$.
28. Determine el sexto término del desarrollo de $(\frac{1}{2}a - b)^{13}$.

29. Determine el sexto término del desarrollo de $(2x - 3)^9$.

30. Determine el décimo término del desarrollo de $(\sqrt{t} - t^{-1/2})^{15}$.

31. Determine el término medio del desarrollo de $(1 - x^3y^{-2})^{12}$.

32. Determine el término medio del desarrollo de $(\frac{1}{3}y + \sqrt{y})^{10}$.

33. Determine el término que contiene a^6 en el desarrollo de $(\frac{1}{2} + a)^{12}$.

34. Determine el término que contiene x^{12} en el desarrollo de $(x^2 - \frac{1}{2})^{11}$.

35. Determine el término que no contiene x en el desarrollo de $(x^2 - 2x^{-2})^{10}$.

36. Determine el término que contiene t^{-4} en el desarrollo de $(\frac{1}{5}t^2 - t^{-1})^{13}$.

En los ejercicios 37 a 40, escriba el desarrollo binomial al determinar primero los coeficientes con el triángulo de Pascal.

37. $(a + b)^9$

38. $(x - y)^8$

39. $(r - t)^{12}$

40. $(u + v)^{11}$

En los ejercicios 41 a 44, utilice la siguiente interpretación del coeficiente binomial: $\binom{n}{r}$ *es el número de combinaciones de n elementos tomando r a la vez; esto es, es el número de maneras en que se pueden tomar r elementos de un conjunto de n elementos.*

41. Una liga de futbol consta de ocho equipos. Si cada equipo juega con otro, ¿cuántos juegos se llevarán a cabo en la competencia?

42. ¿Cuántos comités diferentes de 3 personas cada uno pueden elegirse de un grupo de 12 personas?

43. Un estudiante tiene 10 carteles para colocar en las paredes de su habitación, pero sólo hay espacio para 7. **(a)** ¿De cuántas maneras puede elegir los carteles que serán colocados? **(b)** De cuántas maneras puede seleccionar los 3 carteles que no colocará?

44. Un estudiante debe contestar a 8 preguntas cualesquiera de un examen que contiene 12 preguntas. **(a)** De cuántas maneras diferentes puede el estudiante elegir las 8 preguntas a responder? **(b)** ¿De cuántas maneras diferentes puede el estudiante elegir las 4 preguntas que no contestará?

45. Pruebe que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

46. Explique la igualdad del ejercicio 45 en términos de las preguntas hechas en los ejercicios 43 y 44.

47. **(a)** Desarrolle $(2x - 3)^5$ mediante el teorema del binomio. **(b)** Verifique el desarrollo en la graficadora y explique cómo lo hizo.

48. Demuestre mediante inducción matemática que la fórmula siguiente es verdadera para todos los valores enteros positivos de n:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

12.8 INTRODUCCIÓN A LAS SERIES INFINITAS

OBJETIVOS

1. **Describir una serie infinita.**
2. **Aprender y aplicar la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita.**
3. **Expresar un decimal infinito periódico como una fracción.**
4. **Resolver enunciados de problemas que tienen una serie geométrica infinita como modelo matemático.**
5. **Aprender y aplicar la fórmula para una serie binomial.**
6. **Calcular con series binomiales.**
7. **Aplicar las series infinitas a sen x, cos x y e^x para calcular valores aproximados de números irracionales.**

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ Aquí, en la sección final de este texto, se dará una introducción de lo que se espera al estudiar series infinitas en el curso de Cálculo.

Hasta ahora el estudio de las series se ha limitado a aquellas asociadas con sucesiones finitas. Una **serie infinita,** denotada por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

es la serie asociada con la sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ Pero, ¿qué significa la "suma" de un número infinito de términos?, y ¿bajo qué circunstancias tal suma existe? Las respuestas a estas preguntas dependen del concepto de *límite*, el cual se estudia en Cálculo. Sin embargo, para ciertas series infinitas se puede dar una idea intuitiva de cómo interpretar tal suma.

Suponga que un pedazo de cuerda que mide 2 pie de longitud se corta a la mitad. Uno de los trozos de longitud 1 pie se aparta, y el otro se vuelve a cortar a la mitad. Uno de los pedazos de longitud $\frac{1}{2}$ pie se retira, y el otro se corta a la mitad de modo que se obtienen dos trozos, cada uno de $\frac{1}{4}$ pie de longitud. Uno de los pedazos de longitud $\frac{1}{4}$ pie se aparta y el otro se corta a la mitad; obteniéndose así dos pedazos de $\frac{1}{8}$ pie de longitud. De nuevo se repite el procedimiento. Si esto se continúa indefinidamente, el número de pies de la suma de los pedazos separados puede considerarse como la serie infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \qquad (1)$$

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ Esta serie es un ejemplo de una *serie geométrica infinita*, la cual se encontrará en Cálculo. La serie (1) es una serie geométrica infinita con $r = \frac{1}{2}$. Como se inició con un pedazo de cuerda de 2 pie de longitud, se aprecia intuitivamente que la suma de la serie (1) debe ser 2. Esta situación se puede demostrar al aplicar nuestro conocimiento de series geométricas. Del Teorema 4 de la Sección 12.6, si S_N es la suma de N términos de una serie geométrica,

$$S_N = \frac{a_1(1 - r^N)}{1 - r}$$

Por tanto, para un número finito N de términos de la serie (1) con $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$,

$$S_N = \frac{(1)[1 - (\frac{1}{2})^N]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 - (\frac{1}{2})^N}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad S_N = 2[1 - (\tfrac{1}{2})^N]$$

Si se aplica esta fórmula a los valores sucesivos de N, se obtiene

$$\begin{aligned} S_1 &= 2[1 - (\tfrac{1}{2})^1] & S_2 &= 2[1 - (\tfrac{1}{2})^2] & S_3 &= 2[1 - (\tfrac{1}{2})^3] \\ &= 2 - 2(\tfrac{1}{2}) & &= 2 - 2(\tfrac{1}{4}) & &= 2 - 2(\tfrac{1}{8}) \\ &= 2 - 1 & &= 2 - \tfrac{1}{2} & &= 2 - \tfrac{1}{4} \\ S_4 &= 2[1 - (\tfrac{1}{2})^4] & S_5 &= 2[1 - (\tfrac{1}{2})^5] & S_6 &= 2[1 - (\tfrac{1}{2})^6] \\ &= 2 - 2(\tfrac{1}{16}) & &= 2 - 2(\tfrac{1}{32}) & &= 2 - 2(\tfrac{1}{64}) \\ &= 2 - \tfrac{1}{8} & &= 2 - \tfrac{1}{16} & &= 2 - \tfrac{1}{32} \\ &\vdots & & & & \\ S_{10} &= 2[1 - (\tfrac{1}{2})^{10}] & & & & \\ &= 2 - 2(\tfrac{1}{1024}) & & & & \\ &= 2 - \tfrac{1}{512} & & & & \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Se observa, de manera intuitiva, que el valor de S_N se puede aproximar a 2 tan cerca como se desee tomando N tan grande como sea necesario. En otras palabras, se puede hacer la diferencia entre 2 y S_N tan pequeña como se desee al tomar N suficientemente grande. Por tanto, se establece que S_N se aproxima a 2 cuando N crece sin límite, lo que se escribe

$$S_N \to 2 \quad \text{conforme} \quad N \to +\infty \tag{2}$$

Considere ahora la **serie geométrica infinita** general:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + \ldots \qquad |r| < 1$$

La suma de los primeros N términos de esta serie esta dada por

$$S_N = \frac{a_1}{1 - r}(1 - r^N) \tag{3}$$

Considere lo que ocurre a r^N conforme N crece sin límite, cuando $|r| < 1$. Por ejemplo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}, \ldots$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{59{,}049}, \ldots$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59{,}049}, \ldots$$

De modo más general, para cualquier r para la cual $|r| < 1$, cuando N crece sin límite, $|r^N|$ se hace más pequeño; esto es,

$$r^N \to 0 \quad \text{conforme} \quad N \to +\infty$$

Por tanto, de (3)

$$S_N \to \frac{a_1}{1 - r} \quad \text{conforme} \quad N \to +\infty$$

Este enunciado nos conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN Suma de una serie geométrica infinita

La **suma** S de una serie geométrica infinita, para la cual $|r| < 1$, está determinada por

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Para la serie (1) considere $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$. Por tanto, si S es la suma de esta serie, se tiene de la definición

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Este resultado es acorde con el enunciado (2). ◂

Observe que la suma de cualquier serie geométrica infinita está definida sólo cuando $|r| < 1$. Si se tiene una serie geométrica infinita para la cual $|r| > 1$, entonces cuando N crece sin límite, r^N no se aproximará a un número finito; de modo que refiriéndose a la fórmula (3), es evidente que la serie infinita no tiene una suma. Si $r = 1$, entonces $S_N = Na_1$, y conforme N crece sin límite, $|S_N|$ también lo hará.

▸ EJEMPLO 1 *Determinación de la suma de una serie geométrica infinita*

Determine la suma de la serie geométrica infinita

$$6 + 4 + \tfrac{8}{3} + \ldots + 6(\tfrac{2}{3})^{n-1} + \ldots$$

Solución De la definición con $a_1 = 6$ y $r = \frac{2}{3}$

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$
$$= \frac{6}{1 - \frac{2}{3}}$$
$$= 18$$ ◀

Una aplicación de las series geométricas infinitas consiste en expresar un determinado decimal infinito periódico como una fracción. De modo que se puede mostrar que un decimal infinito periódico representa un número racional. Para hacerlo se escribe una barra sobre el periodo. Por ejemplo, $0.33\overline{3}$ representa $0.3333\ldots$ y $4.0242\overline{424}$ representa $4.024242424\ldots$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

El decimal infinito periódico $0.33\overline{3}$ puede escribirse como

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

la cual es una serie geométrica infinita con $a_1 = \frac{3}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$. Si S es la suma de esta serie,

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$
$$= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$
$$= \frac{1}{3}$$

Por tanto, el decimal infinito periódico $0.33\overline{3}$ y la fracción $\frac{1}{3}$ son representaciones para el mismo número racional. ◀

▶ EJEMPLO 2 *Expresión de un decimal infinito periódico como una fracción*

Exprese el decimal infinito periódico $4.0242\overline{424}$ como una fracción.

Solución El decimal dado puede escribirse como

$$4 + \left[\frac{24}{1000} + \frac{24}{100\,000} + \frac{24}{10\,000\,000} + \ldots + \frac{24}{10^{2n+1}} + \ldots\right]$$

La serie entre corchetes es una serie geométrica infinita para la cual $a_1 = \frac{24}{1\,000}$ y $r = \frac{1}{100}$. Si S es la suma de esta serie, entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{\frac{24}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{\frac{24}{1000}}{\frac{99}{100}} \\ &= \frac{24}{990} \\ &= \frac{4}{165} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 4.0242\overline{424} &= 4 + \tfrac{4}{165} \\ &= \tfrac{664}{165} \end{aligned}$$

◄

► EJEMPLO 3 *Solución del enunciado de un problema que tiene una serie geométrica infinita como modelo matemático*

Se deja caer una pelota desde una altura de 36 m, y cada vez que toca el suelo rebota una altura de $\frac{2}{3}$ de la distancia desde la que se dejó caer. Determine la distancia total recorrida por la pelota antes de que quede en reposo.

Solución Sea d metros la distancia total recorrida por la pelota. Para obtener d, se deben sumar las distancias que recorre al caer, así como las de rebote. De este modo

$$\begin{aligned} d &= 36 + [(36)(\tfrac{2}{3}) + (36)(\tfrac{2}{3}) + (36)(\tfrac{2}{3})^2 + (36)(\tfrac{2}{3})^2 + \ldots] \\ &= 36 + 2[(36)(\tfrac{2}{3}) + (36)(\tfrac{2}{3})^2 + \ldots + (36)(\tfrac{2}{3})^n + \ldots] \end{aligned}$$

La serie entre corchetes es una serie geométrica infinita con $a_1 = (36)(\frac{2}{3})$ y $r = \frac{2}{3}$. Si S es la suma de esta serie, entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{24}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 72 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} d &= 36 + 2(72) \\ &= 180 \end{aligned}$$

Conclusión: La pelota recorre 180 m antes de quedar en reposo. ◄

En la Sección 12.7 se demostró el teorema del binomio para el desarrollo de $(a + b)^n$ cuando n es un entero positivo. El teorema siguiente establece que el binomio $(1 + b)^n$ tiene un desarrollo cuando n es cualquier número real y $|b| < 1$. El desarrollo, denominado **serie binomial,** es otra serie infinita que se encontrará en el curso de Cálculo.

TEOREMA 1

Si n es cualquier número real y $|b| < 1$, entonces

$$(1 + b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}b^r + \ldots$$

La demostración del teorema se omite debido a que depende de conceptos estudiados en Cálculo.

► **EJEMPLO 4** ***Representación de una serie binomial***

Escriba una serie binomial para $(1 + \sqrt{x})^{-1}$ si $\sqrt{x} < 1$.

Solución Del Teorema 1, cuando $n = -1$ y $b = \sqrt{x}$,

$$(1 + \sqrt{x})^{-1} = 1 + (-1)x^{1/2} + \frac{(-1)(-2)}{2!}(x^{1/2})^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(x^{1/2})^3 + \ldots + \frac{(-1)(-2)(-3)\cdot\ldots\cdot(-r)}{r!}(x^{1/2})^r + \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + x^{1/2})^{-1} = 1 - x^{1/2} + x - x^{3/2} + \ldots + (-1)^r x^{r/2} + \ldots \quad \blacktriangleleft$$

Observe que la serie infinita obtenida en el ejemplo 4 es una serie geométrica infinita en la que el primer término es 1 y la razón común es $-x^{1/2}$. Se definió la suma de una serie geométrica infinita para la cual su primer término es a_1 y su razón común es r, con $|r| < 1$, como

$$\frac{a_1}{1 - r}$$

Si $a_1 = 1$ y $r = -x^{1/2}$, entonces

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-(-x^{1/2})}$$
$$= \frac{1}{1+x^{1/2}}$$
$$= (1+x^{1/2})^{-1}$$

en concordancia con el resultado del ejemplo 4.

También las series infinitas se emplean para aproximar números irracionales. En los dos ejemplos siguientes se muestra el procedimiento para calcular los valores aproximados de $\sqrt[3]{25}$ y sen 0.3 mediante series infinitas. En los ejercicios 31 a 42 se le pedirá que encuentre valores aproximados de otros números irracionales mediante series infinitas.

$\int\!\!\int \frac{dy}{dx}$ ▸ **EJEMPLO 5** ***Cálculo con una serie binomial***

Encuentre el valor de $\sqrt[3]{25}$ con aproximación de tres cifras decimales empleando la serie binomial para $(1+x)^{1/3}$. Verifique la respuesta en una calculadora.

Solución Del Teorema 1 se tiene, si $|x| < 1$,

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Como

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{\tfrac{25}{27}}$$
$$= 3\sqrt[3]{1-\tfrac{2}{27}}$$

entonces

$$\sqrt[3]{25} = 3(1-\tfrac{2}{27})^{1/3} \tag{4}$$

De la serie binomial para $(1+x)^{1/3}$ con $x = -\frac{2}{27}$, se tiene

$$\left(1-\frac{2}{27}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) - \frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(-\frac{2}{27}\right)^2 + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3 + \cdots$$
$$= 1 - 0.0247 - 0.0006 - 0.00003 - \cdots$$

El cuarto término tiene un cero en el cuarto lugar decimal, y así cada término sucesivo. Se puede probar que ningún término después del tercero, afecta a las cuatro primeras cifras decimales. Al emplear los tres primeros términos de la serie, se obtiene

$$(1-\tfrac{2}{27})^{1/3} \approx 0.9747$$

Al sustituir en (4), se tiene

$$\sqrt[3]{25} \approx 3(0.9747)$$
$$= 2.9241$$

Si se redondea a tres decimales se consigue $\sqrt[3]{25} \approx 2.924$. En la calculadora se obtiene el mismo resultado. ◀

En Cálculo aprenderá cómo expresar muchos tipos de funciones como series infinitas. Tres de tales series que representan una función para todos los valores de x son

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots \quad (6)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \quad (7)$$

En el ejemplo siguiente se utiliza la serie (5) para aproximar un valor particular de la función seno. Se le pedirá que emplee las series (5), (6) y (7) en los ejercicios 37 a 42.

▸ **EJEMPLO 6** ***Empleo de una serie infinita para aproximar un valor de la función seno***

Encuentre el valor de sen 0.3 con aproximación de cuatro decimales empleando la serie (5) para sen x. Verifique la respuesta en una calculadora.

Solución De la serie (5) con $x = 0.3$, se tiene

$$\operatorname{sen} 0.3 = 0.3 - \frac{(0.3)^3}{3!} + \frac{(0.3)^5}{5!} - \frac{(0.3)^7}{7!} + \ldots$$
$$= 0.3 - 0.0045 + 0.00002 - 0.00000004 + \ldots$$

Ningún término después del tercero afecta a las cinco primeras cifras decimales. De los primeros tres términos de esta serie, se tiene

$$\operatorname{sen} 0.3 \approx 0.29552$$

Si se redondea a cuatro cifras decimales se obtiene sen $0.3 \approx 0.2955$. El mismo resultado se obtiene en la calculadora. ◀

EJERCICIOS 12.8

En los ejercicios 1 a 10, *encuentre la suma de la serie infinita.*

1. $16 + 4 + 1 + \ldots$
2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{27} + \ldots$

3. $60 - 6 + 0.6 - \ldots$
4. $4 - 1.6 + 0.64 - \ldots$
5. $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{54} + \ldots$
6. $1 + (1.04)^{-1} + (1.04)^{-2} + \ldots$
7. $\frac{4}{3} - 1 + \frac{3}{4} - \ldots$
8. $-2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \ldots$
9. $3 + \sqrt{3} + 1 + \ldots$
10. $(2 + \sqrt{3}) + 1 + (2 - \sqrt{3}) + \ldots$

En los ejercicios 11 a 22, exprese el decimal infinito periódico como una fracción.

11. $0.66\overline{6}$
12. $0.272\overline{727}$
13. $0.818\overline{181}$
14. $0.252252\overline{252}$
15. $2.99\overline{9}$
16. $3.141614161\overline{1416}$
17. $1.234234\overline{234}$
18. $7.99\overline{9}$
19. $0.465346534\overline{653}$
20. $2.045045\overline{045}$
21. $3.225\overline{44}$
22. $6.5071\overline{1}$

23. Exprese el decimal infinito periódico $2.464\overline{646}$ como una fracción mediante dos métodos: **(a)** considere $2.464\overline{646}$ como $2 + 0.46 + 0.0046 + 0.000046 + \ldots$ y **(b)** considere $2.464\overline{646}$ como $2.4 + 0.064 + 0.00064 + 0.0000064 + \ldots$.

24. Exprese el decimal infinito periódico $5.1696\overline{969}$ como una fracción mediante dos métodos: **(a)** considere $5.1696\overline{969}$ como $5.1 + 0.069 + 0.00069 + 0.0000069 + \ldots$ y **(b)** $5.1696\overline{969}$ como $5.16 + 0.0096 + 0.000096 + 0.00000096 + \ldots$.

En los ejercicios 25 a 30, encuentre los primeros cuatro términos de la serie binomial para la expresión proporcionada.

25. $(1 + x^2)^{-1}$ $\quad x^2 < 1$
26. $(1 - x)^{1/3}$ $\quad |x| < 1$
27. $(1 - 2x)^{1/2}$ $\quad |x| < \frac{1}{2}$
28. $(1 - x^2)^{-1/2}$ $\quad x^2 < 1$
29. $(8 + x)^{1/3}$ $\quad |x| < 8$
30. $(3 + x)^{-1}$ $\quad |x| < 3$

En los ejercicios 31 a 36, calcule el valor con aproximación de tres cifras decimales utilizando una serie binomial. Compruebe la respuesta en la calculadora.

31. $\sqrt{1.04}$
32. $\sqrt[3]{0.99}$
33. $\sqrt[3]{63}$
34. $\sqrt{38}$
35. $\sqrt[4]{620}$
36. $\frac{1}{\sqrt[4]{15}}$

37. Calcule el valor de e con aproximación de cuatro decimales empleando la serie (7).

38. Calcule el valor de $\frac{1}{e}$ con aproximación de cuatro decimales utilizando la serie (7). Verifique la respuesta en la calculadora.

En los ejercicios 39 a 42, emplee la serie (5) o (6) para calcular el valor de la función con aproximación de cuatro decimales. Compruebe la respuesta en la calculadora.

39. cos 0.4
40. sen 1.2
41. sen 22°
42. cos 17°

En los ejercicios 43 a 47, resuelva el enunciado del problema empleando una serie geométrica infinita como modelo matemático. No olvide escribir una conclusión.

43. Se deja caer una pelota desde una altura de 12 m. Cada vez que toca el suelo rebota a una altura de tres cuartos de la distancia desde la cual se dejó caer. Determine la distancia total recorrida por la pelota antes de que quede en reposo.

44. ¿Cuál es la distancia recorrida por una pelota de tenis antes de quedar en reposo si se deja caer desde una altura de 100 m y si, después de cada caída, rebota $\frac{11}{20}$ de la distancia desde la que se dejó caer.

45. La trayectoria de cada oscilación de un péndulo, después de la primera, es 0.93 de la longitud de la trayectoria de la oscilación precedente desde un lado al otro. Si la trayectoria de la primera oscilación mide 28 cm de longitud, y la resistencia del aire ocasiona el estado de reposo del péndulo, ¿qué distancia recorre el extremo oscilante del péndulo antes de que quede en reposo?

46. Los lados de un triángulo equilátero miden 4 unidades; por tanto, su perímetro es de 12 unidades. Se construye otro triángulo equilátero dibujando segmentos rectilíneos que pasan por los puntos medios del primer triángulo. Los lados de este triángulo miden 2 unidades, por lo que su perímetro es de 6 unidades. Si se repite este procedimiento un número ilimitado de veces, ¿cuál es el perímetro total de todos los triángulos que se forman?

47. Después de que una mujer que viaja en bicicleta, retira sus pies de los pedales, la rueda delantera gira 100 veces durante los primeros 10 segundos. Después de cada periodo sucesivo de 10 s la rueda

gira cuatro quintas partes de lo que giró el periodo anterior. Determine el número de giros de la rueda antes de que la bicicleta se detenga.

48. Encuentre una serie geométrica infinita cuya suma sea 6 y tal que cada término sea cuatro veces la suma de todos los términos subsecuentes.

49. *La fórmula de Euler*, en honor a **Leonhard Euler**, es

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Esta fórmula proporciona una definición de e^{it}. **(a)** Muestre que la fórmula de Euler es consistente con las series (5), (6) y (7) efectuando lo siguiente: obtenga una serie para e^{it} sustituyendo it por x en la serie (7) y simplifique las potencias de i; sustituya t por x en las series (5) y (6); sume la serie para $\cos t$ a i veces la serie para $\operatorname{sen} t$ y obtenga la serie para e^{it}. **(b)** Utilice la fórmula de Euler para mostrar que

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

la cual es una ecuación sorprendente que contiene las cinco constantes importantes: e, i, π, 1 y 0.

50. La serie infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

cuyos términos son los recíprocos de los enteros positivos se denomina *serie armónica*. ¿Cuántos términos de la serie armónica se requieren antes de que la suma sea mayor que **(a)** 2, **(b)** 3, **(c)** 4 y **(d)** 8? **(e)** ¿Cree usted que la serie armónica tiene una suma finita? Explique cómo llegó a tal respuesta.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 12

VISIÓN RETROSPECTIVA

12.1 A fin de resolver un sistema de ecuaciones lineales, primero se escribió el sistema en forma triangular y después se empleó la sustitución regresiva para despejar las variables. Dicho procedimiento condujo al método de reducción de Gauss para resolver un sistema lineal mediante matrices, donde se aplicó el teorema que proporciona las reglas para efectuar operaciones elementales con renglones sobre los elementos de una matriz. Se mostró cómo el método puede emplearse para determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente, así como dependiente o independiente.

12.2 Las propiedades de las matrices incluyeron el determinante de una matriz, el producto de un escalar y una matriz, el producto de dos matrices, el idéntico multiplicativo para un conjunto de matrices cuadradas de un orden particular, y el inverso multiplicativo de una matriz. Estas propiedades se aplicaron para resolver sistemas lineales mediante matrices.

12.3 Cuando se emplearon sistemas de ecuaciones lineales para descomponer una expresión racional en fracciones parciales, se consideraron cuatro casos con respecto a los factores del denominador: (i) todos son lineales y ninguno se repite; (ii) todos son lineales y algunos se repiten; (iii) todos son lineales y cuadráticos y ninguno se repite; (iv) todos son lineales y cuadráticos y algunos cuadráticos se repiten.

12.4 El estudio de sucesiones y series se basó en el concepto de función. Se introdujo la notación sigma y se empleó para escribir una serie en forma abreviada.

12.5 El principio de inducción matemática fue la base de las demostraciones por inducción matemática de fórmulas, desigualdades, enunciados y teoremas.

12.6 Para las sucesiones aritméticas y geométricas se obtuvieron fórmulas para el N-ésimo elemento y para las sumas de las series asociadas. Se empleó la inducción matemática en las demostraciones de las fórmulas para el N-ésimo elemento. Después se resolvieron enunciados de problemas que tienen estas series como modelos matemáticos.

12.7 El teorema del binomio, demostrado mediante inducción matemática, se aplicó para desarrollar $(a + b)^n$ en valores positivos de n, y se presentó la fórmula para encontrar un término particular en tal desarrollo.

12.8 Se aplicó la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita y se mostró cómo puede emplearse para expresar un decimal periódico inconmensurable como una fracción. También se resolvieron enunciados de problemas que tienen una serie geométrica infinita como modelo matemático. Otra serie infinita, la serie binomial, nos permitió desarrollar $(1 + b)^n$ cuando n es cualquier número real y $|b| < 1$. La serie binomial y las series para sen x, cos x y e^x se utilizaron para calcular valores aproximados de números irracionales.

▸ EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 a 4, encuentre el conjunto solución del sistema mediante el método de eliminación. Si las ecuaciones son inconsistentes o dependientes, indique si ese es el caso.

1. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y - 2z = 4 \\ 6x + y - z = 21 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 14 \\ 4x - 3y - z = 2 \\ 14x - 10y - 9z = 10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - 3y - 6z = 7 \\ 2x - y - 4z = 3 \\ 3x - 2y - 5z = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 3y - 5z = 4 \\ 6x + 2y - 3z = 7 \\ 3x - 5y + 9z = 5 \end{cases}$

En los ejercicios 5 a 8, utilice el método de reducción de Gauss para hallar el conjunto solución del sistema. Si las ecuaciones son inconsistentes o dependientes, indique si ese es el caso.

5. $\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 4 \\ 4x + 2y + 7z = 1 \\ 5x - 9y - 3z = -11 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ 6x + 4y + 3z = 3 \\ 3x - 6y + z = -2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} w + x + y + 3z = 3 \\ 3w + x - y = 0 \\ 2w - 2x - y + 6z = 4 \\ 4w - x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2w + 2x - z = 3 \\ w + 2x - 2z = 2 \\ w + y + z = 0 \\ w - x - 2z = -4 \end{cases}$

En los ejercicios 9 a 11, el sistema tiene más variables que ecuaciones. Emplee el método de reducción de Gauss para determinar el conjunto solución del sistema.

9. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -1 \\ -3x + 4y - 4z = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 5x - y - 3z = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3w + x + 2y - 2z = 6 \\ 2w - 3x - 4y + 3z = 1 \\ w + 2x + 3y - 5z = 6 \end{cases}$

En los ejercicios 12 a 14, el sistema tiene más ecuaciones que variables. Determine por medio del método de reducción de Gauss, si las ecuaciones son consistentes o inconsistentes. Si son consistentes, encuentre el conjunto solución.

12. $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 9 \\ 5x + 8y = 7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 8 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 6y - 6z = 9 \\ x + 2y - 6z = 9 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x - 4y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 6x + 3y + 4z = 8 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$

En los ejercicios 15 y 16, evalúe el determinante.

15. (a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

16. (a) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 17 a 20, obtenga el producto.

17. (a) $2\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $-4\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

18. (a) $-3\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $3\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

19. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

20. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 21 y 22, la matriz dada es H. Pruebe que H es invertible, encuentre H^{-1}, y muestre que $HH^{-1} = I_2$.

21. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 22. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 23 y 24, la matriz dada es H. Determine si H es invertible. Si H es invertible, calcule H^{-1} y muestre que $HH^{-1} = I_3$.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 24. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 25 a 28, resuelva el sistema de ecuaciones mediante matrices. Calcule la inversa de la matriz de coeficientes.

25. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 2y - 3z = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 3x + y = 5 \\ 2y - 3z = -5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 3z = -2 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 10 \\ 2x - 3y - 4z = 8 \\ 6x - 5y - 2z = 6 \end{cases}$

En los ejercicios 29 a 34, descomponga la fracción en fracciones parciales.

29. $\dfrac{2x^2 - 15x - 32}{(x - 1)(x^2 + 6x + 8)}$

30. $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x - 1}{x^2 - 6x + 9}$

31. $\dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 - x - 2}$

32. $\dfrac{x^2 - 3x + 6}{2x^3 - 3x^2 - 2x + 3}$

33. $\dfrac{x^4 + x^3 + x - 4}{x^4 + 2x^2 + 1}$

34. $\dfrac{x^4 - x^2 + 9}{x(x^2 + 3x + 3)^2}$

En los ejercicios 35 y 36, escriba los primeros seis elementos de la sucesión cuyo elemento general se proporciona.

35. $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2n - 1}{3^n}$

36. $a_n = (-1)^n\dfrac{n^2 + 1}{2n}x^{2n-1}$

En los ejercicios 37 y 38, escriba la serie y encuentre su suma.

37. $\displaystyle\sum_{i=2}^{7}\frac{i + 1}{i - 1}$ 38. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}\frac{3k}{2^k}$

En los ejercicios 39 y 40, escriba la serie con notación sigma (no es única la solución).

39. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{16}x^8$

40. $-x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{7}x^5 + \frac{1}{10}x^7 - \frac{1}{13}x^9 + \frac{1}{16}x^{11}$

En los ejercicios 41 a 44, halle la suma de la serie.

41. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10}3\left(\frac{1}{2}\right)^j$ 42. $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}(3k + 1)$

43. $\sum_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{3}i + 3\right)$ **44.** $\sum_{i=1}^{10} (1.01)^i$

En los ejercicios 45 a 48, encuentre el número.

45. (a) $\frac{12!}{4!\ 9!}$ (b) $\frac{4! + 5!}{3! + 5!}$

46. (a) $\frac{3!\ 7!}{9!}$ (b) $\frac{4! + 5!}{6!}$

47. (a) $\binom{9}{3}$ (b) $\binom{40}{36}$

48. (a) $\binom{10}{4}$ (b) $\binom{18}{16}$

En los ejercicios 49 a 52, determine si los elementos forman una sucesión aritmética o geométrica. En caso de que así sea, escriba los siguientes dos elementos de la sucesión.

49. (a) 12, 16, 20 (b) 27, −9, 3

50. (a) 10, 4, −2 (b) 1, 5, 25

51. (a) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, 1$ (b) $\frac{2}{3}, 2, 3$

52 (a) 5.55, 4.44, 3.33 (b) $\frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$

53. Encuentre x de modo que los números $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$ y x formen una sucesión geométrica.

54. Encuentre x de modo que los números 25, x y 9 formen una sucesión geométrica.

55. Encuentre el primer elemento de una sucesión geométrica cuyo cuarto elemento es −3 y cuyo octavo elemento es −243.

56. Encuentre la suma de los enteros positivos entre 10 y 100.

57. En la sucesión aritmética cuyos tres primeros elementos son −8, −5 y −2, ¿qué lugar ocupa el elemento es el 52?

58. Inserte tres medios aritméticos entre −1 y 15.

59. Inserte tres medios aritméticos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

60. Inserte siete medios geométricos entre $\frac{1}{4}$ y 64.

61. Inserte cinco medios geométricos entre 192 y 3.

62. (a) Encuentre la media aritmética de 2 y 18. (b) Encuentre la media geométrica de 2 y 18.

63. (a) Encuentre la media aritmética de 32 y 8. (b) Encuentre la media geométrica de −32 y −8.

64. Encuentre la media del siguiente conjunto de calificaciones: 83, 91, 62, 75, 96, 84, 70 y 89.

65. Encuentre el trigésimo elemento de la sucesión aritmética cuyo decimoséptimo elemento es 7 y cuyo cuadragesimoséptimo elemento es 31.

66. Encuentre el octavo elemento de una sucesión geométrica cuyo tercer elemento es 192 y cuyo séptimo elemento es 12.

67. (a) ¿Cuántos números entre 100 y 500 son divisibles entre 8? (b) ¿Cuál es su suma?

68. Demuestre que los recíprocos de los elementos de una sucesión geométrica también forman una sucesión geométrica.

En los ejercicios 69 y 70, halle la suma de la serie geométrica infinita.

69. $0.4 + 0.02 + 0.001 + \ldots$

70. $2 + \sqrt{2} + 1 + \ldots$

En los ejercicios 71 y 72, exprese el decimal infinito periódico como una fracción.

71. $0.727\overline{272}$ **72.** $4.6636\overline{363}$

En los ejercicios 73 a 76, emplee inducción matemática a fin de demostrar que la fórmula es verdadera para todos los valores enteros positivos de n.

73. $\sum_{i=1}^{n} (4i + 1) = n(2n + 3)$

74. $\sum_{i=1}^{n} 4^i = \frac{4(4^n - 1)}{3}$

75. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i - 2)(3i + 1)} = \frac{n}{3n + 1}$

76. $\sum_{i=1}^{n} i(2i + 1) = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{6}$

En los ejercicios 77 y 78, desarrolle la potencia del binomio.

77. $(2x - y)^7$ **78.** $(a + 3b)^8$

En los ejercicios 79 y 80, escriba y simplifique los primeros cuatro términos del desarrollo del binomio.

79. $(x + 2x^{-1})^{20}$ **80.** $(4w^{-1} - \frac{1}{2}w^2)^{15}$

81. Encuentre el décimo término del desarrollo de $(t^{1/2} - t^{-1/2})^{15}$.

82. Encuentre el término medio del desarrollo de $(x^2 + 3y)^6$.

83. Encuentre el término que contiene a z^{12} en el desarrollo de $(z^2 - \frac{1}{2})^{11}$.

84. Encuentre el término que contiene a u^{40} en el desarrollo de $\left(2u^4 - \frac{1}{2u}\right)^{15}$.

En los ejercicios 85 y 86, calcule el valor de la función con aproximación de tres decimales mediante una serie binomial. Verifique la respuesta en una calculadora.

85. $\sqrt[3]{25}$ **86.** $\sqrt[4]{17}$

En los ejercicios 87 a 90, calcule el valor de la función con aproximación de cuatro decimales empleando las series (5), (6) o (7) de la Sección 12.8. Compruebe la respuesta en la calculadora.

87. sen 0.6 **88.** cos 1.3

89. $\sqrt{e}$ **90.** $\sqrt[3]{e}$

91. Encuentre una ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje y, si contiene los puntos (2, 3), (1, 0) y (5, 36). *Véase* la sugerencia para el ejercicio 39 de la Sección 12.1.

92. Determine una ecuación de la circunferencia que contiene los puntos (–2, –1), (5, 0) y (2, 1). *Véase* la sugerencia para los ejercicios 37 y 38 de la Sección 12.1.

En los ejercicios 93 y 94, resuelva el enunciado del problema empleando un sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático. No olvide escribir una conclusión.

93. Un hombre tiene un total de \$15 000 en tres inversiones: bonos que pagan 6% de interés anual; una cuenta de ahorros que paga 5% de interés anual; y un negocio. Hace dos años el negocio perdió 3% y su ingreso neto de las tres inversiones fue \$550. En el último año, el negocio ganó 9% y su ingreso neto de las tres inversiones fue \$910. ¿Cuánto tiene en cada una de las inversiones?

94. Determine la medida en grados de los ángulos de un triángulo, si la medida del primero es la mitad de la medida del segundo, y la medida de los tres es dos veces la medida de los dos primeros.

En los ejercicios 95 a 98, resuelva el enunciado del problema empleando como modelo matemático una sucesión o serie, aritmética o geométrica. No olvide escribir una conclusión.

95. Una pila de troncos tiene 30 en la capa inferior, 29 en la siguiente capa, y así sucesivamente, y la capa superior contiene 5 troncos; cada capa excepto la última consta de un tronco menos que la inmediata inferior. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

96. En cierto cultivo el número de bacterias crece 20% cada 30 minutos. Si hay 1 000 bacterias inicialmente, encuentre una fórmula para determinar el número de bacterias al final de t horas. ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo al final de 5 horas?

97. **(a)** ¿Cuántos ascendientes, con aproximación de miles, tuvo usted hace 20 generaciones, suponiendo que cada ascendiente aparece sólo una vez en su árbol genealógico? **(b)** ¿Cuál es el número total de ascendientes, con aproximación de miles, en las 20 generaciones?

98. Una persona empresta \$20 000 e hipoteca su casa. Está de acuerdo en que al final de cada año, durante 10 años, pagará \$2 000 del principal (capital) junto con el interés a una tasa de 15% anual del adeudo pendiente durante el año. ¿Cuál es la cantidad total que debe pagar en 10 años?

En los ejercicios 99 y 100, utilice la interpretación del coeficiente binomial proporcionado para los ejercicios 41 a 44 de la Sección 12.7.

99. ¿De cuántas maneras puede un tenor elegir tres arias de ópera de una selección de 10 que serán cantadas en una audición?

100. Doce personas están calificadas para operar una máquina que requiere cuatro personas a la vez. ¿Cuántos grupos diferentes de cuatro personas pueden operar la máquina?

En los ejercicios 101 y 102, resuelva el enunciado del problema empleando una serie geométrica infinita como modelo matemático. No olvide escribir una conclusión.

101. Una hoja de papel se partió a la mitad y después cada mitad se partió otra vez a la mitad, y así sucesivamente, hasta que la división en dos se haya efectuado 30 veces. Luego, cada uno de los pedazos de papel se coloca en una pila uno sobre otro. Si la hoja original tiene un espesor de 0.01 cm, ¿cuál es la altura de la pila con aproximación de kilómetros?

102. La trayectoria de cada oscilación de un péndulo, después de la primera, es 80% de la trayectoria de la oscilación anterior desde un lado al otro. Si la longitud de la trayectoria de la primera oscilación es de 18 pulg, y si la resistencia del aire finalmente lleva al péndulo al estado de reposo, ¿cuánto recorre el extremo móvil del péndulo antes del reposo?

103. Tres números cuya suma es 35 forman una sucesión geométrica. Si se resta 1 del primer número, 2 del segundo y 8 del tercero, las diferencias resultantes forman una sucesión aritmética. ¿Cuáles son los números?

104. Demuestre mediante inducción matemática que la siguiente desigualdad es verdadera para todos los valores enteros positivos de n: $2^{n+3} < (n + 3)!$.

105. Pruebe mediante inducción matemática que la siguiente fórmula es verdadera para todos los valores enteros positivos de n:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+3}{3} = \binom{n+4}{4}$$

106. Demuestre mediante inducción matemática que $x - y$ es un factor de $x^{2n} - y^{2n}$ para todos los valores enteros positivos de n.

Apéndice

A.1 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Una operación **binaria** en el conjunto R de números reales es una regla que asigna a dos números reales a y b cualesquiera, tomados en un orden definido, un número real c. La **adición** (o **suma**) es una operación binaria en R porque asigna a los números reales a y b un número, denotado por $a + b$, denominado **suma** de a y b. Los números a y b se llaman **sumandos** (o **términos**). La **multiplicación** también es una operación binaria en R porque la multiplicación asigna a los números reales a y b un número denotado por ab, denominado **producto** de a y b. Los números a y b se llaman **factores.** Los siguientes siete axiomas establecen las leyes que rigen las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto R. En los ejemplos ilustrativos subsecuentes a los axiomas, se emplean elementos del conjunto de números naturales, y se supone que se conocen la suma y el producto de los números naturales.

AXIOMA 1 *Leyes de cerradura*

Si a y b son números reales, entonces $a + b$ y ab son números reales únicos.

El Axioma 1 garantiza que siempre y cuando las operaciones de adición y multiplicación se efectúen sobre dos números reales, la suma y el producto son números reales. El Axioma 1 se denomina *leyes de cerradura* porque se dice que un conjunto es **cerrado** con respecto a una operación si, siempre que la operación se realiza sobre elementos del conjunto, se obtiene como resultado un elemento del conjunto.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

(a) El conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ no es cerrado con respecto a la adición porque siempre que la operación de adición se efectúa sobre elementos de este conjunto, no siempre se obtiene como resultado un elemento del conjunto. Por ejemplo, $2 + 3 = 5$, pero 5 no es elemento del conjunto.

(b) El conjunto de los números naturales pares es cerrado con respecto a la adición y a la multiplicación porque siempre que la adición o multiplicación se realiza sobre dos números naturales pares, la

suma y el producto son números naturales pares. Por ejemplo, 6 y 8 son números naturales pares, y $6 + 8 = 14$, y $6 \cdot 8 = 48$; 14 y 48 son números naturales pares. ◀

AXIOMA 2 ***Leyes conmutativas***

Si a y b son números reales, entonces

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba$$

El Axioma 2 establece que la suma y el producto de dos números reales no se afectan por el orden de los números.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

(a) Por la ley conmutativa para la adición, $4 + 9 = 9 + 4$.
(b) Por la ley conmutativa para la multiplicación, $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$. ◀

AXIOMA 3 ***Leyes asociativas***

Si a, b y c son números reales, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c$$

Aunque la adición y la multiplicación son operaciones binarias, las expresiones $a + b + c$ y abc son importantes porque los símbolos de agrupación (paréntesis y corchetes) pueden insertarse de cualquier forma posible sin afectar los resultados. Del Axioma 3 se deduce que la suma de tres números reales puede obtenerse agrupando los sumandos de dos formas, y que el producto de tres números reales puede obtenerse agrupando los factores de dos maneras.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) $2 + 3 + 4 = 2 + (3 + 4)$ $\quad 2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4$

$= 2 + 7$ $\quad = 5 + 4$

$= 9$ $\quad = 9$

(b) $3 \cdot 5 \cdot 6 = 3 \cdot (5 \cdot 6)$ $\quad 3 \cdot 5 \cdot 6 = (3 \cdot 5) \cdot 6$

$= 3 \cdot 30$ $\quad = 15 \cdot 6$

$= 90$ $\quad = 90$ ◀

AXIOMA 4 ***Ley distributiva***

Si a, b y c son números reales, entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

(a) Cuando se evalúa $4(7 + 2)$, los paréntesis se emplean para indicar que primero debe efectuarse la operación de adición de $7 + 2$ y entonces se multiplica la suma por 4. Por tanto, se tiene

$$4(7 + 2) = 4 \cdot 9$$

$$= 36$$

(b) Al evaluar $(4 \cdot 7) + (4 \cdot 2)$, los paréntesis indican que primero se realiza cada una de las multiplicaciones y después se suman los productos obtenidos. Entonces se tiene

$$(4 \cdot 7) + (4 \cdot 2) = 28 + 8$$

$$= 36$$

Observe que de los incisos (a) y (b) se concluye que

$$4(7 + 2) = (4 \cdot 7) + (4 \cdot 2)$$

y esta igualdad es un caso especial del Axioma 4. ◀

AXIOMA 5 ***Existencia de los elementos idénticos***

Existen dos números reales diferentes 0 y 1, denominados **idéntico aditivo** e **idéntico multiplicativo,** respectivamente, tales que para cualquier número real a,

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad a \cdot 1 = a$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

$$8 + 0 = 8 \quad \text{y} \quad 8 \cdot 1 = 8$$

◀

AXIOMA 6 *Existencia del inverso aditivo*

Para cada número real a, existe un número real, denominado **inverso aditivo de** a (u **opuesto de** a), denotado por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

El opuesto de 4 se denota por -4 y

$$4 + (-4) = 0$$

◀

AXIOMA 7 *Existencia del inverso multiplicativo*

Para cada número real a, excepto cero, existe un número real, denominado **inverso multiplicativo de** a (o **recíproco de** a), denotado por $\frac{1}{a}$, tal que

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 7

El recíproco de 9 es $\frac{1}{9}$ y

$$9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

◀

Los axiomas 1 a 7 se denominan **axiomas de campo,** y si estos axiomas son satisfechos por un conjunto, entonces el conjunto recibe el nombre de **campo** en las dos operaciones binarias implicadas. Así, el conjunto R es un campo en la adición y multiplicación. Para el conjunto Z de enteros, cada uno de los axiomas 1 a 6 se satisface, pero el axioma 7 no; por ejemplo, el entero 2 no tiene inverso multiplicativo

en Z. Por tanto, el conjunto de enteros no es campo en la adición y la multiplicación.

Los axiomas de campo no implican ningún orden de los números reales. Esto es, sólo mediante los axiomas de campo no se puede establecer que 2 es mayor que 1, que 3 es mayor que 2, y así sucesivamente. Sin embargo, se introduce un axioma que proporciona el concepto de que un número real es positivo. Se denomina *axioma de orden* porque la noción de número positivo se emplea en la Sección 1.1 para definir lo que significa que un número real sea *mayor que* o *menor que* otro.

AXIOMA 8 ***Axioma de orden***

En el conjunto de números reales existe un subconjunto denominado **números positivos** tal que

(i) si a es un número real, entonces exactamente uno de los siguientes tres enunciados se cumple:

$$a = 0 \qquad a \text{ es positivo} \qquad -a \text{ es negativo}$$

(ii) La suma de dos números positivos es positiva.
(iii) El producto de dos números positivos es positivo.

Como el conjunto R de números reales satisface el Axioma 8 y los axiomas de campo, se dice que R es un **campo ordenado.**

Los opuestos de los elementos del conjunto de números positivos forman el conjunto de *números negativos*, según se establece en la siguiente definición.

DEFINICIÓN **Número negativo**

El número real a es **negativo** si y sólo si $-a$ es positivo.

Se utiliza el término *menos* para referirse a un número negativo. Por ejemplo, -5 se lee "menos 5", así como "el opuesto de 5". La anotación $-(-5)$ se lee "el opuesto de menos 5". Entonces, en resumen, se emplea el símbolo $-$ de dos formas diferentes: (1) para denotar el opuesto de un número real, y (2) para denotar un número negativo. Si x es cualquier número real, $-x$ denota el opuesto de x. Observe que $-x$ no necesariamente es un número negativo; si $x = -3$, por ejemplo, entonces $-x = 3$.

Del Axioma 8 y de la definición anterior, se deduce que un número real es positivo, negativo o cero.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 8

En cada uno de los incisos siguientes, se tiene un enunciado que es una consecuencia inmediata de uno de los axiomas de campo, el axioma que se aplica está indicado a la derecha.

(a) $5 + (-5) = 0$; axioma del inverso aditivo (Axioma 6)
(b) $1 \cdot y = y$; elemento idéntico para la multiplicación (Axioma 5)
(c) $x + (y + 2) = (x + y) + 2$; ley asociativa para la adición (Axioma 3)
(d) $3 + (x + 4) = (x + 4) + 3$; ley conmutativa para la adición (Axioma 2)
(e) $2(5x) = (2 \cdot 5)x$; ley asociativa para la multiplicación (Axioma 3)
(f) $8(u + 12) = 8u + 8 \cdot 12$; ley distributiva (Axioma 4) ◂

EJERCICIOS A.1

En los ejercicios 1 a 24, la igualdad dada es consecuencia inmediata de uno de los axiomas de campo. Indique cuál axioma se aplica. Suponga que cada variable es un número real.

1. $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$
2. $(6 + 2) + 4 = 6 + (2 + 4)$
3. $8 + 0 = 8$
4. $1 \cdot y = y$
5. $(5 + 2) + 4 = (2 + 5) + 4$
6. $17 + 41 = 41 + 17$
7. $3(xy) = (3x)y$
8. $(7a)b = b(7a)$
9. $\pi + (-\pi) = 0$
10. $x + (y + x) = (y + x) + x$
11. $7 + (8 + 11) = 7 + (11 + 8)$
12. $b + (-b) = 0$
13. $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$
14. $x + 0 = x$
15. $3(a + b) = (a + b)3$
16. $11 + (y + 7) = (y + 7) + 11$
17. $a(b + 0) = ab$
18. $4(x + y) = 4x + 4y$
19. $0 \cdot 1 = 0$
20. $0 + 0 = 0$
21. $w + x(y + z) = w + (xy + xz)$
22. $(r + s)u + t = (s + r)u + t$
23. $(r + s) + (t + u) = r + [s + (t + u)]$
24. $(w + x) + (y + z) = [(w + x) + y] + z$

En los ejercicios 25 a 36, establezca cuando el conjunto dado es cerrado en la operación indicada y proporcione un ejemplo para ilustrar la respuesta.

25. El conjunto N de números naturales; adición
26. El conjunto de números negativos; adición
27. El conjunto de números naturales impares; multiplicación

28. El conjunto de números naturales impares; adición

29. {0}; adición

30. {0}; multiplicación

31. {1}; multiplicación

32. {1}; adición

33. {1, 2}; adición

34. {1, 2}; multiplicación

35. {0, 1}; multiplicación

36. {0, 1}; adición

Respuestas a los ejercicios impares

Ejercicios 1.1 (página 14)

1. (a) $\in$; (b) $\notin$; (c) $\in$; (d) $\notin$; **3.** (a) $N \subseteq Q$; (b) $Q \subseteq R$; (c) $N \subseteq Z$; (d) $Z \subseteq R$ **5.** (a) $\subseteq$; (b) $\not\subseteq$; (c) $\subseteq$; (d) $\subseteq$; **7.** (a) Q; (b) R; (c) Z; (d) $\emptyset$ **9.** (a) $\{12, 571\}$; (b) $\{12, \frac{5}{3}, 0, -38, 571, -\frac{1}{10}, 0.666, \ldots, 16.34\}$; (c) $\{\sqrt{7}, -\sqrt{2}, \pi\}$; (d) $\{12, 0, -38, 571\}$ **11.** $\{-10, -7, -\sqrt{5}, -2, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{3}, -1, 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \sqrt{2}, 3, 5, 21\}$ **13.** (a) $\{x \mid -9 < x < 8\}$; (b) $\{y \mid -12 < y < -3\}$; (c) $\{z \mid 4z - 5 < 0\}$ **15.** (a) $\{x \mid 2x + 4 \geq 0\}$; (b) $\{r \mid 2 \leq r < 8\}$; (c) $\{a \mid -5 < a - 2 \leq 7\}$ **17.** (a) $(2, +\infty)$; (b) $(-4, 4]$ **19.** (a) $(2, 12)$; (b) $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$ **21.** (a) $(2, 12)$; (b) $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$ **23.** (a) $(-4, 0]$; (b) $(-\infty, 7]$ **25.** (a) $\{x \mid 2 < x < 7\}$; (b) $\{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$; (c) $\{x \mid -5 < x \leq 4\}$; (d) $\{x \mid -10 \leq x < -2\}$ **27.** (a) $\{x \mid x \geq 3\}$; (b) $\{x \mid x < 0\}$; (c) $\{x \mid x > -4\}$, (d) el conjunto R de números reales **29.** (a) 7; (b) $\frac{3}{4}$; (c) $3 - \sqrt{3}$; (d) $3 - \sqrt{3}$ **31.** (a) 6; (b) 10; (c) 10; (d) 6 **33.** (a) t; (b) $-t$

Ejercicios 1.2 (página 29)

1. $\dfrac{-1}{x(x+h)}$ **3.** $\dfrac{-3}{(3x+3h+2)(3x+2)}$ **5.** $-\dfrac{8+h}{16(4+h)^2}$ **7.** $-\dfrac{3x^2+3hx+h^2}{x^3(x+h)^3}$ **9.** (a) 6 561; (b) 7 776; (c) $\frac{49}{169}$; (d) $\frac{373\,248}{125}$; **11.** (a) $-\frac{1}{125}$; (b) $\frac{1}{36}$; (c) 6; (d) 9 **13.** (a) 4; (b) -0.064; (c) $\frac{1}{56}$; (d) $-\frac{255}{16}$ **15.** (a) $\frac{34}{57}$; (b) 9 **17.** (a) 27; (b) 4; (c) 81 **19.** (a) $|x|^{3/2}y^2$; (b) $2s^2|t|^5$ **21.** (a) $9y^2|y-2|$; (b) $4(x-2)^2|2-y|$ **23.** $4(u+1)^2|u-4|$ **25.** $\dfrac{x+2}{2(x+1)^{3/2}}$ **27.** (a) $\dfrac{5x^3+15x^2}{(2x+5)^{3/2}}$ **29.** $\dfrac{9x^5+4x^3}{(3x^2+1)^{3/2}}$ **31.** $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$ **33.** $\dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}$ **35.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$ **37.** $\dfrac{h}{\sqrt{h+1}(h+2+2\sqrt{h+1})}$ **39.** $\dfrac{1}{(x+h)^{2/3}+x^{1/3}(x+h)^{1/3}+x^{2/3}}$ **41.** (a) $|x+3|-|x-3|$; (b) $x \geq 3$

Ejercicios 1.3 (página 40)

1. (a) $5+0i$; (b) $0+7i$; (c) $3+5i$; (d) $3-5i$ **3.** (a) $8-5i$; (b) $-8+5i$; (c) $-6+6i$; (d) $\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\sqrt{5}i$ **5.** (a) $12+3i$; (b) $1-2i$; **7.** (a) $-6+0i$; (b) $-5+8i$ **9.** $8+26i$ **11.** $-9+\sqrt{5}i$ **13.** (a) $-15+0i$; (b) $-4+0i$ **15.** $0-72i$ **17.** $(8-18\sqrt{2})+0i$ **19.** $53+0i$ **21.** $-24+5\sqrt{3}i$ **23.** $-18+18\sqrt{3}i$ **25.** $0+5i$ **27.** $-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$ **29.** $\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$ **31.** $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$ **33.** $\frac{3}{11}-\frac{\sqrt{2}}{11}i$ **35.** $\frac{5}{169}-\frac{12}{169}i$ **37.** (a) $-i$; (b) i; (c) -1 **39.** (a) $-i$; (b) i; (c) -1 **41.** $8-6i$ **43.** $16-6i$ **45.** 0 **47.** 0 **49.** (a) 10, 10; (b) -10, 10; (c) $10i$, $10i$; (d) a y b no son ambas negativas

Ejercicios 1.4 (página 48)

1. (a) primer cuadrante; (b) tercer cuadrante; (c) cuarto cuadrante; (d) segundo cuadrante **3.** (a) $(1, 2)$; (b) $(-1, -2)$; (c) $(-1, 2)$ (d) $(-2, 1)$ **5.** (a) $(2, -2)$; (b) $(-2, 2)$; (c) $(-2, -2)$; (d) no se aplica **7.** (a) $(-1, 3)$; (b) $(1, -3)$; (c) $(1, 3)$; (d) $(-3, -1)$ **9.** (a) recta horizontal 4 unidades arriba del eje x; (b) recta vertical 2 unidades a la izquierda del eje y; (c) puntos a la derecha del eje y; (d) puntos sobre y debajo del eje x **11.** (a) el eje x; (b) puntos a la izquierda de la recta vertical 4 unidades a la derecha del eje y (c) puntos sobre y arriba de la recta horizontal a 2 unidades debajo del eje x; (d) puntos en los cuadrantes primero y tercero **13.** (a) 7; (b) -7; **15.** (a) -4; (b) 4 **17.** (a) -10; (b) 6 **19.** (b) 5; (c) $(-\frac{1}{2}, 5)$ **21.** (b) 13; (c) $(\frac{11}{2}, -1)$ **23.** (a) $(-\frac{3}{2}, 2)$ **25.** (a) $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ **27.** $|\overline{AB}| = 10$; $|\overline{BC}| = \sqrt{17}$; $|\overline{CA}| = 13$ **29.** $\sqrt{26}$; $\frac{1}{2}\sqrt{89}$; $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ **31.** $|\overline{AB}| = \sqrt{41}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{41}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{82}$, y $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$ **37.** $17\sqrt{2}$ **39.** $(-8, 12)$ **41.** -2 u 8

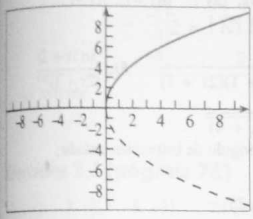
Ejercicios 1.5 (página 57)

9. Trace utilizando: (a) $[-20, 20]$ por $[-1, 10]$; (b) $[-1, 30]$ por $[-1, 10]$; (c) $[-20, 20]$ por $[-1, 10]$
11. Trace utilizando: (a) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$; (b) $[-20, 20]$ por $[-5, 1]$; (c) $[-100, 100]$ por $[-5, 40]$

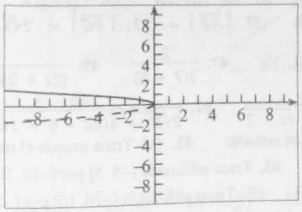
13. Trace utilizando: (a) [−20, 20] por [−1, 10]; (b) [−1, 30] por [−1, 10]; (c) [−20, 20] por [−1, 10]
15. Trace utilizando: (a) [−2, 21] por [−2, 21]; (b) [−2, 21] por [−21, 2]; (c) [−2, 21] por [−2, 21]

En los ejercicios 17-23, se muestra la gráfica de (i). La parte continua es la gráfica de (ii); la parte punteada es la gráfica de (iii).

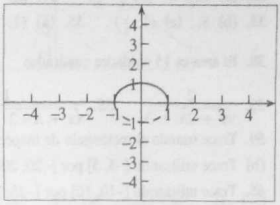
17. Simétrica con respecto al eje x



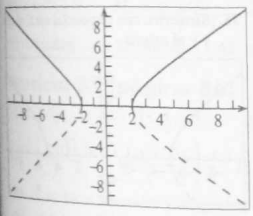
19. Simétrica con respecto al eje x



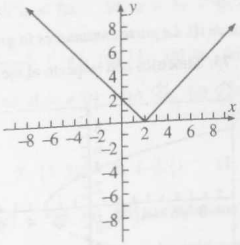
21. Simétrica con repecto al eje x, al eje y y al origen.



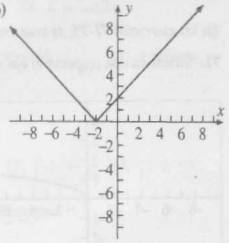
23. Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen



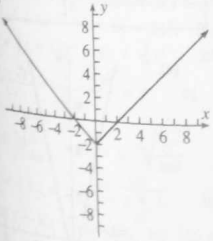
25. (a)



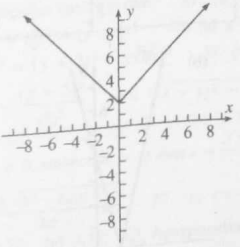
25. (b)



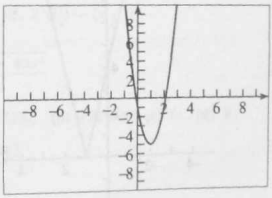
25. (c)



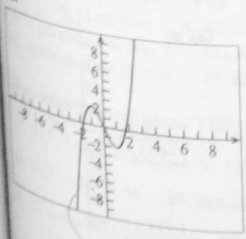
25 (d)



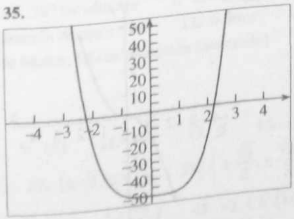
27. Todas son simétricas con respecto al origen.
29. Todas son simétricas con respecto al eje y.
31.



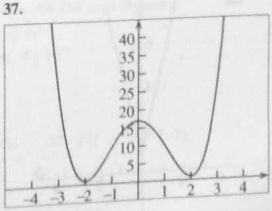
33.



35.



37.



Ejercicios de repaso para el Capítulo 1 (página 59)

1. (a) Q; (b) $\emptyset$; (c) N; (d) Q **3.** (a) $\{15\}$; (b) $\{-4, 15, 0\}$; (c) $\{-\frac{1}{3}, 2, -5, 0.75, \frac{1}{2}\}$; (d) $\{-\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\}$
5. (a) $(-\infty, 4]$; (b) $(2, 8)$; (c) $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$; (d) $(1, 5]$ **7.** (a) 7; (b) $\sqrt{5}$; (c) $2-\sqrt{3}$; (d) $2-\sqrt{3}$
9. (a) $\{x \mid -4 < x < 6\}$; (b) $\{x \mid 3 \le x \le 11\}$; (c) $\{x \mid -10 \le x \le 10\}$; (d) $\{x \mid x < 0\}$ **11.** (a) 64; (b) 125
13. (a) $\frac{125}{729}$; (b) 81 **15.** $\frac{1}{32}$ **17.** $\frac{1}{12}$ **19.** $\frac{22}{9}$ **21.** $\frac{3}{5}$ **23.** (a) $2 \mid x \mid y^2 \mid z \mid^3$; (b) $\mid y + 1 \mid (x^2 + 4)$
25. (a) $18 + i$; (b) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3}i$ **27.** (a) $-21 + 0i$; (b) $10 - 10i$ **29.** $-\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$ **31.** (a) i; (b) $-i$; (c) -1
33. (b) 5; (c) $(5, \frac{1}{2})$ **35.** (a) $(1, -2)$ **37.** $\mid \overline{AB} \mid = \sqrt{37}$; $\mid \overline{BC} \mid = 2\sqrt{5}$; $\mid \overline{CA} \mid = 5$

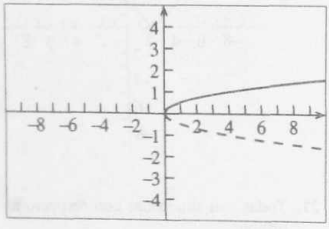
39. El área es 15 unidades cuadradas **41.** No **47.** $\dfrac{2}{7(7+h)}$ **49.** $\dfrac{-2}{(2x+2h+1)(2x+1)}$ **51.** $\dfrac{3x(3x+2)}{(2x+1)^{3/2}}$

53. $\dfrac{2}{\sqrt{9+2h}+3}$ **55.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+h-2}+\sqrt{x-2}}$ **57.** $\dfrac{4h-3}{2\sqrt{3h+4}(2h+6+3\sqrt{3h+4})}$

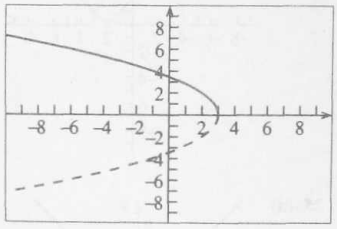
59. Trace usando el rectángulo de inspección estándar **61.** (a) Trace usando el rectángulo de inspección estándar;
(b) Trace utilizando $[-5, 5]$ por $[-20, 20]$ **63.** Trace utilizando $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
65. Trace utilizando $[-10, 10]$ por $[-25, 25]$ **67.** Trace utilizando $[-10, 10]$ por $[-25, 25]$
69. Trace utilizando $[-0.5, 1.5]$ por $[-0.25, 1.25]$

En los ejercicios 71-75, se muestra la gráfica de (i). La parte continua es la gráfica de (ii); la parte punteada es la gráfica de (iii).

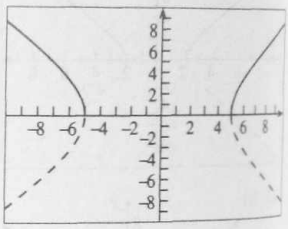
71. Simétrica con respecto al eje x



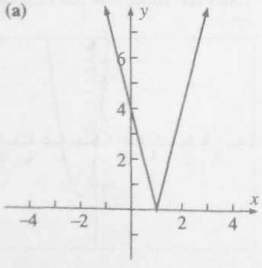
73. Simétrica con respecto al eje x



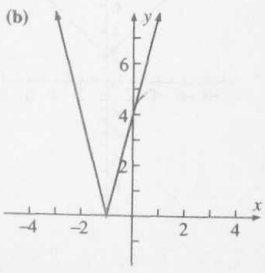
75. Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen



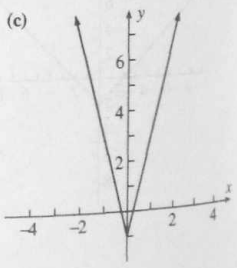
77. (a)



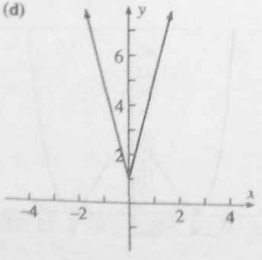
(b)



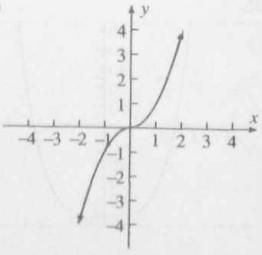
(c)



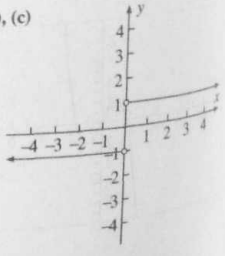
(d)



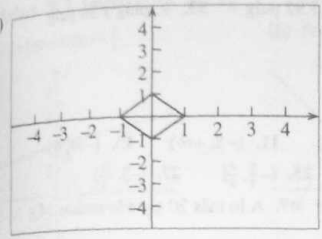
79. (a)



(b), (c)

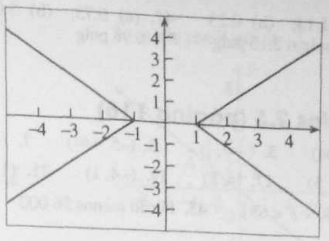


81. (b)



(c) un rombo

83. (b)



Ejercicios 2.1 (página 72)

1. $\{-\frac{7}{2}\}$ 3. $\{\frac{8}{3}\}$ 5. $\{3\}$ 7. $\{2\}$ 9. $\{3\}$ 11. $\varnothing$ 13. $\{-\frac{13}{49}\}$ 15. $\{2\}$ 17. $\{2\}$ 19. $\{2\}$ 21. $\{-1\}$

23. $\{3\}$ 27. $x = \frac{3}{4}b, a \neq 0$ 29. $y = a + 3b, a \neq 2b$ 31. $x = 3a - 5b, a \neq -b$ 33. $h = \dfrac{2A}{a + b}$

35. $r = \dfrac{E - IR}{I}$ 37. $p = \dfrac{fq}{q - f}$ 39. $r = \dfrac{a - s}{l - s}$ 41. (a) 11; (b) 6; (c) 1; (d) $y = 16 - \dfrac{x}{20}$; (e) 4 galones;

(f) 240 millas; (g) 320 millas 45. (a) $\{x \mid x \in R, x \neq 0\}$; (b) $\varnothing$; (c) $\varnothing$

Ejercicios 2.2 (página 86)

1. $\{-7, 7\}$ 3. $\{-\frac{2}{5}\sqrt{15}, \frac{2}{5}\sqrt{15}\}$ 5. $\{0, \frac{1}{4}\}$ 7. $\{3, 5\}$ 9. $\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\}$ 11. $\{-\frac{6}{7}\}$ 13. $\{-1, 4\}$ 15. $\{1 \pm \sqrt{3}\}$

17. $\left\{\dfrac{2 \pm \sqrt{14}}{5}\right\}$ 19. $\left\{\dfrac{1 \pm i}{2}\right\}$ 21. $\{2 \pm \sqrt{3}i\}$ 23. (a) 361, las raíces son reales y diferentes;

(b) 52, las raíces son reales y diferentes; 25. (a) 0, las raíces son reales y diferentes;

(b) -31, las raíces son imaginarias y conjugadas complejas una de la otra 27. $\{4, -1\}$ 29. $\{-2, \frac{-5}{3}\}$

31. (a) $x^2 + 6x + 3^2 = (x + 3)^2$; (b) $x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 = (x - \frac{5}{2})^2$ 33. (a) $x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 = (x - \frac{1}{3})^2$;

(b) $x^2 + \frac{1}{5}x + (\frac{1}{10})^2 = (x + \frac{1}{10})^2$ 35. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{26})^2$ 37. $(x - 1)^2 = 4 \cdot \frac{5}{12}(y - 2)$

39. $\dfrac{(x - 2)^2}{3^2} + \dfrac{(y - 1)^2}{2^2} = 1$ 41. $\dfrac{(x + 2)^2}{1^2} - \dfrac{(y + 5)^2}{(\frac{5}{2})^2}$ 43. $\sqrt{(x + 1)^2 - 2^2}$ 45. $2\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x - 3)^2}$

47. $r = \sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ 49. $v = \sqrt{\dfrac{rF}{kM}}$ 51. Si $a = 0$, entonces $x = 0$; sino $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 40a^2}}{10a}$

53. $x = y + 2 \pm 2\sqrt{y^2 + y + 1}$ 55. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a}$ 57. (a) $s = -16t^2 + 128t$; (b) 192 pie; (c) 6; (d) 8

59. (a) $s = -16t^2 + 76t + 68$; (c) 156 pie; (d) 2.75; (e) 4.75; (f) Aproximadamente 5.52

Ejercicios 2.3 (página 96)

1. $\frac{11}{2}, \frac{3}{2}$ 3. 12 cm, 8 cm 5. 423 adultos, 387 estudiantes 7. \$16 250 en el primero, \$8 750 en el segundo

9. 24 g de aleación de oro a 80%, 16 g de aleación de oro a 55% 11. 6 litros 13. $\frac{25}{3}$ m^3

15. aproximadamente 10.85 m 17. 650 en básico, 590 en redacción (avanzado) 19. 8 y 10

Ejercicios 2.4 (página 107)

1. $\{64\}$ 3. $\varnothing$ 5. $\{\frac{7}{2}\}$ 7. $\{4\}$ 9. $\{3\}$ 11. $\{4\}$ 13. $\varnothing$ 15. $\{0, 3\}$ 17. $\{7\}$ 19. $\{-7\}$

21. $\{3, \frac{5}{3}\}$ 23. $\{0, 3\}$ 25. $\{\pm 1, \pm 2\}$ 27. $\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}$ 29. $\left\{\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$ 31. $\{-5, \frac{1}{2}\}$

33. $\left\{2, 3, -1 \pm \sqrt{3}i, -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$ 35. $\{1\}$ 39. $1, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 41. $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$ 43. $\pm 3, \pm 3i$

45. (a) −1.14; (b) 0.23 **47.** (a) 0.73; (b) 3.08 **49.** 4 pie **51.** 3.92 pulg **53.** 40 pulg y 30 pulg
55. 1.21 pulg o 2.16 pulg **57.** 0.98 pulg

Ejercicios 2.5 (página 116)

1. $[5, +\infty)$ **3.** $(-\infty, \frac{7}{2})$ **5.** $(-5, +\infty)$ **7.** $(-\infty, \frac{17}{2}]$ **9.** $(-\infty, -\frac{17}{3})$ **11.** $(-8, +\infty)$ **13.** $(-\infty, 4]$
15. $(-\infty, 5)$ **17.** $[4, 8)$ **19.** $(-4, 1)$ **21.** $(1, 4)$ **23.** $[-6, -4]$ **25.** $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$ **27.** $[-3, \frac{21}{5})$
41. $\{F \mid 50 < F < 68\}$ **43.** Por lo menos \$6 000 **45.** Por lo menos 49 **47.** A lo más 20 g y a lo menos 14 g

Ejercicios 2.6 (página 124)

1. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ **3.** $(-3, 4)$ **5.** $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$ **7.** $[1, 3]$ **9.** $[-4, 1]$ **11.** $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$
13. $[-2, \frac{3}{2}]$ **15.** $(-\infty, +\infty)$ **17.** $(-\infty, \frac{5}{3}) \cup (2, +\infty)$ **19.** $(-3, 1) \cup (4, +\infty)$ **21.** $(-\infty, -4] \cup [0, 4]$
23. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ **25.** $(-\infty, +\infty)$ **27.** $(-3, -2) \cup (2, 3)$ **29.** $[-3, -1] \cup [2, 3] \cup [5, +\infty)$ **31.** $(1.15, +\infty)$
33. $(-\infty, -3.11) \cup (-0.75, 0.86)$ **35.** $(-\infty, -0.38) \cup (0.44, 2.94) \cup (4, +\infty)$ **37.** $(-\infty, -3.58) \cup (-1.71, 1) \cup (2.29, +\infty)$
39. entre 0.4 y 7.6 segundos después de ser lanzado **41.** (a) antes de 0.4 segundos y después de 4.3 segundos de ser lanzado; (b) después de 5.3 segundos de ser lanzado **43.** más que 10 y menos que 70
45. Si x pies es la longitud de cualquier lado, $100 \le x \le 120$ **47.** Si x metros es el ancho del terraplen, $8.8 \le x \le 13.5$
49. Si x pulgadas es la longitud de los cuadrados que han de ser cortados, $0.9 \le x \le 1.3$ o $2.1 \le x \le 2.5$

Ejercicios 2.7 (página 133)

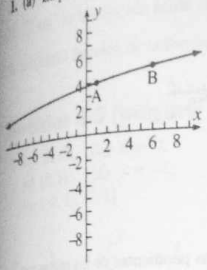
1. $\{1, 9\}$ **3.** $\{\frac{4}{3}, 4\}$ **5.** $\{-5, \frac{5}{2}\}$ **7.** $\{-1, 8\}$ **9.** $\{1, 3\}$ **11.** $\{\frac{9}{4}, 4\}$ **13.** $\left\{1, 2, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$ **15.** $[-5, 5]$
17. $(-\infty, -6) \cup (8, +\infty)$ **19.** $[2, 8]$ **21.** $(-1, 8)$ **23.** $(-\infty, -1) \cup (8, +\infty)$ **25.** $(-\infty, -\frac{16}{3}) \cup (-\frac{8}{3}, +\infty)$ **27.** $[1, \frac{9}{5}]$
29. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ **37.** $(-3, -1) \cup (1, 3)$ **39.** $[-1, 2] \cup [3, 6]$ **41.** $(-\infty, -5] \cup [-3, 3] \cup [5, +\infty)$
43. $x = -1$ o $x = 2$ **45.** $x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$

Ejercicios de repaso para el Capítulo 2 (página 135)

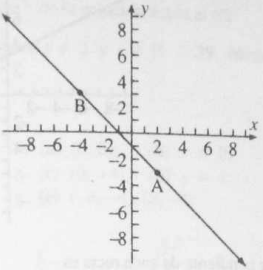
1. $\{\frac{11}{4}\}$ **3.** $x = 3$ **5.** $x = \frac{4}{3}$ **7.** $\{\pm\frac{8}{7}\}$ **9.** $\{5, -2\}$ **11.** $\{\frac{1}{2}, -\frac{6}{5}\}$ **13.** $\left\{\frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}i}{3}\right\}$
17. $\{3\}$ **19.** $\varnothing$ **21.** $\{5, -3\}$ **23.** $\{5, -3\}$ **25.** $\{2\}$ **27.** $\{-2\}$ **29.** $\{2, -1 \pm \sqrt{3}i\}$ **31.** $\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}\}$
33. $\left\{-1, -2, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}\right\}$ **35.** $\{6\}$ **37.** $\{-\frac{1}{27}, \frac{1}{8}\}$ **39.** $\{-6, 1\}$ **41.** $\{\frac{1}{2}, 2\}$ **43.** $x = -\dfrac{By + C}{A}, A \neq 0$
45. $x = b \pm a$ **47.** $x = \frac{1}{2}$ o $x = \dfrac{y - 1}{3}$ **49.** (a) $x^2 - 8x + 4^2 = (x - 4)^2$; (b) $y^2 + 3y + (\frac{3}{2})^2 = (y + \frac{3}{2})^2$;
(c) $x^2 + \frac{5}{3}x + (\frac{5}{6})^2 = (x + \frac{5}{6})^2$ **51.** (a) 0; las raíces son reales, racionales e iguales;
(b) 196; las raíces son reales, racionales y diferentes; (c) −23; las raíces son imaginarias y conjugadas complejas una de la otra
53. 1.75 **55.** 1.76 **57.** $(-\infty, 4]$ **59.** $(-\infty, -\frac{5}{4})$ **61.** $[12, +\infty)$ **63.** $(-2, 1)$ **65.** $(-4, 5]$
67. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ **69.** $(-1, 6)$ **71.** $(\infty, \frac{1}{6}) \cup (\frac{17}{6}, +\infty)$ **73.** $(-5, 5)$ **75.** $(-\infty, -1] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$
77. $(-\infty, 0)$ **79.** $(-2, -1) \cup (4, 5)$ **81.** $(x - 3)^2 = 4(\frac{1}{16})(y + 68)$ **83.** $\dfrac{(x - 4)^2}{4^2} + \dfrac{(y + 2)^2}{2^2} = 1$
85. $\dfrac{(x + 1)^2}{5^2} - \dfrac{(y + 2)^2}{(\sqrt{10})^2} = 1$ **87.** $4\sqrt{(x + 1)^2 - (\frac{1}{2})^2}$ **91.** (a) \$195.60; (b) \$200.80; (c) \$232;
(d) $y = 180 + 0.52x$; (f) \$223.16; (h) Aproximadamente 48 millas **93.** \$18 **95.** $\frac{4}{3}$ litros **97.** 18 cm
99. 1.33 cm o 5.87 cm **101.** 1.53 pie **103.** no mayor que 7 cm

Ejercicios 3.1 (página 151)

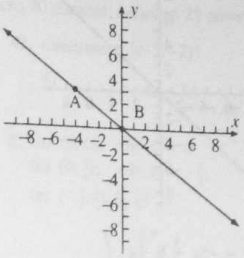
1. (a) La pendiente es $\frac{1}{3}$



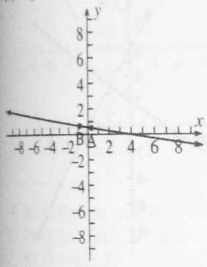
(b) la pendiente es -1



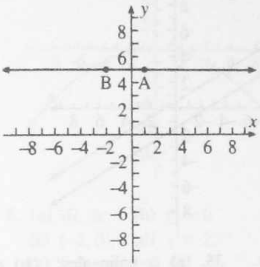
3. (a) la pendiente es $-\frac{3}{4}$



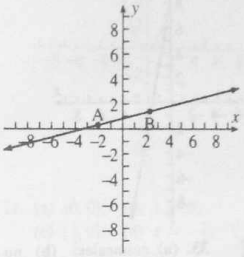
(b) la pendiente $= -\frac{1}{7}$



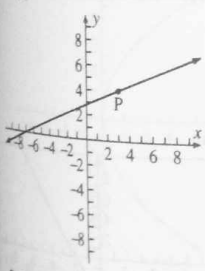
5. (a) la pendiente es 0



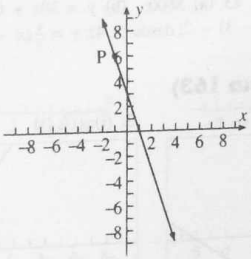
(b) la pendiente es $\frac{1}{4}$



7. (a)

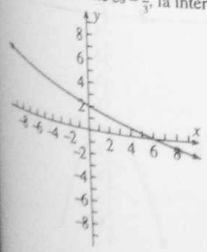


(b)

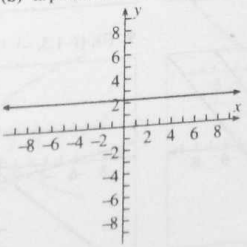


9. (a) $4x - y - 11 = 0$; (b) $11x - 4y - 9 = 0$ **11.** (a) $2x + 3y - 3 = 0$; (b) $6x - 3y + 8 = 0$ **13.** (a) $y = -7$; (b) $x = 2$ **15.** (a) $4x - 3y + 12 = 0$; (b) $x - y = 0$ **17.** $2x - y + 7 = 0$ **19.** $5x + y - 14 = 0$

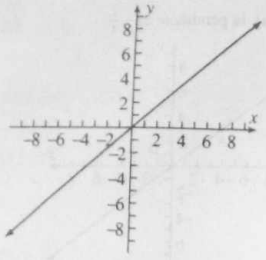
21. (a) la pendiente es $-\frac{1}{3}$, la intercepción y es 2



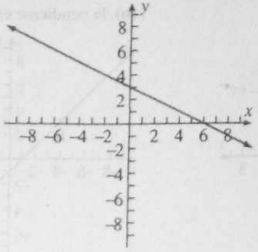
(b) la pendiente es 0, la intercepción y es $\frac{9}{4}$



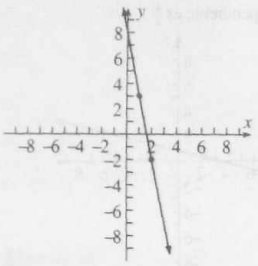
23. (a) la pendiente es $\frac{7}{8}$, la intercepción y es 0



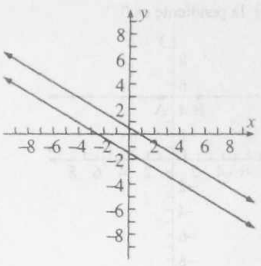
(b) la pendiente es $-\frac{1}{2}$, la intercepción y es 3



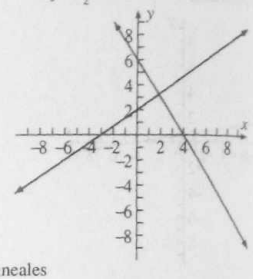
25. $y = -5x + 8$



27. La pendiente de cada recta es $-\frac{3}{5}$



29. Las pendientes de las rectas son $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$



31. $\pm\frac{2}{3}$ 33. (a) colineales; (b) no colineales 35. (a) no colineales; (b) colineales

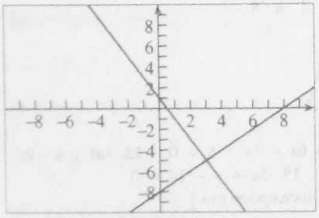
37. las pendientes de dos lados son $-\frac{1}{2}$; las pendientes de los otros dos lados son $\frac{3}{5}$ 39. el área es 5 unidades cuadradas

41. (a) $y = 25x + 3\,000$ 43 (a) \$600; (b) $y = 30x + 600$ 45. 8

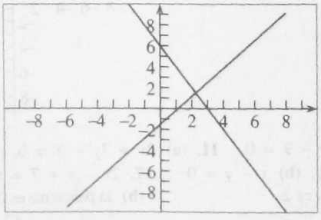
49. desde (3, –2): $y = -\frac{9}{5}(x - 3) - 2$; desde (2, 4): $y = \frac{9}{2}(x - 2) + 4$; desde (–1, 1): $y = 1$

Ejercicios 3.2 (página 163)

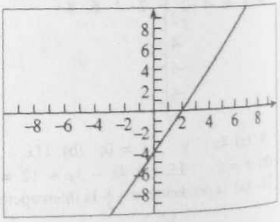
1. (i); {(3, –5)}



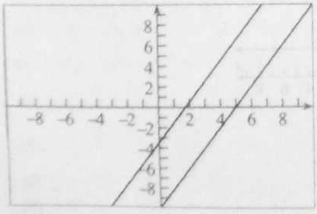
3. (i); $\{(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})\}$



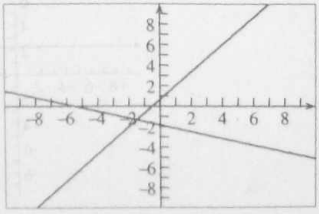
5. (iii)



7. (ii)



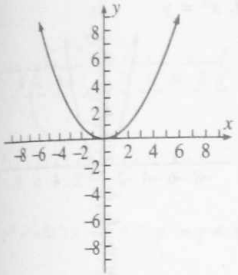
9. (i); {(–1.5, –1.3)}



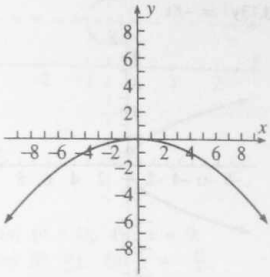
11. $\{(1, 0)\}$ **13.** $\{(0, -2)\}$ **15.** $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})\}$ **17.** $\{(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})\}$ **19.** $\{(-4, 7)\}$ **21.** $\{(-\frac{12}{17}, \frac{42}{17})\}$ **23.** $\{(-\frac{15}{4}, -\frac{15}{2})\}$
25. $\{(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3})\}$ **27.** \$6.30 por libra de té; \$2.60 por libra de café **29.** 20; \$120
31. $\frac{40}{3}$ cm^3 de la solución ácida al 15%; $\frac{800}{3}$ cm^3 de la solución ácida al 6% **33.** muchacha 20 minutos; hermano 25 minutos
35. cualquier fracción de la forma $\frac{t}{2t-4}$, donde $t \neq 2$ y $t \neq 0$ **39.** inconsistente **41.** consistente; $\{(-3, -2)\}$

Ejercicios 3.3 (página 170)

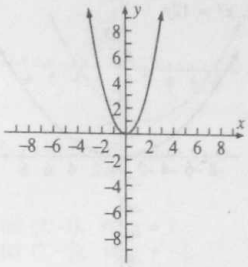
1. (a) (0, 0); (b) $x = 0$;
(c) (0, 1); (d) $y = -1$;
(e) (-2, 1), (2, 1)



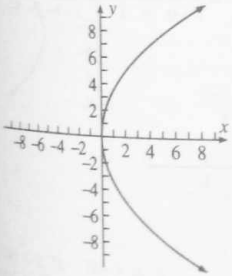
3. (a) (0, 0); (b) $x = 0$;
(c) (0, −4); (d) $y = 4$
(e) (−8, −4), (8, −4)



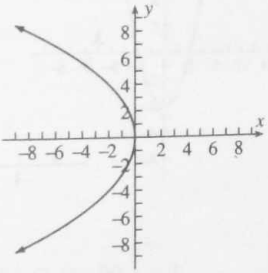
5. (a) (0, 0); (b) $x = 0$;
(c) $(0, \frac{1}{4})$; (d) $y = -\frac{1}{4}$;
(e) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$



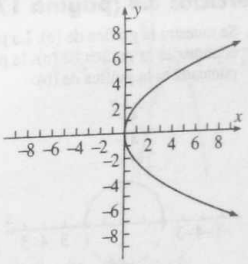
7. (a) (0, 0); (b) $y = 0$;
(c) (3, 0); (d) $x = -3$;
(e) (3, −6) (3, 6)



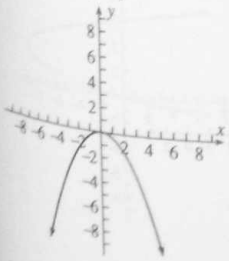
9. (a) (0, 0); (b) $y = 0$
(c) (−2, 0); (d) $x = 2$;
(e) (−2, −4); (−2, 4)



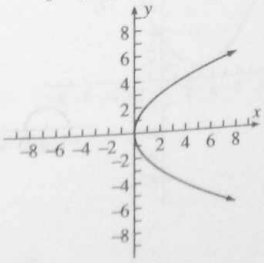
11. (a) (0, 0); (b) $y = 0$;
(c) $(\frac{5}{4}, 0)$; (d) $x = -\frac{5}{4}$;
(e) $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}), (\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$



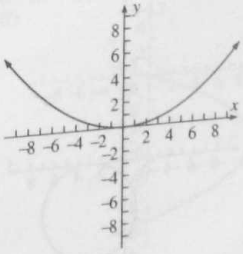
13. (a) (0, 0); (b) $x = 0$;
(c) $(0, -\frac{2}{3})$; (d) $y = \frac{2}{3}$;
(e) $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$



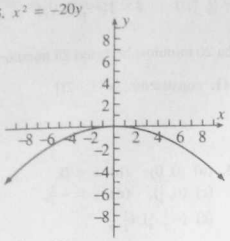
15. (a) (0, 0); (b) $y = 0$;
(c) $(\frac{9}{8}, 0)$; (d) $x = -\frac{9}{8}$;
(e) $(\frac{9}{8}, -\frac{9}{4}), (\frac{9}{8}, \frac{9}{4})$



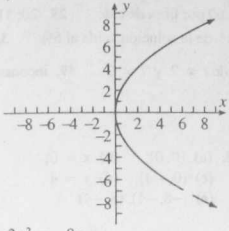
23. $x^2 = 16y$



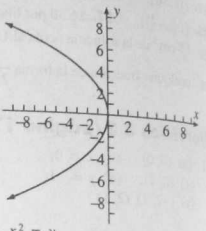
25. $x^2 = -20y$



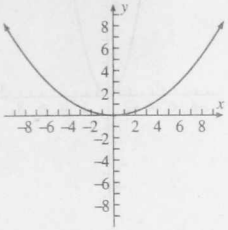
27. $y^2 = 8x$



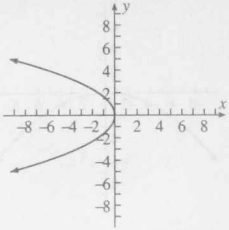
29. $3y^2 = -20x$



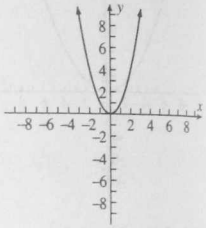
31. $x^2 = 12y$



33. $3y^2 = -8x$



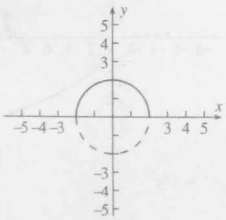
35. $x^2 = y$



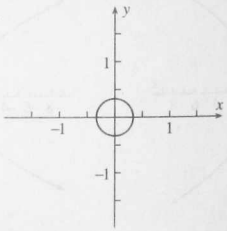
37. $\frac{32}{45}$ pulg **39.** 16.6 m **43.** (a) $-\frac{5}{2}$; (b) $x^2 = -10y$

Ejercicios 3.4 (página 177)

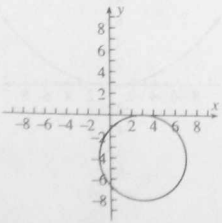
1. Se muestra la gráfica de (c). La parte continua es la gráfica de (a); la parte punteada es la gráfica de (b).



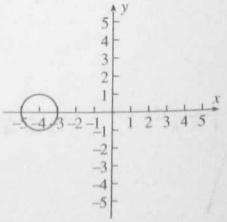
3.



5.



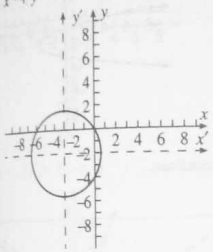
7.



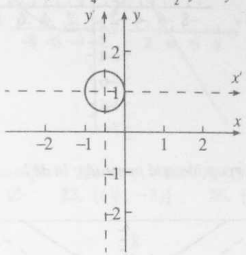
15. $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; $x^2+y^2-8x+6y=0$ 17. $(x+5)^2+(y+12)^2=9$; $x^2+y^2+10x+24y+160=0$
19. $x^2+(y-7)^2=1$; $x^2+y^2-14y+48=0$ 21. $(x-1)^2+(y-2)^2=13$ 23. $(x-5)^2+(y+1)^2=13$
25. $(3,4)$; 4 27. $(-1,-5)$; $2\sqrt{2}$ 29. $(0,-\frac{2}{3})$; $\frac{5}{3}$ 33. circunferencia 35. el conjunto vacío 37. punto $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$
39. $y=\frac{4}{3}(x+4)+3$ 41. $y=-\frac{3}{4}(x-5)+1$ 45. $D^2+E^2>4F$

Ejercicios 3.5 (página 184)

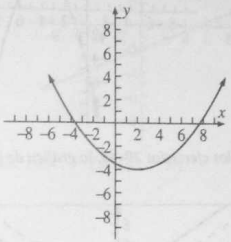
1. $x'^2+y'^2=13$; $x'=x+3$, $y'=y+2$



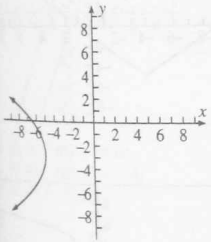
3. $x'^2+y'^2=\frac{1}{4}$; $x'=x+\frac{1}{2}$, $y'=y-1$



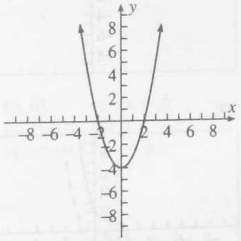
5. $x'^2=8y'$; $x'=x-2$, $y'=y+4$



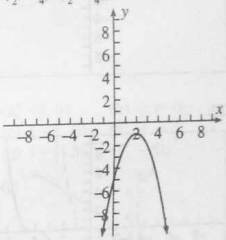
7. $y'^2=-6x'$; $x'=x+5$, $y'=y+3$



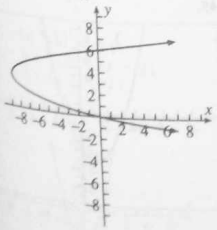
9. (a) $(0,-4)$; (b) $x=0$;
(c) $(0,\frac{15}{4})$; (d) $y=-\frac{17}{4}$;
(e) $(\frac{1}{2},-\frac{15}{4})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{15}{4})$;
(f)



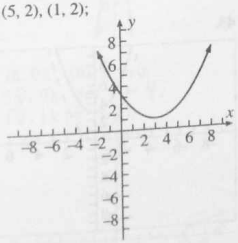
11. (a) $(2,-1)$; (b) $x=2$;
(c) $(2,-\frac{5}{4})$; (d) $y=-\frac{3}{4}$;
(e) $(\frac{5}{2},-\frac{5}{4})$, $(\frac{3}{2},-\frac{5}{4})$;
(f)



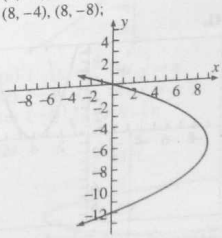
13. (a) $(-9,3)$; (b) $y=3$;
(c) $(-\frac{39}{4},3)$; (d) $x=-\frac{37}{4}$;
(e) $(-\frac{39}{4},\frac{7}{2})$, $(-\frac{35}{4},\frac{5}{2})$;
(f)



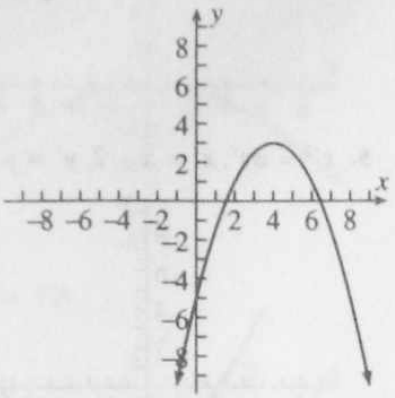
15. (a) $(3,1)$; (b) $x=3$;
(c) $(3,2)$; (d) $y=0$;
(e) $(5,2)$, $(1,2)$;
(f)



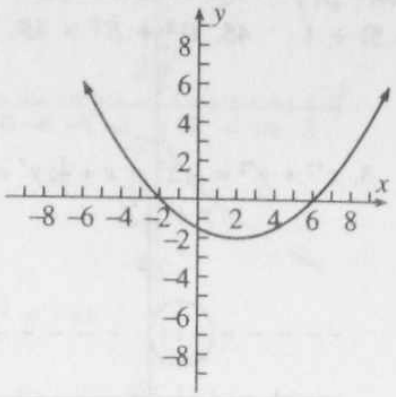
17. (a) $(9,-6)$; (b) $y=-6$;
(c) $(8,-6)$; (d) $x=10$;
(e) $(8,-4)$, $(8,-8)$;
(f)



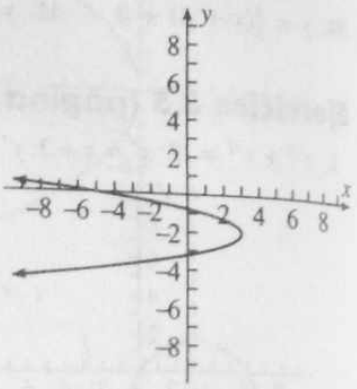
19. (a) $(4, 3)$; (b) $x = 4$;
(c) $(4, \frac{5}{2})$; (d) $y = \frac{7}{2}$;
(e) $(5, \frac{5}{2})$; $(3, \frac{5}{2})$;
(f)



21. (a) $(2, -2)$; (b) $x = 2$;
(c) $(2, 0)$; (d) $y = -4$;
(e) $(6, 0)$, $(-2, 0)$;
(f)

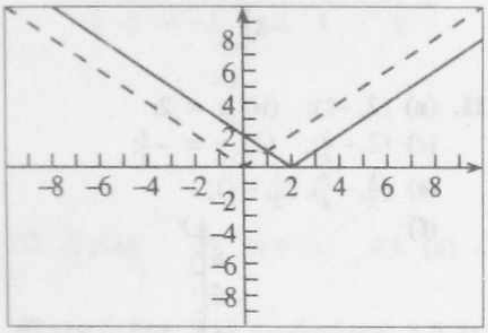


23. (a) $(3, -2)$; (b) $y = -2$;
(c) $(\frac{23}{8}, -2)$; (d) $x = \frac{25}{8}$;
(e) $(\frac{23}{8}, -\frac{7}{4})$, $(\frac{23}{8}, -\frac{9}{4})$;
(f)

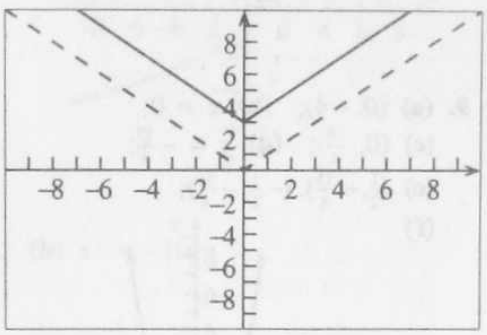


En los ejercicios 29-45, la gráfica de la primera ecuación está punteada; la de la segunda es continua.

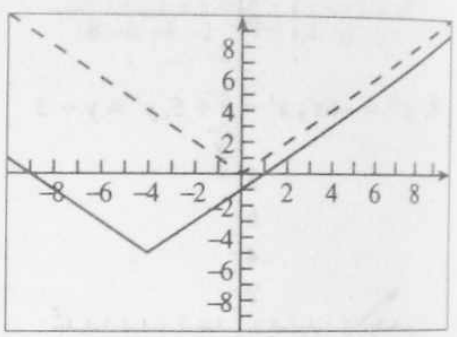
29.



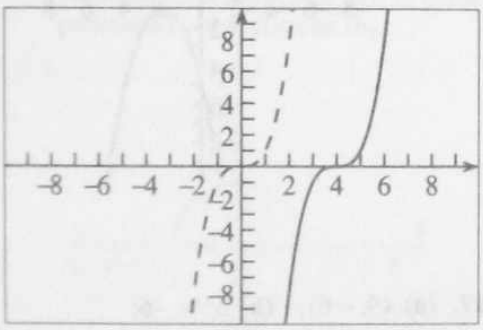
31.



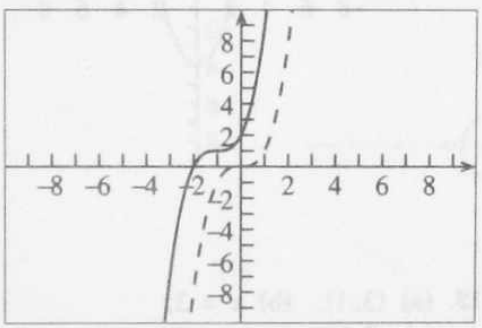
33.



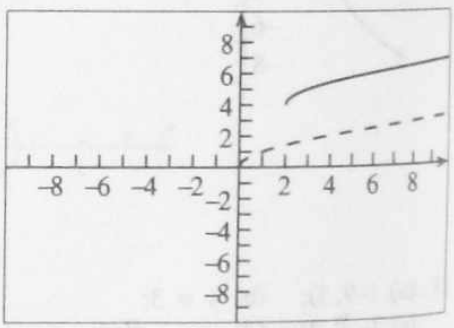
35.



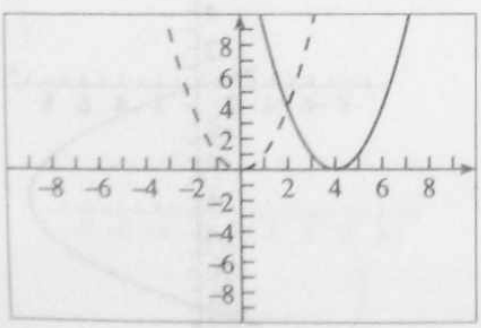
37.



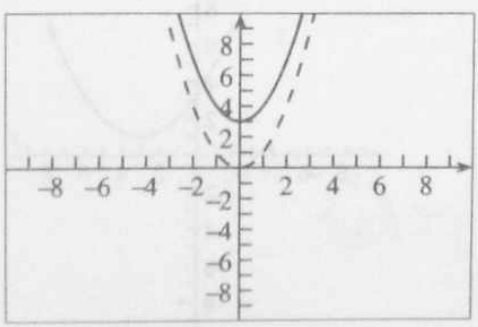
39.



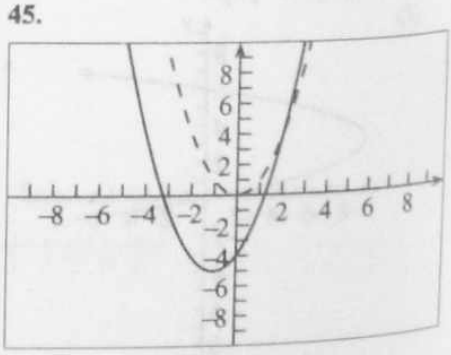
41.



43.



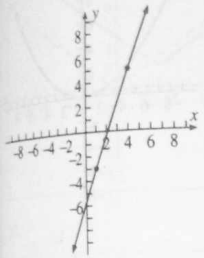
45.



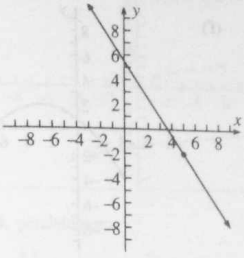
47. $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

Ejercicios de repaso para el Capítulo 3 (página 186)

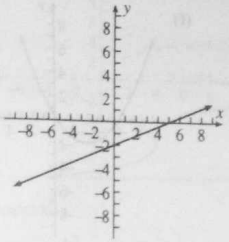
1. la pendiente es $\frac{8}{3}$; $8x - 3y - 17 = 0$



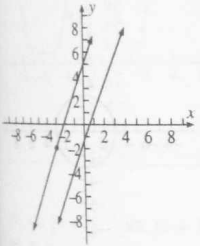
3. $3x + 2y - 11 = 0$



5. la pendiente es $\frac{2}{5}$; la intercepción y es -2

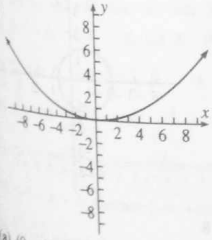


7. $7x - 3y + 15 = 0$

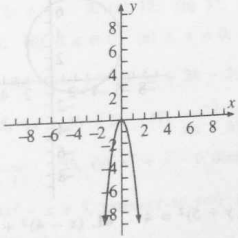


11. $-\frac{34}{3}$ 13. no 15. (i); $\{(3, -2)\}$ 17. (iii) 19. $\{(2, -5)\}$
21. $\varnothing$ 23. $\{(\frac{12}{5}, -3)\}$ 25. $\{(4, -2)\}$

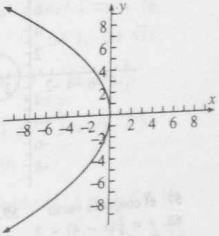
27. (a) $(0, 0)$; (b) $x = 0$;
(c) $(0, 4)$; (d) $y = -4$;
(e) $(8, 4)$, $(-8, 4)$;
(f)



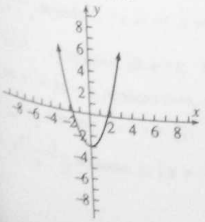
29. (a) $(0, 0)$; (b) $x = 0$;
(c) $(0, -\frac{1}{16})$; (d) $y = \frac{1}{16}$;
(e) $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$, $(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$;
(f)



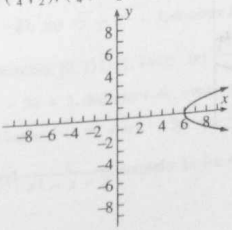
31. (a) $(0, 0)$; (b) $y = 0$;
(c) $(-\frac{5}{4}, 0)$; (d) $x = \frac{5}{2}$;
(e) $(-\frac{5}{2}, 5)$, $(-\frac{5}{2}, -5)$;
(f)



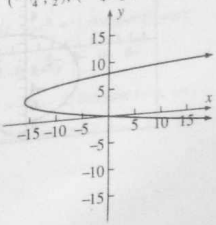
33. (a) $(0, -3)$; (b) $x = 0$;
(c) $(0, -\frac{11}{4})$; (d) $y = -\frac{13}{4}$;
(e) $(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4})$;
(f)



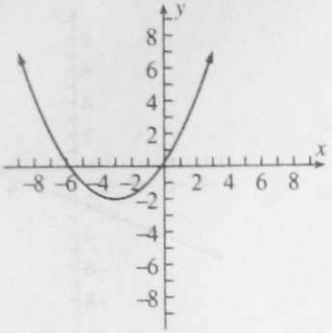
35. (a) $(6, 0)$; (b) $y = 0$;
(c) $(\frac{25}{4}, 0)$; (d) $x = \frac{23}{4}$;
(e) $(\frac{25}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{25}{4}, -\frac{1}{2})$;
(f)



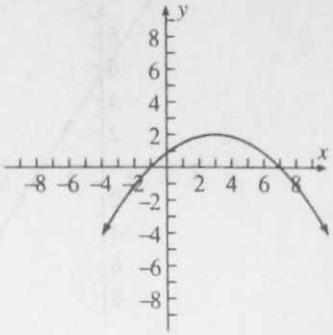
37. (a) $(-16, 4)$; (b) $y = 4$;
(c) $(-\frac{65}{4}, 4)$; (d) $x = -\frac{65}{4}$;
(e) $(-\frac{63}{4}, \frac{9}{2})$, $(-\frac{63}{4}, \frac{7}{2})$;
(f)



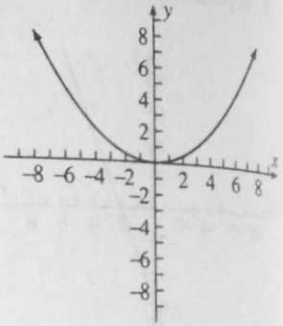
39. (a) $(-3, -2)$; (b) $x = -3$;
(c) $(-3, -1)$; (d) $y = -3$;
(e) $(-1, -1), (-5, -1)$;
(f)



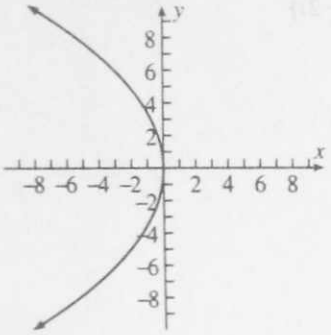
41. (a) $(3, 2)$; (b) $x = 3$;
(c) $(3, 0)$; (d) $y = 4$;
(e) $(7, 0), (-1, 0)$;
(f)



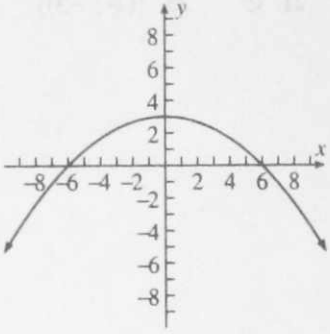
43. $x^2 = 8y$



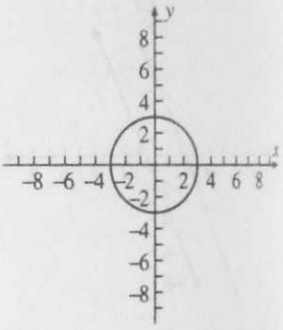
45. $y^2 = -12x$



47. $x^2 = -12(y - 3)$

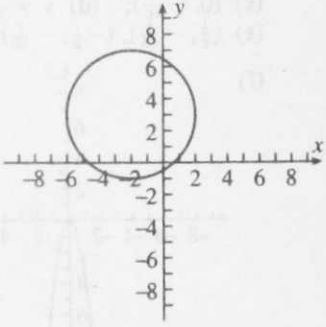


49. $(0, 0)$; 3

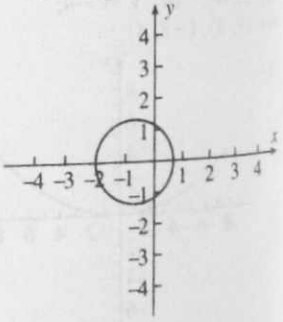


51. $(3, 0)$; 2

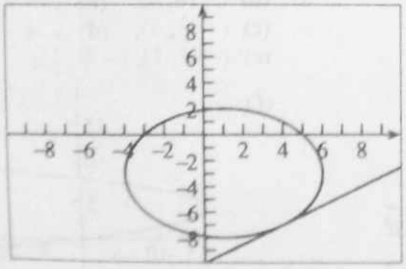
53. $(-2, 3)$; 4



55. $(-\frac{2}{3}, 0)$; $\frac{4}{3}$

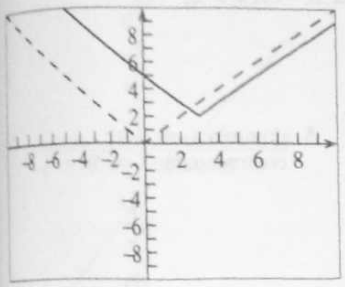


57. el conjunto vacío **59.** $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$ **61.** $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 8$
63. $y = \frac{3}{4}(x - 4) - 7$

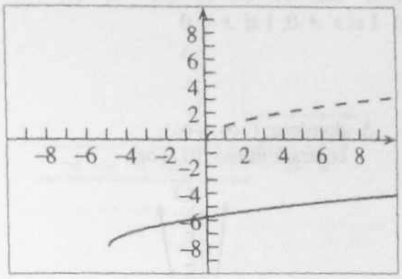


En los ejercicios 75-81, la gráfica de la primer ecuación está punteada; la de la segunda es continua.

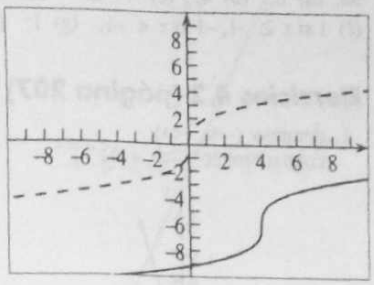
75.



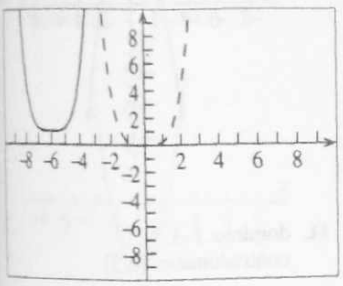
77.



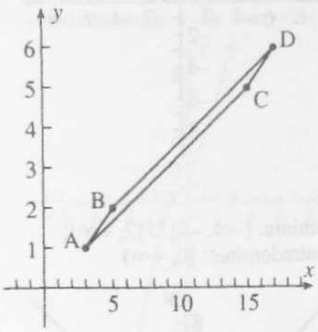
79.



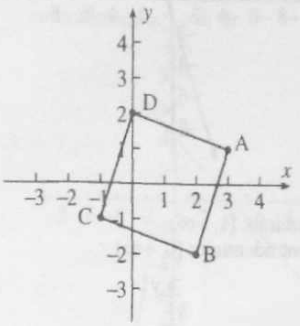
81.



83. paralelogramo



85. cuadrado



87. $y = \frac{4}{3}x + \frac{13}{6}$ **89.** $(x + 3)^2 = -24(y - 5)$ **91.** \$34 000 **93.** (a) 2 800; (b) 4 000

95. 28 días para A y 21 días para B **97.** 9π cm

Ejercicios 4.1 (página 197)

1. (a) 5; (b) −5; (c) −1; (d) $2a + 1$; (e) $2x + 1$ **3.** (a) 12; (b) 32; (c) $9x^4 - 30x^3 + 49x^2 - 40x + 16$; (d) $3x^4 - 5x^2 + 4$ **5.** (a) 3; (b) −1; (c) 9; (d) $a, a \neq 0$; (e) $x, x \neq 0$; (f) $\frac{x}{3}, x \neq 0$ **7.** (a) 1; (b) $\sqrt{11}$; (c) 2; (d) 5; (e) $\sqrt{4x + 9}$ **9.** (a) $4x - 2$; (b) $4x - 1$; (c) $2x + 2h - 2$; (d) $2x + 2h - 1$ **11.** (a) $\frac{6}{x}$; (b) $\frac{3}{2x}$; (c) $\frac{3}{x} + \frac{3}{h}$; (d) $\frac{3}{x + h}$ **13.** 2 **15.** $6x + 3h - 5$ **17.** $\frac{-3}{x(x + h)}$ **19.** $\frac{2}{\sqrt{2x + 2h + 3} + \sqrt{2x + 3}}$

21. $\frac{-2}{\sqrt{x + h + 1}\sqrt{x + 1}\,(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + h + 1})}$ **23.** (a) $x^2 + x - 6$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $-x^2 + x - 4$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x^3 - 5x^2 - x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ (d) $\frac{x - 5}{x^2 - 1}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 1\}$; (e) $\frac{x^2 - 1}{x - 5}$, dominio: $\{x \mid x \neq 5\}$ **25.** (a) $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; (b) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; (c) $\frac{x + 1}{x^2 - x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; (d) $\frac{x^2 + x}{x - 1}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; (e) $\frac{x - 1}{x^2 + x}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1\}$ **27.** (a) $\sqrt{x} + x^2 - 1$, dominio: $[0, +\infty)$; (b) $\sqrt{x} - x^2 + 1$, dominio: $[0, +\infty)$; (c) $\sqrt{x}(x^2 - 1)$, dominio: $[0, +\infty)$; (d) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$, dominio: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$; (e) $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$

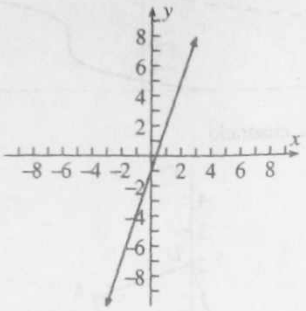
29. (a) $x^2 + 3x - 1$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 3x + 3$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $\frac{x^2 + 1}{3x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq \frac{2}{3}\}$; (e) $\frac{3x - 2}{x^2 + 1}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ **31.** (a) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$; (b) $\frac{-x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$; (c) $\frac{x}{x^2 - x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$;

(d) $\dfrac{x-2}{x^2+x}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0, x \neq 2\}$; (e) $\dfrac{x^2+x}{x-2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$

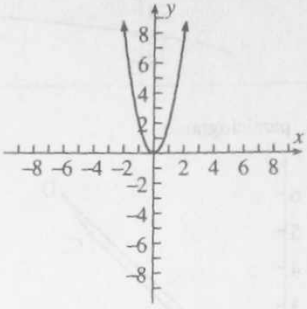
33. (a) 0; (b) 4; (c) $4-2x$ 35. (a) 1; (b) -1; (c) 1; (d) -1; (e) 1 si $x \leq 0$, -1 si $x > 0$; (f) 1 si $x \geq -1$, -1 si $x < -1$; (g) 1; (h) 1 si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$

Ejercicios 4.2 (página 207)

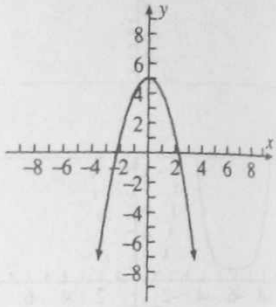
1. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, +\infty)$



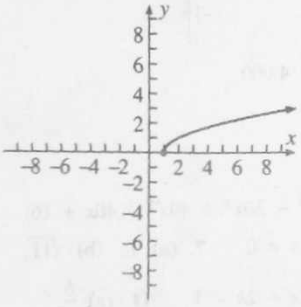
3. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[0, +\infty)$



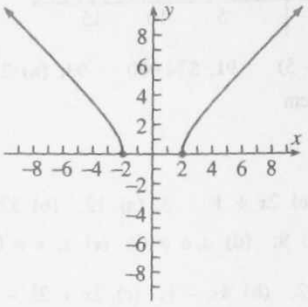
5. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, 5)$



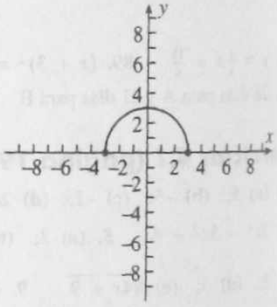
7. dominio: $[1, +\infty)$;
contradominio: $[0, +\infty)$



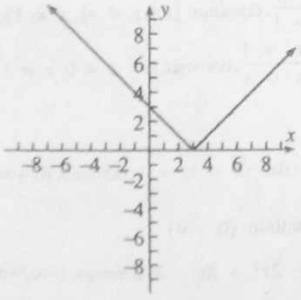
9. dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$;
contradominio: $[0, +\infty)$



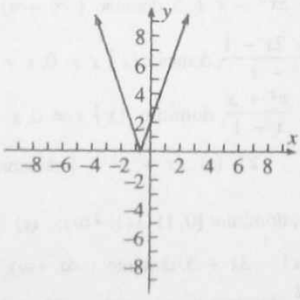
11. dominio: $[-3, 3]$;
contradominio: $[0, 3]$



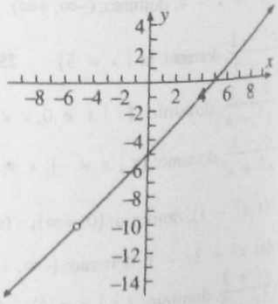
13. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[0, +\infty)$



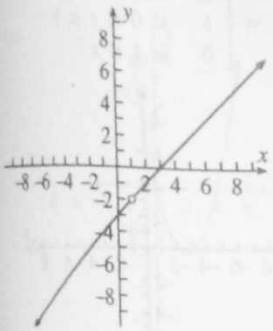
15. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[0, +\infty)$



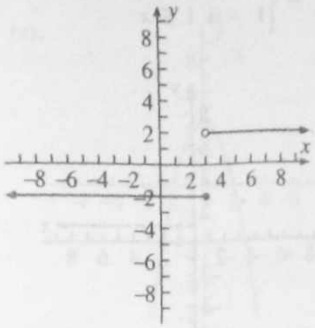
17. dominio: $\{x \mid x \neq -5\}$;
contradominio: $\{y \mid y \neq -10\}$



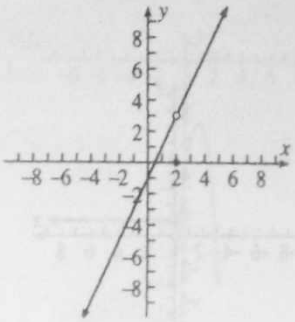
19. dominio: $\{x \mid x \neq 1\}$;
contradominio: $\{y \mid y \neq -2\}$



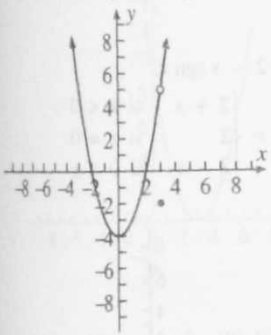
21. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $\{-2, 2\}$



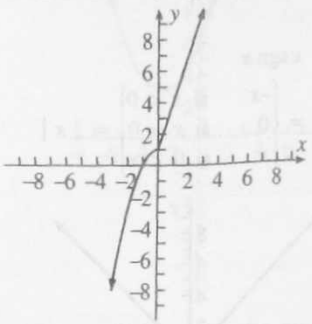
23. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $\{y \mid y \neq 3\}$



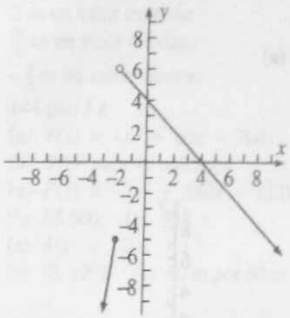
25. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[-4, +\infty)$



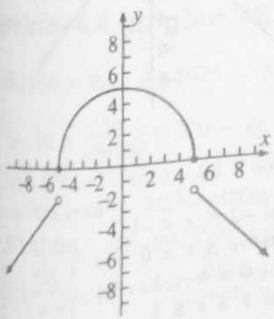
27. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, +\infty)$



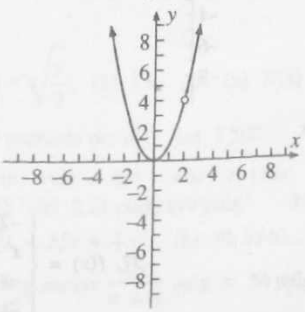
29. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, 6)$



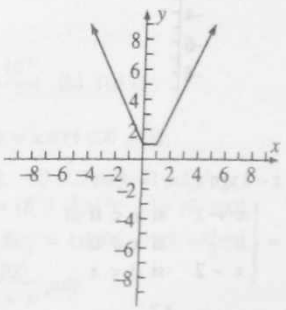
31. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, -2) \cup [0, 5]$



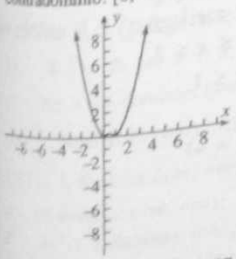
33. dominio: $\{x \mid x \neq 2\}$
contradominio: $[0, +\infty)$



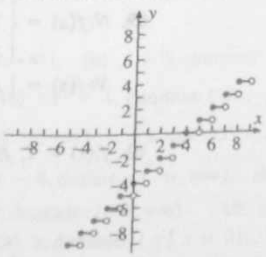
35. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[1, +\infty)$



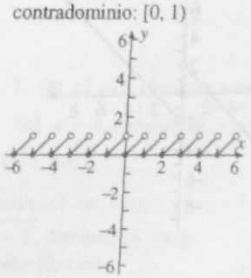
37. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[0, +\infty)$



39. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: {enteros}



41. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[0, 1)$



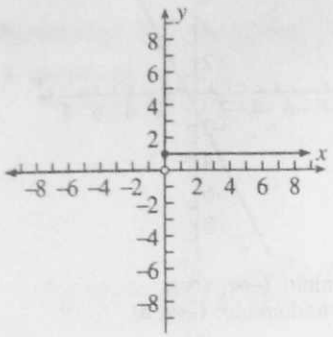
43. (a) par; (b) ninguno

45. (a) impar; (b) par

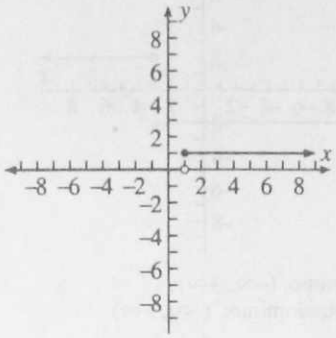
47. (a) impar; (b) par

49. (a) impar; (b) par; (c) par

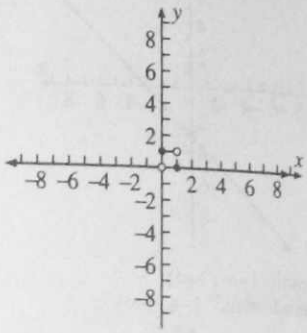
51. (a)



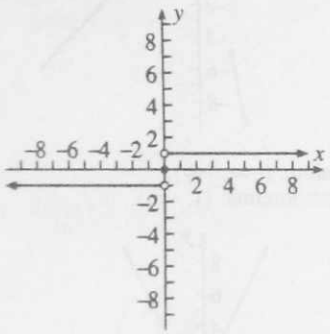
(b) $U(x-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$



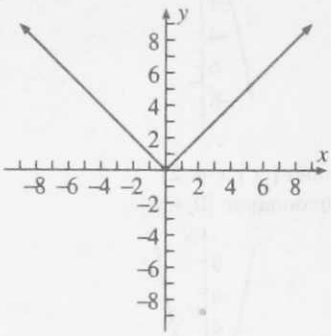
(c) $U(x) - U(x-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$



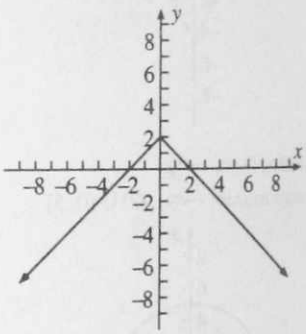
53. (a)



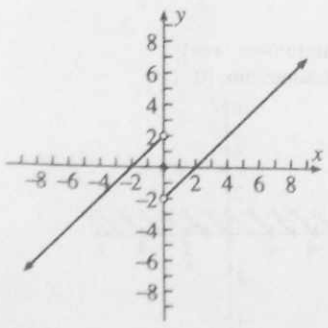
(b) $x \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x \end{cases} = |x|$



(c) $2 - x \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \end{cases}$



(d) $x - 2 \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$



57. $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } -2 \le x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

59. $N: f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x < 2; \\ x - 2 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

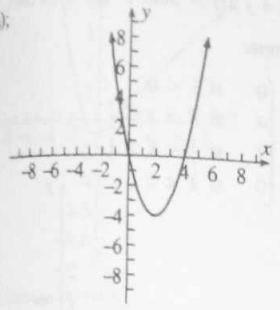
$V: f(x) = |x| \text{ si } -1 \le x \le 1$

61. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = -1$

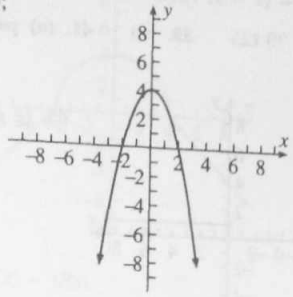
Ejercicios 4.3 (página 218)

1. $-1, 3$ 3. $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

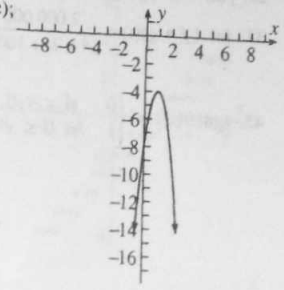
5. (a);



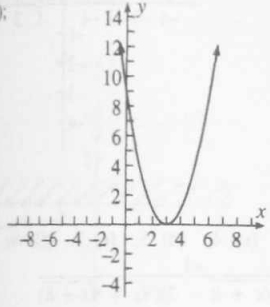
7. (a);



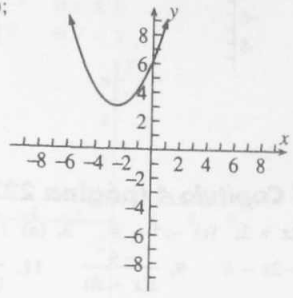
9. (c);



11. (b);



13. (c);



15. 3 es un valor mínimo
17. 2 es un valor máximo
19. $\frac{10}{3}$ es un valor máximo
21. $-\frac{9}{4}$ es un valor mínimo
23. 144 pie; 3 s
25. (a) $P(x) = -x^2 + 80x - 700$; (b) \$900 para 40 unidades
27. (a) $P(x) = -2x^2 + 380x - 12\,000$ (b) \$5 600; (c) \$95
29. (a) $A(x) = 120x - x^2$; (b) $[0, 120]$; (c) 60 m por 60 m

31. (a) $A(x) = 120x - \frac{1}{2}x^2$; (b) $[0, 240]$; (c) 60 m por 120 m **33.** (a) $A(x) = 96x - \frac{6}{5}x^2$; (b) $[0, 80]$; (c) Los lados paralelos a la cerca de división son 40 pie; los otros son 48 pie **35.** -7 y 7 **37.** 130; \$84 500

Ejercicios 4.4 (página 227)

1. (a) $P(x) = 45x$; (b) \$675 **3.** (a) $P(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$; (b) 1 s **5.** (a) $W(x) = \frac{3.2 \times 10^9}{x^2}$; (b) 165 lb

7. (a) $f(x) = \frac{9x}{490\,000}(5\,000 - x)$; (b) 17.6 personas por día; (c) 2 500 **9.** (a) $f(x) = kx(14\,000 - x)$; (b) $\{0, 1, 2, 3, \ldots 14\,000\}$; (c) 7 000 **11.** (a) $V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$; (b) $[0, 4]$; (c) 1.7 pulg, 91 pulg^3

13. (a) $V(x) = 4x^3 - 54x^2 + 180x$; (b) $[0, 6]$; (c) 2.21 pulg, 177 pulg^3 **15.** (a) $R = (8 - \frac{1}{100}x)^2x$; (b) $[0, 800]$; (c) 267, \$7 585 **17.** (a) $P = \frac{1}{100}(100 - x)^2x - 55x + \frac{4}{5}x^2$; (b) 30, \$540 **19.** (a) $L(r) = kr[200 - r(2 + \frac{1}{2}\pi)]$; (b) $\left[0, \frac{200}{2 + \pi}\right]$; (c) radio: $\frac{200}{4 + \pi}$ pulg $\approx$ 28 pulg, ancho: $\frac{400}{4 + \pi}$ pulg $\approx$ 56 pulg, largo: $\frac{200}{4 + \pi}$ pulg

21. (a) $A(x) = 3x + \frac{48}{x} + 30$; (b) $(0, +\infty)$; (c) 6.00 pulg por 9.00 pulg

Ejercicios 4.5 (página 235)

1. 15 3. $\frac{5}{3}$ **5.** (a) $x + 5$; dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ **7.** (a) $x^2 - 6$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 10x + 24$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ **9.** (a) $\sqrt{x^2 - 4}$, dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; (b) $x - 4$, dominio: $[2, +\infty)$

11. (a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$; (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$ **13.** (a) $|x + 2|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $|x| + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ **15.** (a) $x - 4$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x + 14$, dominio: $(-\infty, +\infty)$;

17. $x - 10$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^4 - 2x^2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ **19.** (a) $\sqrt{\sqrt{x} - 2} - 2$, dominio: $[6, +\infty)$; (b) $x^4 - 4x^2 + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ **21.** (a) x, dominio: $\{x \mid x \neq 0\}$; (b) $\sqrt[4]{x}$, dominio: $[0, +\infty)$

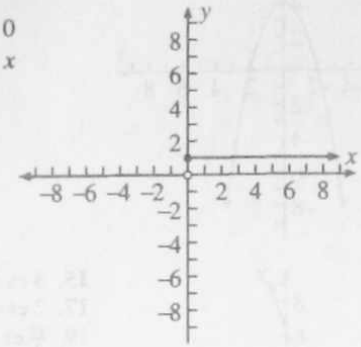
23. (a) $|x|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $|x + 2| + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$

25. $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = x^2$; $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4$ 27. $f(x) = x^3$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^3$, $g(x) = x - 2$

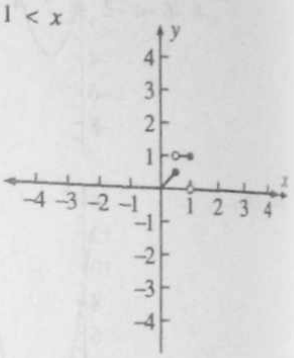
29. $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2 + 4x - 5$; $f(x) = (x-5)^4$, $g(x) = x^2 + 4x$ 31. (a) $(A \circ f)(t) = 36\pi t^2$; (b) 576π cm^2

33. (a) $(f \circ g)(t) = \dfrac{2\,000\,000}{(t^2+7t+100)^2}$; (b) 78.125 35. No 41. (a) par; (b) impar

43. $\operatorname{sgn}(U(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$



45. $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$



47. $2x - 3, -2x + 3$

Ejercicios de repaso para el Capítulo 4 (página 237)

1. (a) 3 (b) 0; (c) -5; (d) $-x^2 + 2x + 3$; (e) $-x^4 + 4$ 3. (a) 1; (b) 2; (c) 4; (d) 5; (e) 7; (f) $\sqrt{9x+7}$

5. (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 0 7. $-2x - h$ 9. $\dfrac{-4}{x(x+h)}$ 11. $\dfrac{-1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

13. (a) $x^2 + 4x - 7$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 4x - 1$, dominio: $(-\infty, +\infty)$;

(c) $4x^3 - 3x^2 - 16x + 12$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $\dfrac{x^2-4}{4x-3}$, dominio: $\{x \mid x \neq \frac{4}{3}\}$; (e) $\dfrac{4x-3}{x^2-4}$, dominio: $\{x \mid x \neq \pm 2\}$

15. (a) $\sqrt{x+2} + x^2 - 4$, dominio: $[-2, +\infty)$; (b) $\sqrt{x+2} - x^2 + 4$, dominio: $[-2, +\infty)$;

(c) $\sqrt{x+2}(x^2-4)$, dominio: $[-2, +\infty)$; (d) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$, dominio: $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$; (e) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}}$, dominio: $(-2, +\infty)$

17. (a) $\dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; (b) $\dfrac{1}{x^2} - \sqrt{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, dominio: $(0, +\infty)$;

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$, dominio: $(0, +\infty)$; (e) $\sqrt{x^5}$, dominio: $(0, +\infty)$ 19. (a) $16x^2 - 24x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$;

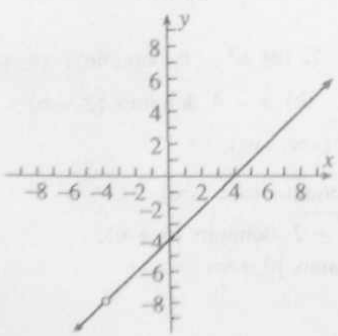
(b) $4x^2 - 19$, dominio: $(-\infty, +\infty)$ 21. (a) $\sqrt{x^2-2}$, dominio: $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$; (b) $x - 2$, dominio: $[-2, +\infty)$

23. (a) $\dfrac{1}{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; (b) $\dfrac{1}{|x|}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0\}$ 25. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $(-\infty, +\infty)$

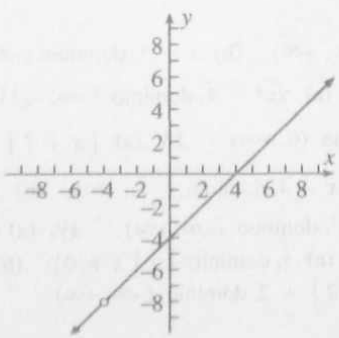
27. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[-4, +\infty)$ 29. dominio: $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, contradominio: $[0, +\infty)$

31. dominio: $[-4, 4]$; contradominio: $[0, 4]$ 33. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[0, +\infty)$

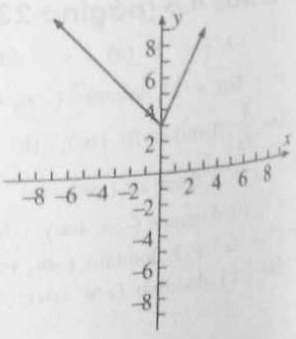
35. dominio: $\{x \mid x \neq -4\}$; contradominio: $\{y \mid y \neq -8\}$



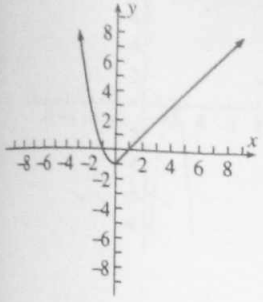
37. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $\{y \mid y \neq -8\}$



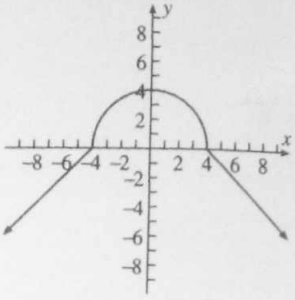
39. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[3, +\infty)$



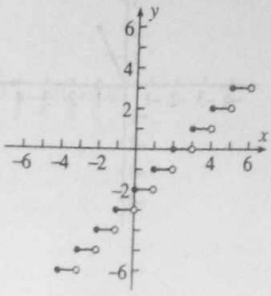
41. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[-1, +\infty)$



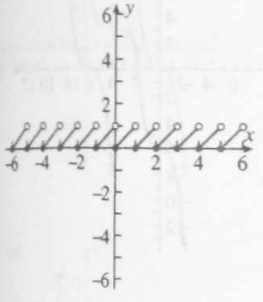
43. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $(-\infty, 4]$



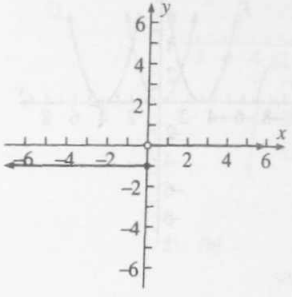
45. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: {enteros}



47. dominio: $(-\infty, +\infty)$; contradominio: $[0, 1)$



49. $\operatorname{sgn}(x) - U(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \end{cases}$



51. (a)
53. (b)
55. 6 es un valor máximo, ocurre en $x = -1$
57. -3 es un valor mínimo, ocurre en $x = -1$
59. 8

61. $f(x) = x^{1/3}$, $g(x) = 3x^2 - 2$; $f(x) = (x - 2)^{1/3}$, $g(x) = 3x^2$ **63.** (a) impar; (b) par; (c) ninguna; (d) impar

65. (a) $f(x) = 16t^2$; (b) 100 pie **67.** (a) $f(x) = \dfrac{x(10\,000 - x)}{100\,000}$; (b) 160 peces por semana **69.** 6 y 6

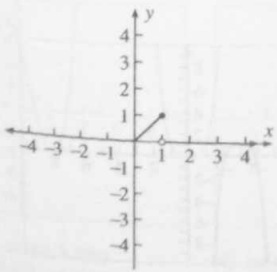
71. (a) $f(x) = \begin{cases} 15x & \text{si } 0 \le x \le 150 \\ 22.5x - 0.05x^2 & \text{si } 150 < x \le 250 \end{cases}$; (b) $[0, 250]$; (c) 225 **73.** (a) $f(x) = kx(11\,000) - x)$;

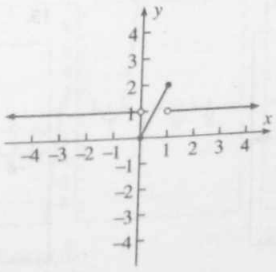
(b) $[0, 11\,000]$; (c) 5 500 **75.** (a) $(f \circ g)(t) = 16t^2 + 360t + 2\,105$; (b) 6 641 **77.** (a) $P(x) = 244x - x^3$;

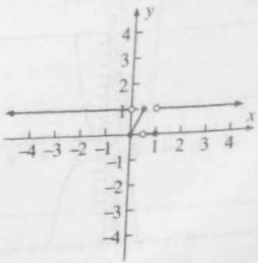
(b) 9, \$1 467 **79.** (a) $V = (20 - 2x)^2 x$; (b) $[0, 10]$; (c) 3.33 cm, 592.59 cm^3 **81.** (a) $S(x) = x^2 + \dfrac{16\,000}{x}$;

(b) $(0, +\infty)$; (c) 20 pulg por 20 pulg por 10 pulg

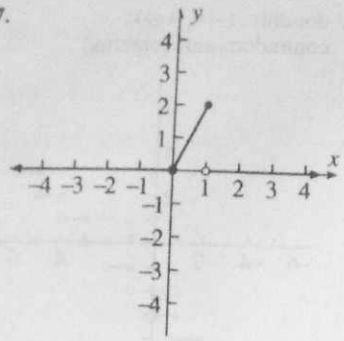
85. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$





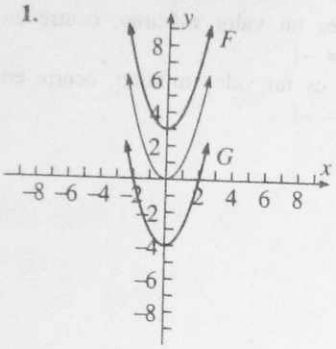


87.

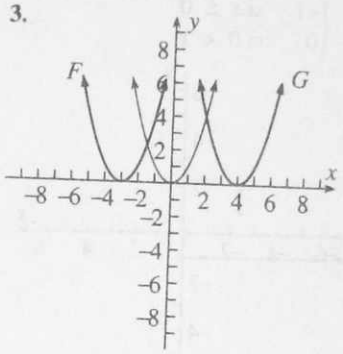


Ejercicios 5.1 (página 253)

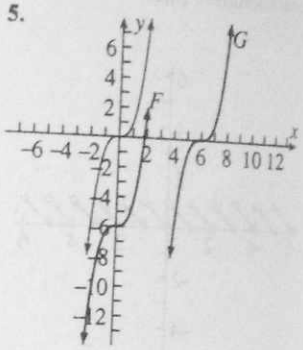
1.



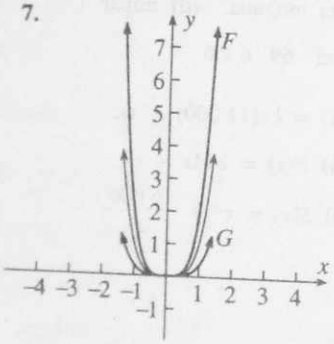
3.



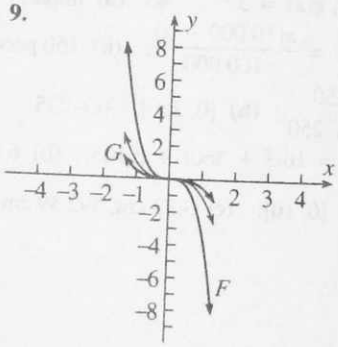
5.



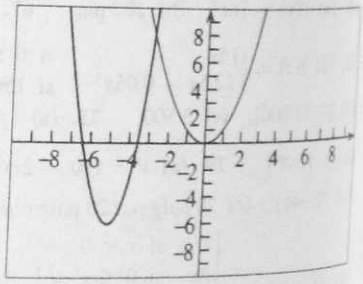
7.



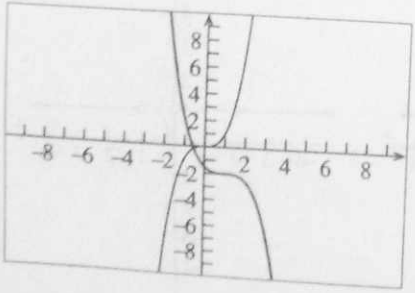
9.



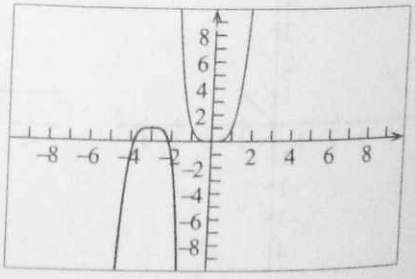
11.



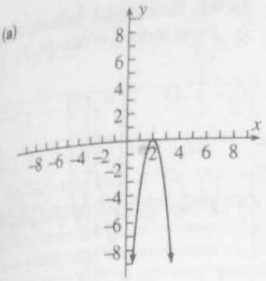
13.



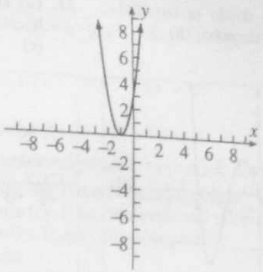
15.



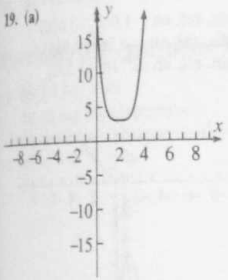
17. (a)



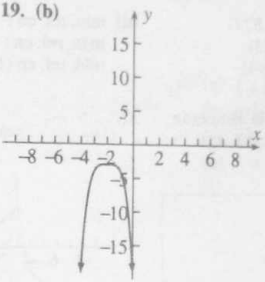
17. (b)



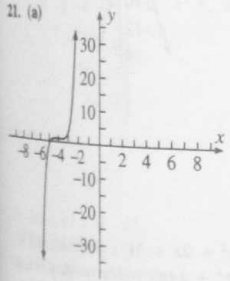
19. (a)



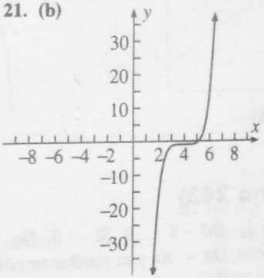
19. (b)



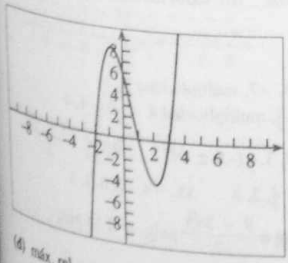
21. (a)



21. (b)

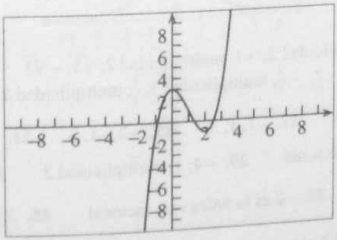


23. (a) hacia arriba desde la izquierda, hacia arriba a la derecha; (b) 2; (c)



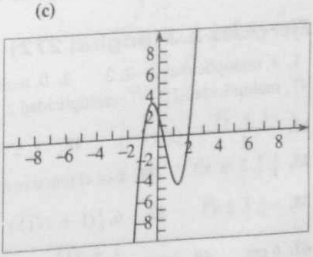
(d) máx. rel. en (−0.786, 8.209)
mín. rel. en (2.120, −4.061)

25. (a) hacia arriba desde la izquierda, hacia arriba a la derecha; (b) 2; (c)



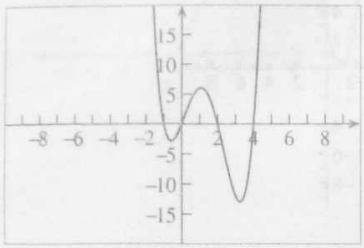
(d) máx. rel. en (0, 3)
mín. rel. en (2, −1)

27. (a) hacia arriba desde la izquierda, hacia arriba a la derecha; (b) 2; (c)



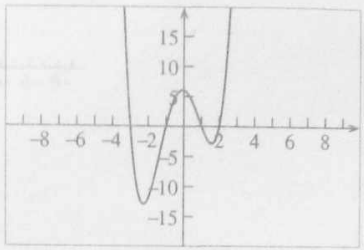
(d) máx. rel. en (−0.423, 3.172)
mín. rel. en (1.312, −4.670)

29. (a) hacia abajo desde la izquierda, hacia arriba a la derecha; (b) 3; (c)



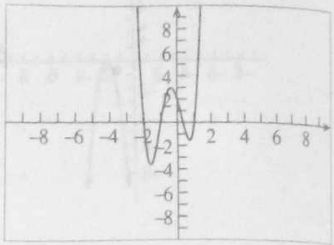
(d) mín. rel. en (– 0.574, –2.879)
máx. rel. en (1.070, 6.035)
mín. rel. en (3.253, –12.94)

31. (a) hacia abajo desde la izquierda, hacia arriba a la derecha; (b) 3; (c)



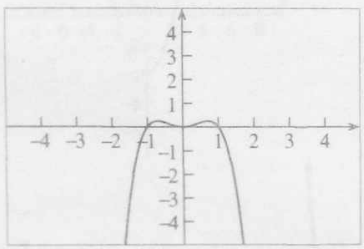
(d) mín. rel. en (–2.25, –12.95)
máx. rel. en (–0.70, 6.035)
mín. rel. en (1.5742, –2.879)

33. (a) hacia abajo desde la izquierda, hacia arriba a la derecha; (b) 3; (c)



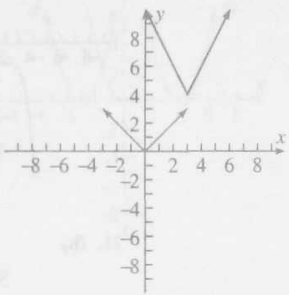
(d) mín. rel. en (–1.607, –3.620)
máx. rel. en (–0.361, 2.969)
mín. rel. en (0.718, –1.520)

35. (a) hacia arriba desde la izquierda, hacia abajo a la derecha, (b) 3; (c)

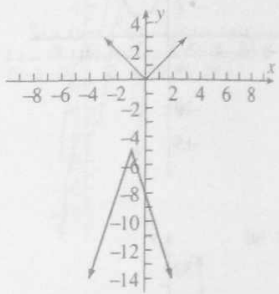


(d) máx. rel. en (±0.707, 0.25)
mín. rel. en (0, 0)

37.



39.



Ejercicios 5.2 (página 263)

1. (a) 20; (b) 5 3. (a) 1; (b) – 8 5. Sí 7. No 9. Sí 11. El cociente es $2x^2 + 7x + 31$, y el residuo es 136
13. El cociente es $2x^3 - 3x^2 + 12x - 50$, y el residuo es 199 15. El cociente es $3z^4 + 7z^3 + 14z^2 + 24z + 48$, y el residuo es 103
17. El cociente es $6x^2 - 3x + 3$, y el residuo es 1 19. El cociente es $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, y el residuo es 0
21. 8, –157 23. –7, 126 25. $4, \frac{19}{2}$ 27. $P(x) = (x + 3)(x - 1)(4x + 1)$ 29. $P(x) = (2x - 1)(x - 1)(3x + 1)$
31. No 33. Sí 35. $((2x - 6)x - 3)x - 12$; 359; –397 37. $(((4x - 1)x) + 2)x - 1$; 302; 1 079 39. –7
41. –3 y 1 43. (a) Sí; (b) No; (c) No; (d) Sí 45. (a) todos los enteros positivos; (b) todos los enteros positivos pares

Ejercicios 5.3 (página 272)

1. 4, multiplicidad 2; –2; 2 3. 0, multiplicidad 2; –1, multiplicidad 2; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$ 5. –7, multiplicidad 3; $\sqrt{7}$, multiplicidad 2; $-\sqrt{7}$, multiplicidad 2 7. $-\frac{4}{3}$, multiplicidad 3; $\frac{3}{2}$, multiplicidad 2; $-\frac{3}{2}$, multiplicidad 4 9. –1, 4
11. $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 13. $\frac{2}{5}$, 1 15. $-2 \pm \sqrt{3}$ 17. –1, 1, 3 19. –2, –1, 3 21. $-5, 3, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ 23. $\frac{1}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
25. $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 2 \pm \sqrt{3}$ 27. 2 es el único cero racional 29. –4; 1, multiplicidad 2 31. $\frac{3}{2}$, 2, 3 33. –4, –2, 0, 1, 3
35. $-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \pm\sqrt{3}$ 37. $-6, \frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{11})$ 39. –2 es la única raíz racional 45. 3 pulg o $\frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$ pulg $\approx$ 1.15 pulg
47. 6 cm 49. 3 pie o, $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ pie $\approx$ 2.3 pie

Ejercicios 5.4 (página 284)

1. $x^2 - 8x + 25$ **3.** $x^3 - 7x + 36$ **5.** $x^4 + 18x^2 + 81$ **7.** $x^5 - 9x^4 + 31x^3 - 51x^2 + 58x - 66$

9. $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{31}}{3}, -2i, 2i\right\}$ **11.** $\left\{\frac{1 \pm i}{2}, -2 - 4i, -2 + 4i\right\}$ **13.** $2, 1 \pm i; (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$

15. $-1, \frac{1}{2}, 2 \pm 3i; 2(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x^2 - 4x + 13)$ **17.** $2, \pm 2i$ (multiplicidad 2); $(x - 2)(x^2 + 4)^2$

19. $\frac{1}{3}$ (multiplicidad 2), $2 \pm \sqrt{2}i$; $9(x - \frac{1}{3})^2(x^2 - 4x + 6)$ **21.** Un cero irracional positivo entre 4 y 5; dos ceros imaginarios

23. Un cero irracional negativo entre -8 y -7; un cero irracional positivo entre 0 y 1; dos ceros imaginarios

25. Un cero irracional negativo entre -3 y -2; un cero irracional positivo entre 0 y 1; un cero irracional positivo entre 2 y 3

27. Un cero irracional negativo entre -1 y 0; un cero irracional positivo entre 0 y 1; dos ceros imaginarios

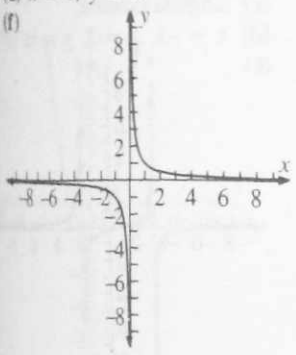
29. -1 es un cero; un cero irracional positivo entre 1 y 2; dos ceros imaginarios

31. 4 es un cero; un cero irracional negativo entre -1 y 0; un cero irracional positivo entre 0 y 1; un cero irracional positivo entre 2 y 3

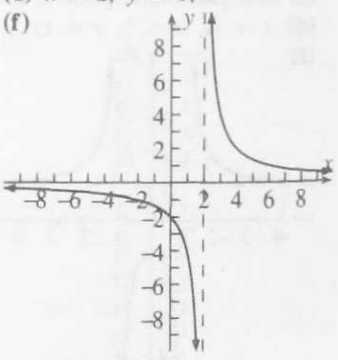
39. (a) 1 positivo, 1 negativo, $-2n - 2$ imaginarios; **(b)** 0 positivo, 1 negativo, $2n - 2$ imaginarios

Ejercicios 5.5 (página 296)

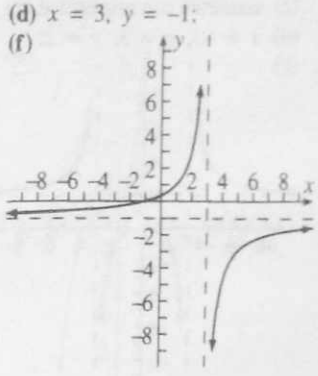
1. (a) $\{x \mid x \neq 0\}$;
(b) no hay intercepciones;
(c) simétrica con respecto al origen;
(d) $x = 0$, $y = 0$
(f)



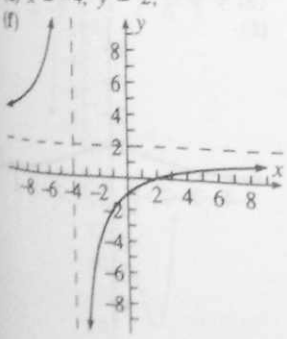
3. (a) $\{x \mid x \neq 2\}$;
(b) $(0, -2)$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = 2$, $y = 0$;
(f)



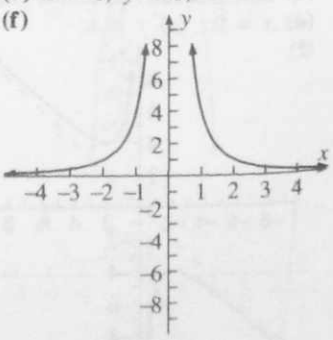
5. (a) $\{x \mid x \neq 3\}$;
(b) $(-1, 0), (0, \frac{1}{3})$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = 3$, $y = -1$;
(f)



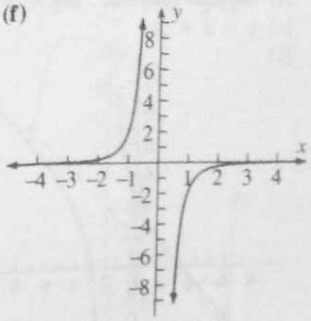
7. (a) $\{x \mid x \neq -4\}$;
(b) $(2, 0), (0, -1)$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = -4$, $y = 2$;
(f)



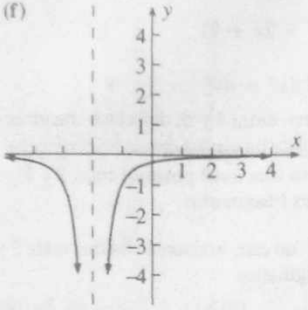
9. (a) $\{x \mid x \neq 0\}$;
(b) no hay intercepciones;
(c) simétrica con respecto al eje y;
(d) $x = 0$, $y = 0$;
(f)



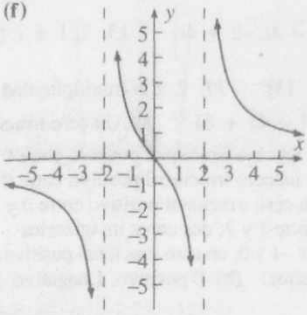
11. (a) $\{x \mid x \neq 0\}$;
(b) no hay intercepciones;
(c) simétrica con respecto al origen;
(d) $x = 0$, $y = 0$;
(f)



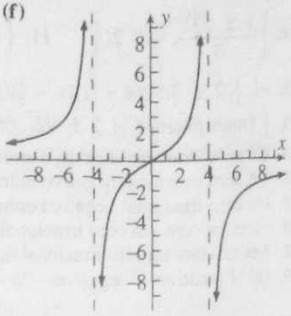
13. (a) $\{x \mid x \neq -2\}$; (b) $(0, -\frac{1}{4})$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = -2$, $y = 0$;
(f)



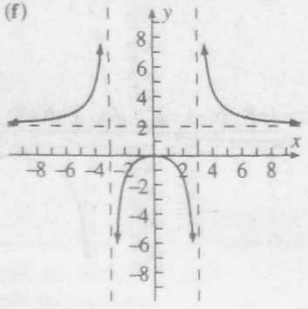
15. $\{x \mid x \neq \pm 2\}$; (b) $(0, 0)$;
(c) simétrica con respecto al origen;
(d) $x = -2, x = 2, y = 0$;
(f)



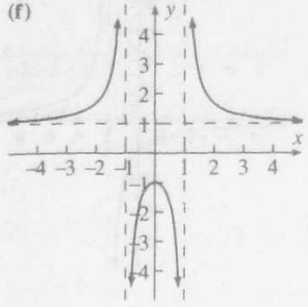
17. (a) $\{x \mid x \neq \pm 4\}$; (b) $(0, 0)$;
(c) simétrica con respecto al origen;
(d) $x = -4, x = -4, x = 4, y = 0$;
(f)



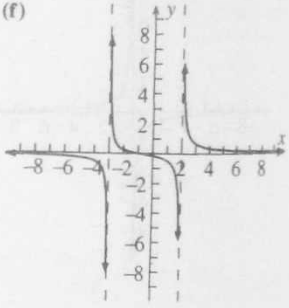
19. (a) $\{x \mid x \neq \pm 3\}$;
(b) $(0, 0)$;
(c) simétrica con respecto al eje y;
(d) $x = -3$, $x = 3$, $y = 2$;
(f)



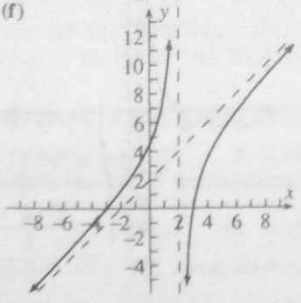
21. (a) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$;
(b) $(0, -1)$;
(c) simétrica con respecto al eje y;
(d) $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$;
(f)



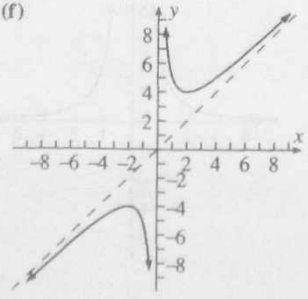
$\{x \mid x \neq -3, x \neq 2\}$;
(b) $(-1, 0), (0, -\frac{1}{6})$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$;
(f)



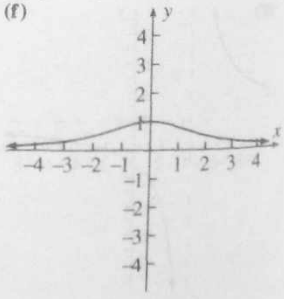
25. (a) $\{x \mid x \neq 2\}$;
(b) $(-3, 0), (3, 0), (0, \frac{9}{2})$;
(c) ninguna simetría; (d) $x = 2$;
(e) $y = x + 2$;
(f)



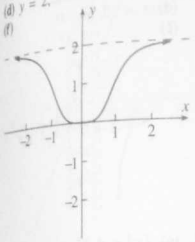
27. (a) $\{x \mid x \neq 0\}$;
(b) no hay intercepciones;
(c) simétrica con respecto al origen;
(d) $x = 0$; (e) $y = x$;
(f)



29. (a) $(-\infty, +\infty)$; (b) $(0, 1)$;
(c) simétrica con respecto al eje y;
(d) $y = 0$;
(f)



31. (a) $(-\infty, +\infty)$; (b) $(0, 0)$;
(c) simétrica con respecto al eje y;
(d) $y = 2$;
(f)



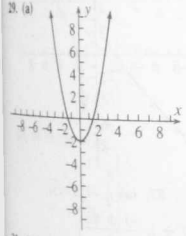
33. $(5, 6)$ 35. $(-\infty, 2) \cup [6, +\infty)$ 37. $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$

39. $(-\infty, 2) \cup [3, 4) \cup [5, +\infty)$ 41. (a) $S(x) = \dfrac{32\pi}{x} + 2\pi x^2$; (b) $(0, +\infty)$;
(c) 2.0 pulg, 75.40 pulg^2 43. (a) $C(x) = 6x^2 + \dfrac{12\,000}{x}$; (b) $(0, +\infty)$;
(c) 10.0 pulg, \$18.00 45. (a) $P(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$; (b) $(0, +\infty)$;
(c) 10.0 pulg por 10.0 pulg 47. (a) $C(x) = 8 + \dfrac{x}{300} + \dfrac{27}{x}$; (b) $(0, +\infty)$;
(c) 90 km/h 49. por lo menos 6 ohms

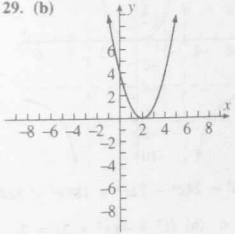
Ejercicios de repaso para el Capítulo 5 (página 299)

1. -7 3. Sí 5. $\frac{5}{7}$ 7. $2x^3 + x^2 - 3x + 5, -10$ 9. $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32, 0$ 11. (a) 17; (b) 57
13. -3, multiplicidad dos; 1; $\frac{5}{2}$ 15. -2, multiplicidad dos; 2, multiplicidad dos; -3; $-\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}$; 3 17. $-1 \pm \sqrt{5}$
19. $-3, 2, 2 \pm \sqrt{2}$ 21. $\frac{2}{3}, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 23. $3, -2 \pm \sqrt{7}$ 25. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{5}$ 27. $\{\pm\sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{3}\}$

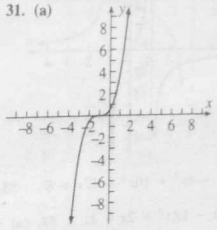
29. (a)



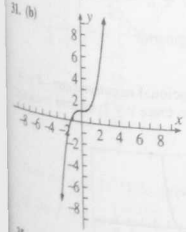
29. (b)



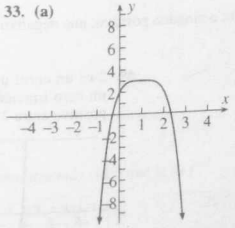
31. (a)



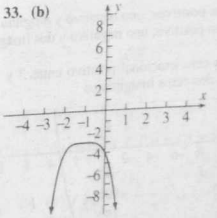
31. (b)



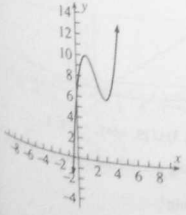
33. (a)



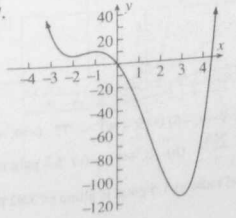
33. (b)



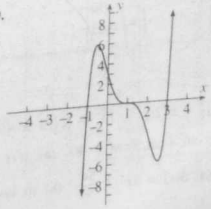
35.



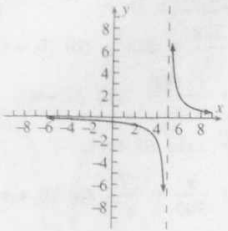
37.



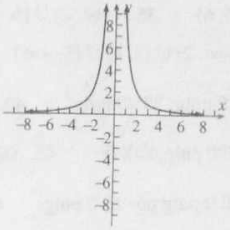
39.



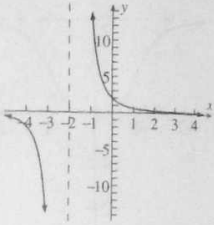
41. (a) $\{x \mid x \neq 5\}$;
(b) $(0, -\frac{2}{5})$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = 5$, $y = 0$;
(f)



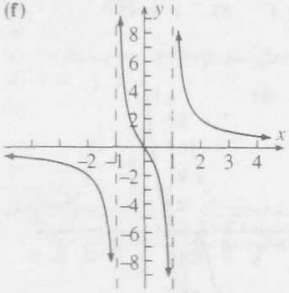
43. (a) $\{x \mid x \neq 0\}$;
(b) no hay intercepciones;
(c) simétrica con respecto al eje y;
(d) $x = 0$, $y = 0$;
(f)



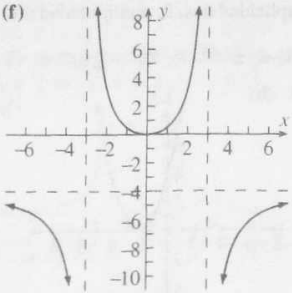
45. (a) $\{x \mid x \neq -2\}$;
(b) $(0, 2)$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = -2$, $y = 0$;
(f)



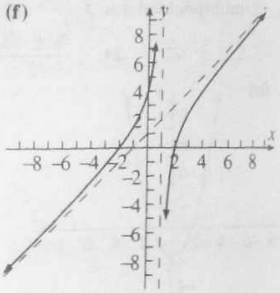
47. (a) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$;
(b) $(0, 0)$;
(c) simétrica con respecto al origen;
(d) $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$;
(f)



49. (a) $\{x \mid x \neq \pm 3\}$;
(b) $(0, 0)$;
(c) simétrica con respecto al eje y;
(d) $x = -3$, $x = 3$, $y = -4$;
(f)



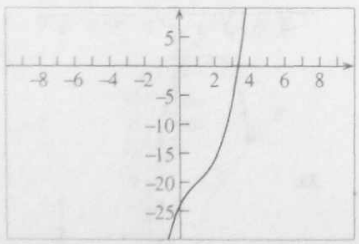
51. (a) $\{x \mid x \neq 1\}$;
(b) $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 4)$;
(c) ninguna simetría;
(d) $x = 1$; (e) $y = x + 1$;
(f)



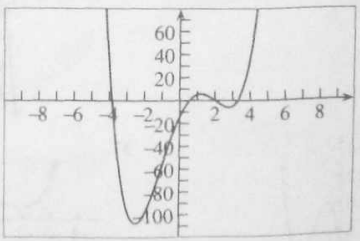
53. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$ **55.** $x^6 - 4x^5 + 24x^4 - 72x^3 + 189x^2 - 324x + 486$ **57.** (a) $\frac{1}{2}, -1 \pm \sqrt{3}i$;
(b) $(2x - 1)(x^2 + 2x + 4)$ **59.** (a) $\pm 2i, -1 \pm i$; (b) $(x^2 + 4)(x^2 + 2x + 2)$ **61.** $\left\{-1 \pm i, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

63. dos positivos, uno negativo y ninguno imaginario; o ninguno positivo, uno negativo y dos imaginarios
65. uno positivo, uno negativo y dos imaginarios

67. un cero irracional positivo entre 3 y 4; dos ceros imaginarios



69. 2 es un cero; un cero irracional negativo entre -4 y -3; un cero irracional positivo entre 0 y 1; un cero irracional positivo entre 3 y 4



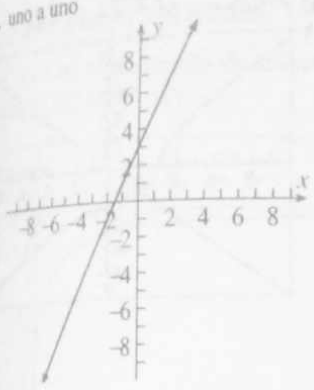
71. $\{\frac{3}{4}, 1 \pm 2i\}$ **73.** $\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{5}\}$ **75.** $(-\infty, -6) \cup (5, +\infty)$ **77.** $(-\infty, -4) \cup [-2, 3) \cup [9, +\infty)$ **79.** 1

81. 3 cm, 4 cm, 5 cm **83.** (a) $S(x) = 3x^2 + \frac{768}{x}$; (b) $(0, +\infty)$; (c) 5.0 pulg por 15.1 pulg por 3.8 pulg, altura; 228.6 pulg^2

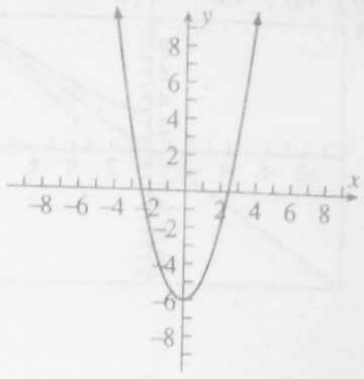
85. (a) $S(x) = 8x^2 + \frac{54}{x}$; (b) $(0, +\infty)$; (c) el radio es 1.5 pulg, la altura es 3.82 pulg; 54 pulg^2

Ejercicios 6.1 (página 314)

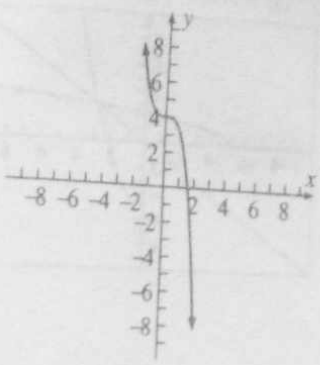
1. uno a uno



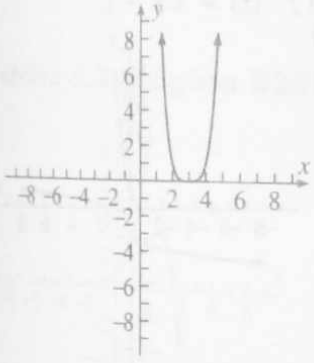
3. no es uno a uno



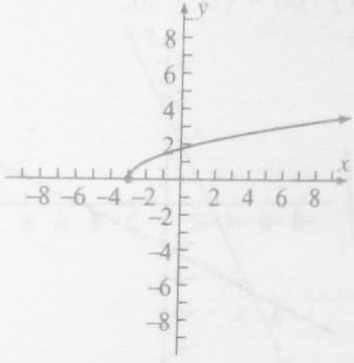
5. uno a uno



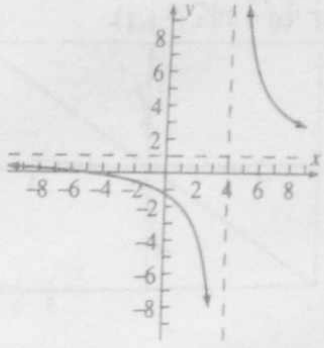
7. no es uno a uno



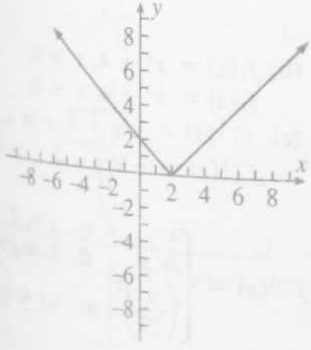
9. uno a uno



11. uno a uno

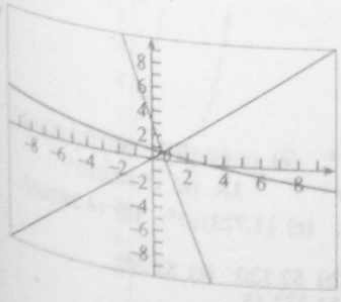


13. no es uno a uno



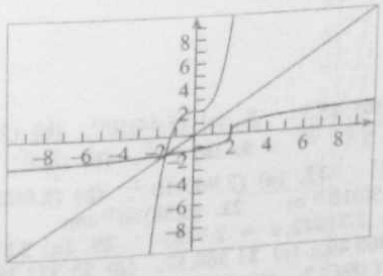
En los ejercicios 15-35, la gráfica de f se muestra más clara que la de f^{-1}.

15. (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3 - x}{4}$;



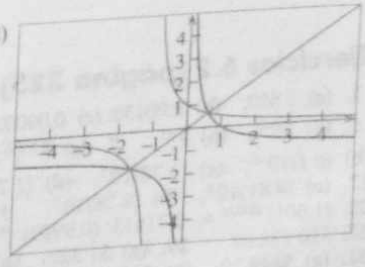
17. (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$;

(d)

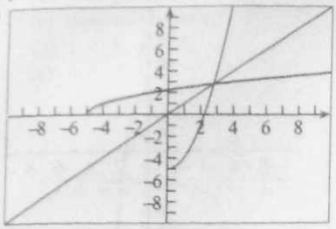


19. (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{x}$;

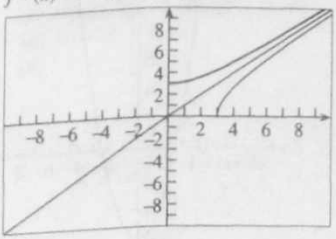
(d)



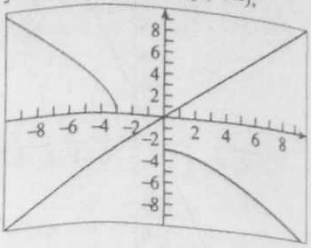
21.
(a) $[-5, +\infty)$;
(b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+5}$, $[-5, +\infty)$;
(c)



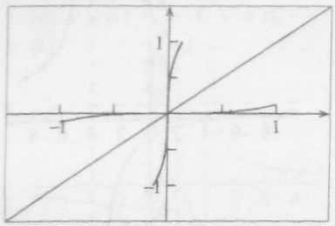
23.
(a) $[0, +\infty)$;
(b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2+9}$, $[0, +\infty)$;
(c)



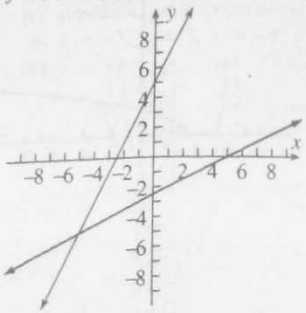
25.
(a) $[0, +\infty)$;
(b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2+9}$, $[0, +\infty)$;
(c)



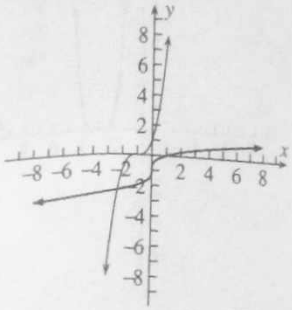
27.
(a) $[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$;
(b) $f^{-1}(x) = 2\sqrt[3]{x}$, $[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$;
(c)



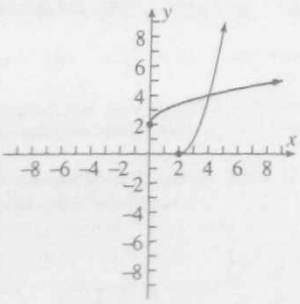
29.
(b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-5)$;
(c)



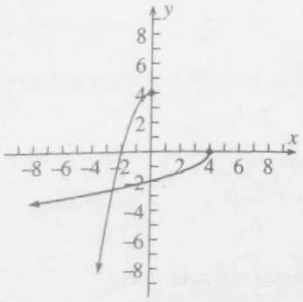
31.
(b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$;
(c)



33. (b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$;
(c)



35.
(b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{4-x}$;
(c)



39. -1

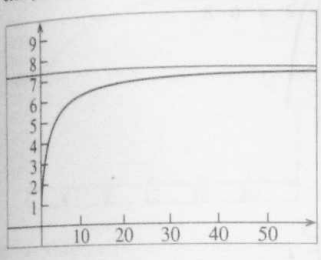
43. (b) $f_1(x) = x^2 + 4, x \geq 0$;
$f_2(x) = x^2 + 4, x \leq 0$;
(c) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-4}, x \geq 4$;
$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}, x \geq 4$

45. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 81 \\ \left(\frac{x}{27}\right)^2 & \text{si } 81 < x \end{cases}$

Ejercicios 6.2 (página 325)

1. (a) 7 620; (b) 0.00130; (c) 0.0000215; (d) 15.3 **3.** (a) $(5.44)10^{15}$; (b) $(2.96)10^{-8}$; (c) $(1.49)10^{33}$; (d) $(7.84)10^{-26}$
5. (a) $3^{6\sqrt{2}}$; (b) e^{10} **7.** (a) $5^{3\sqrt{10}}$; (b) $5^{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^3}}$ **9.** (a) $2^{5\sqrt{2}}$; (b) $(\frac{5}{2})^{\sqrt{5}}$ **11.** $e^{2+\sqrt{6}}$ **13.** (a) $(5.260)10^1$;
(b) $(6.1)10^{-3}$; (c) $(1.72)10^5$; (d) $(1.720)10^5$ **15.** (a) $(3.960)10^{-2}$; (b) $(8.0022)10^{-6}$; (c) $(1.723)10^0$; (d) $(4.260)10^2$
17. (a) $(4.81)10^9$; (b) $(6.28)10^7$ **19.** $(1.50)10^{11}$ m **21.** $(6.58)10^{21}$ ton
23. $(1.001)^{10\,000} \approx 2.71815$; $(0.9999)^{-10\,000} \approx 2.71842$; $e \approx 2.7183$ **25.** (a) \$2 060; (b) \$2 120 (c) \$2 240
27. \$10 938.07 **29.** (a) \$1 320; (b) \$1 360.49; (c) \$1 368.57; (d) \$1 372.79; (e) \$1 377.13
31. (a) \$849.29; (b) \$867.55 **33.** (a) \$1 094.17; (b) \$1 094.16 **35.** \$3 364.86 **37.** \$3 351.60

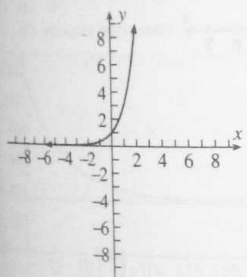
39. La figura muestra la gráfica de $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ y su asíntota, $y = e^2$, en el rectángulo de inspección [0, 60] por [0, 10].



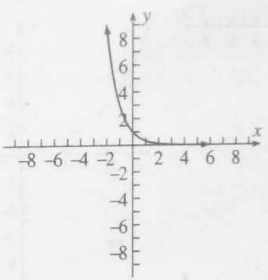
41. 10.52% interés simple; 10.13% interés compuesto trimestralmente

Ejercicios 6.3 (página 335)

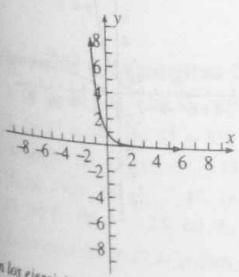
1.



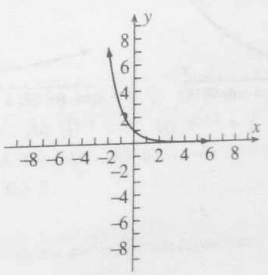
3.



5.

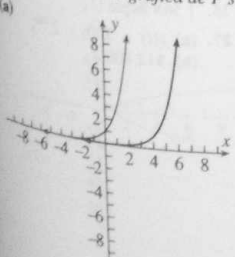


7.

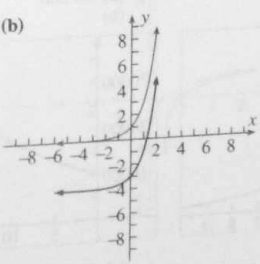


En los ejercicios 9-13, la gráfica de F se muestra junto con la de f, la cual se muestra más fina.

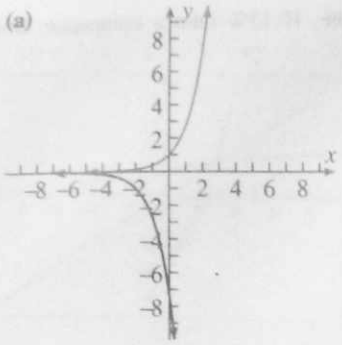
9. (a)



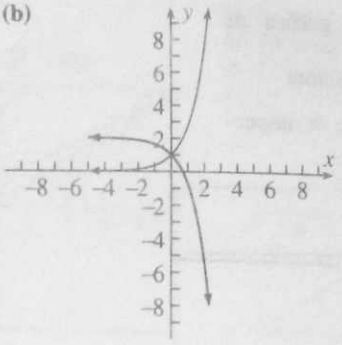
(b)



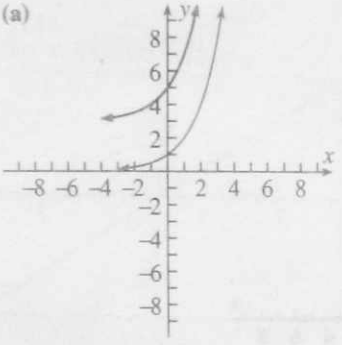
11. (a)



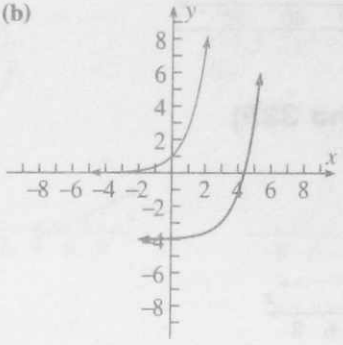
(b)



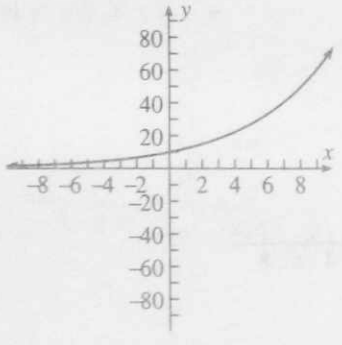
13. (a)



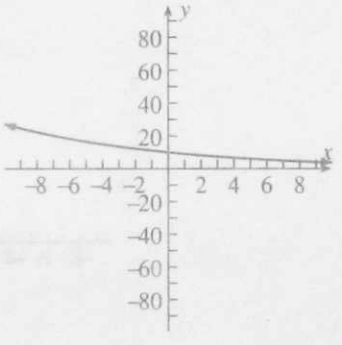
(b)



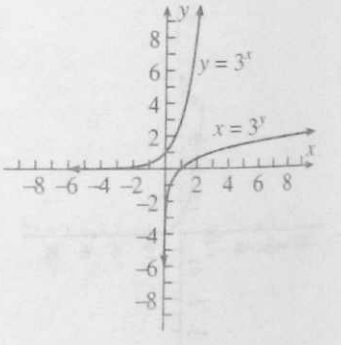
15.



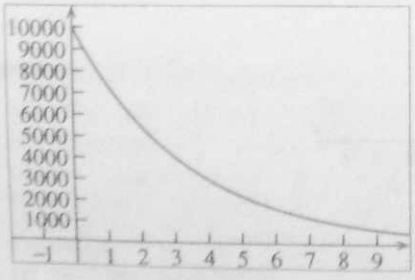
17.



19.

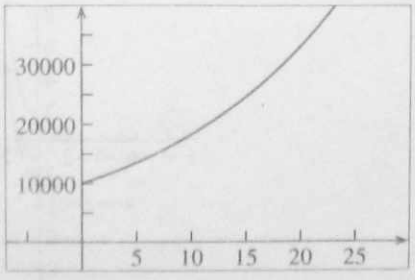


21. (a) 10 000;
(b)



(c) \$907.18

23. (a) 10 000;
(b)

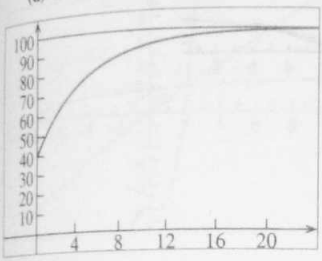


(c) 18 221; (d) 33 201

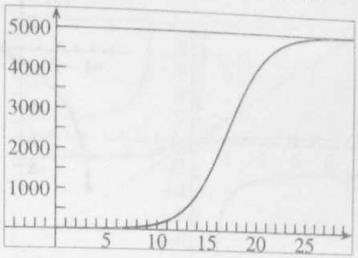
25. 1 568 lb/pie^2

27. (a) $f(t) = 200 \cdot 2^{t/10}$;
(b) \$12 800

29. (a) 40;
(b) 94;
(c) 100;
(d) asíntota horizontal: $y = 100$

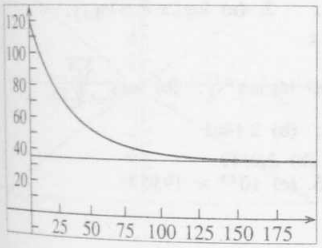


31. (a) 144;
(b) 4 075;
(c) 5 000;
(d) asíntota horizontal: $y = 5\,000$



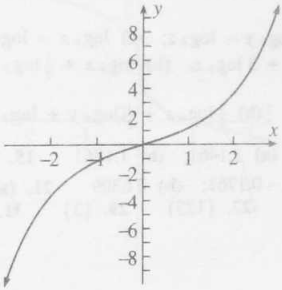
33. 50%

35. (a) 97.60°;
(b) 53.41°;
(c) 38.99°;
(d) 35.34°;
(e) 35°;
(f) asíntota horizontal: $y = 35$



37. (a) 0;
(b) 1.543;
(c) −1.175;
(d) 16.543;
(e) 3.762

39. (b)

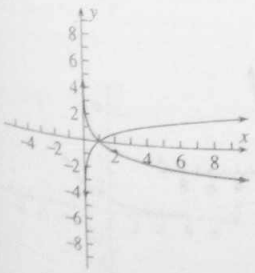


Ejercicios 6.4 (página 347)

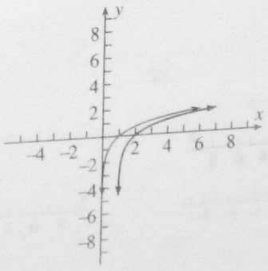
1. (a) $\log_3 81 = 4$; (b) $\log_5 125 = 3$; (c) $\log_{10}(0.001) = -3$ 3. (a) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$; (b) $\log_{625}(\frac{1}{125}) = -\frac{3}{4}$; (c) $\log_2 1 = 0$
5. (a) $8^2 = 64$; (b) $3^4 = 81$; (c) $2^0 = 1$ 7. (a) $8^{1/3} = 2$; (b) $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$; (c) $9^{-1/2} = \frac{1}{3}$
9. (a) 2; (b) $\frac{2}{3}$; (c) −3 11. (a) $-\frac{1}{3}$; (b) $-\frac{4}{3}$; (c) $\frac{1}{2}$ 13. (a) 343; (b) 81
15. (a) $2\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{128}$ 17. (a) 12; (b) 216 19. (a) 10; (b) 8
21. (a) 0; (b) 1 23. (a) 3; (b) 0

En los ejercicios 31-37, la gráfica de la función dada se muestra más oscura que la función logarítmica natural.

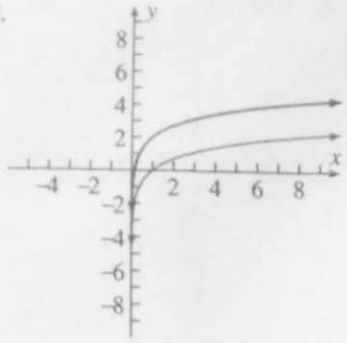
31.



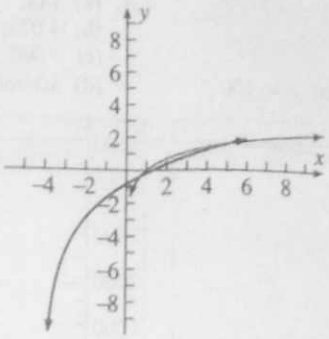
33.



35.



37.



39. 2 años a partir de ahora **41.** 25 años a partir de ahora **43.(a)** $A(t) = 500e^{.09t}$; **(b)** 6.53 años $\approx$ 6 años, 193 días
45. 3.47 **47.** 161 años **49.** 8.66 años $\approx$ 8 años, 242 días **51.** $S^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^3 + 1})$

Ejercicios 6.5 (página 357)

1. **(a)** $\log_b 5 + \log_b x + \log_b y$; **(b)** $\log_b y - \log_b z$; **(c)** $\log_b x - \log_b y - \log_b z$ **3.** **(a)** $\log_b x + 5\log_b y$; **(b)** $\frac{1}{2}(\log_b x + \log_b y)$ **5.** **(a)** $\frac{1}{3}\log_b x + 3\log_b z$; **(b)** $\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 4\log_b z$

7. **(a)** $\frac{1}{3}(2\log_b x - \log_b y - 2\log_b z)$; **(b)** $\frac{2}{3}\log_b x + \frac{1}{2}(\log_b y + \log_b z)$ **9.** **(a)** $\log_{10} x\sqrt[4]{y}$; **(b)** $\log_b \frac{\sqrt[4]{x^3}}{y^6\sqrt[5]{z^4}}$

11. **(a)** $\log_{10} \frac{1}{2}gt^2$; **(b)** $\ln \frac{1}{3}\pi hr^2$ **13.** **(a)** 1.1461; **(b)** 1.1761 **15.** **(a)** 1.7993; **(b)** 2.1461
17. **(a)** 0.3404; **(b)** −2.7744 **19.** **(a)** −0.1761; **(b)** 0.6309 **21.** **(a)** 5.7036; **(b)** 2.0149
23. **(a)** 0.7851; **(b)** 2.5108 **25.** {7} **27.** {125} **29.** {3} **31.** {7} **33.** (c) $10^{1.3} \approx 19.95$

Ejercicios 6.6 (página 364)

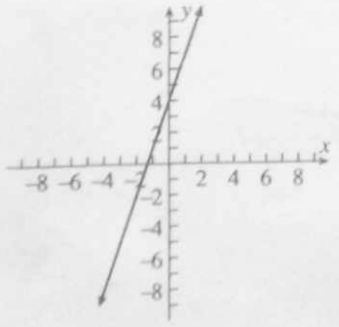
1. {1.404} **3.** {0.4307} **5.** {4.301} **7.** {8.638} **9.** {32.20} **11.** {1.015} **13.** 2.262
15. 4.170 **17.** 3.638 **19.** 0.9375 **21.** 3.42 años a partir del 1 de enero de 1993 (a principios de junio de 1996)
23. 18.58 años **25.** 48 089.16 pie sobre el nivel del mar **27.** 1997 **29.** 69.95 **31.** 54.87%

33. {0.3828} **35.** {0.8618} **37.** {−2.063, 2.063} **39.** $x = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$ **41.** **(a-b)** $x \approx 1.18$

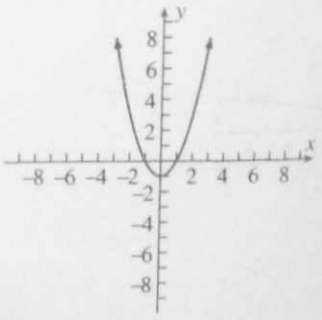
43. (c) dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, contradominio: $\{y \mid y \neq 0\}$

Ejercicios de repaso para el Capítulo 6 (página 367)

1. uno a uno

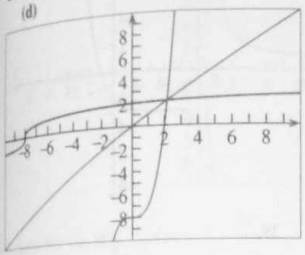


3. no es uno a uno

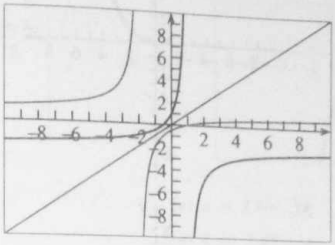


En los ejercicios 5-15, la gráfica de f se muestra más fina que la de f^{-1}.

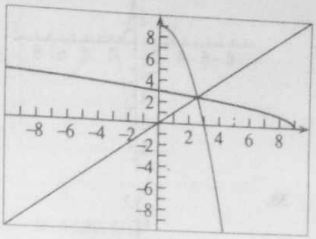
5. (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 8}$;
(d)



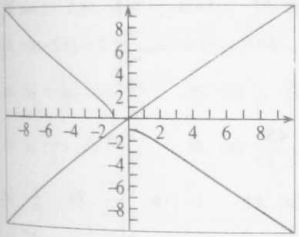
7. (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1 + 2x}{1 - x}$;
(d)



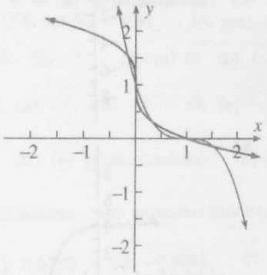
9. (a) $(-\infty, 9]$;
(b) $f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x}$, $(-\infty, 9]$;
(c)



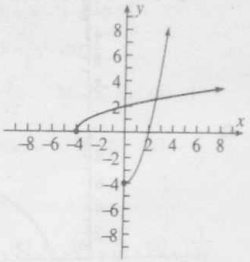
11. (a) $[0, +\infty)$;
(b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$, $[0, +\infty)$;
(c)



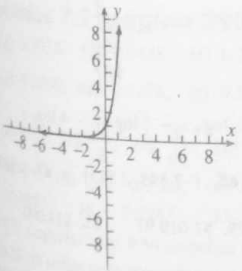
13. (a) función decreciente;
(b) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$;
(c)



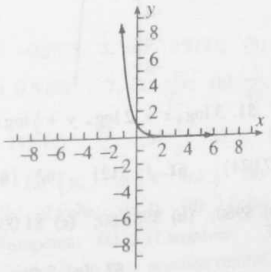
15. (a) función creciente;
(b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$;
(c)



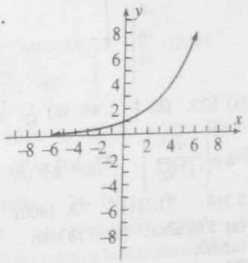
17.



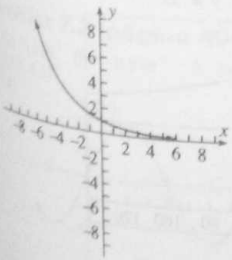
19.



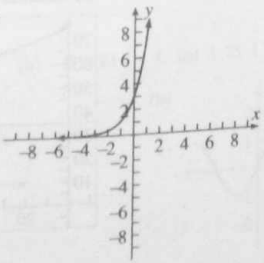
21.



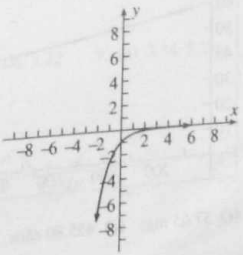
23.



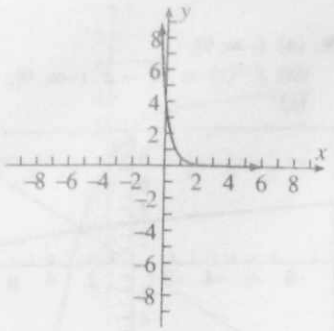
25.



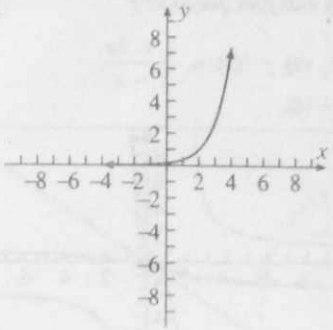
27.



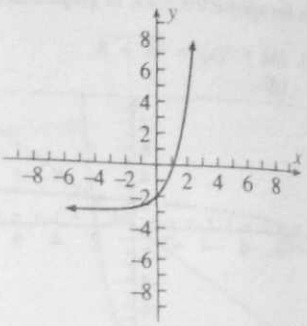
29.



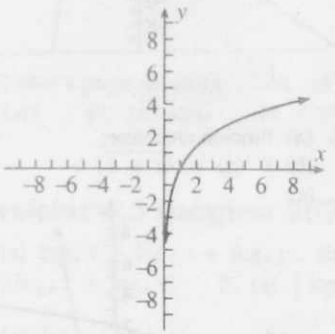
31.



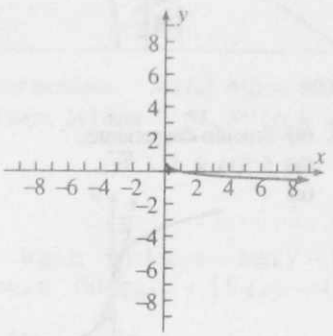
33.



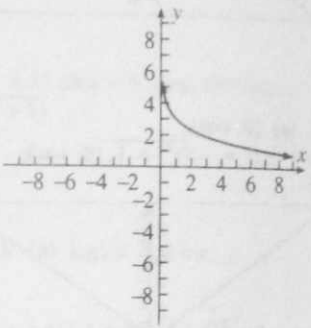
35.



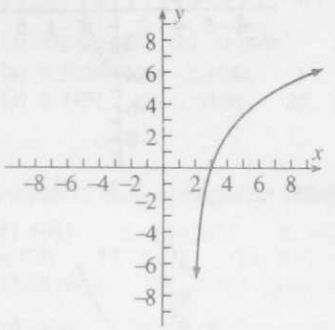
37.



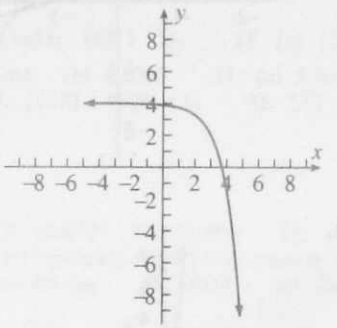
39.



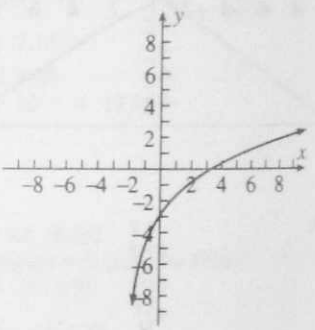
41.



43.



45.



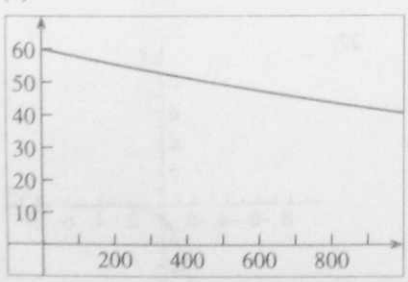
47. (a) 625; (b) $\frac{4}{3}$ 49. (a) $\frac{1}{64}$; (b) $\frac{1}{e^2}$ 51. $3\log_b x + 2\log_b y + \frac{1}{2}\log_b z$ 53. $\log_b x + \frac{1}{3}\log_b y - 4\log_b z$

55. $\log_{10}\left(\frac{\sqrt[3]{y^2}}{x^4\sqrt[5]{z}}\right)$ 57. $\ln(\frac{4}{3}\pi r^2 h)$ 59. {2.024} 61. {1.512} 63. {8.084} 65. {−2.543, 2.543} 67. 0.9358

69. 5.248 71. $\{\frac{1}{2}\}$ 73. {400} 77. (a) \$960; (b) \$988.80; (c) \$1 004.07 79. \$1 019.97 81. \$14 000

83. (a) 5.86 años; (b) 5.78 años

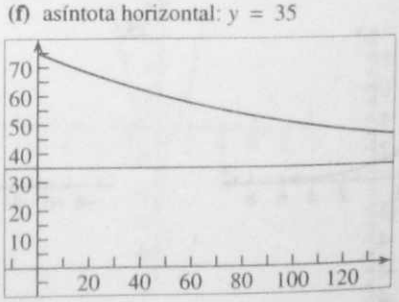
85. (a) 60;
(b)



(c) 57.65 mg; (d) 455.80 años

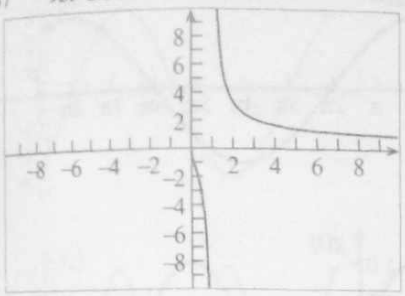
87. (a) 5.49

89. (a) 73.87°; (b) 73.13°; (c) 71.34°; (d) 65°; (e) 35°;
(f) asíntota horizontal: $y = 35$



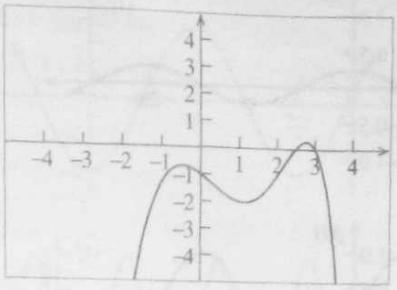
91. 144.57 93. 2.512% 95. 50.12

103. (a)



(b) dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$,
contradominio: $\{ y \mid y \neq 0 \}$

105.



(a) $x = 2.48$;
(b) $(-\infty, 2.48) \cup (3, +\infty)$; (c) $(2.48, 3)$

Ejercicios 7.1 (página 381)

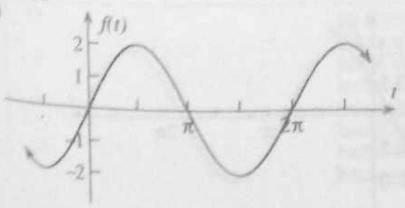
1. (a) primer cuadrante; (b) segundo cuadrante 3. (a) primer cuadrante; (b) cuarto cuadrante
5. (a) segundo cuadrante; (b) segundo cuadrante 7. (a) tercer cuadrante; (b) cuarto cuadrante
9. $\operatorname{sen} 2 \approx 0.91$; $\cos 2 \approx -0.42$ 11. $\operatorname{sen} 5.2 \approx -0.88$; $\cos 5.2 \approx 0.47$ 13. $\operatorname{sen}(-3) \approx -0.14$; $\cos(-3) \approx -0.99$
15. $\operatorname{sen}(-6.1) \approx 0.18$; $\cos(-6.1) \approx 0.98$ 17. (a) 0; (b) -1 19. (a) 0; (b) 1 21. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$
23. (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 25. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$ 27. (a) $-\frac{1}{2}$; (b) $-\frac{1}{2}$ 29. (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 31. (a) 0; (b) -1
33. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 35. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 37. (a) primer cuadrante; (b) cuarto cuadrante 39. $\frac{4}{5}$ 41. $-\frac{15}{17}$
43. $-\frac{5}{13}$ 45. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 47. -1 49. (a) segundo cuadrante; (b) segundo cuadrante
51. (a) cuarto cuadrante; (b) tercer cuadrante 53. 0.6238 55. -0.9085 57. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) 1; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ejercicios 7.2 (página 390)

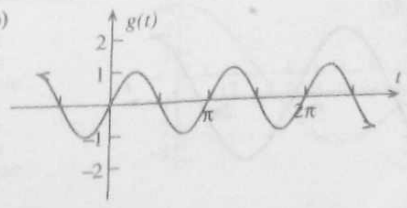
1. (a) 0.3335; (b) 0.9428; (c) 0.2875; (d) -0.9578 3. (a) -0.9121; (b) -0.4099; (c) -0.9779; (d) 0.2092
5. (a) 0.9898; (b) 0.9238; (c) 0.3420; (d) 0.8090 7. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $-\frac{1}{2}$
9. (a) $-\frac{1}{2}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 11. (a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 0, (d) 1 13.(a) 1; (b) 0; (c) 1; (d) 0
15. (a) $\frac{2}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) 8π; (d) 10π 17. (a) $\frac{2}{7}\pi$; (b) $\frac{7}{2}\pi$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) 6 19. (a) 10; (b) 2 21. 0.7317
23. -0.8994 25. -0.7243 27. (a) $\frac{1}{25}$; (b) -2 volts; (c) 0; (d) 2 volts; (e) -2 volts 29. (a) $\frac{1}{1\,400}\pi$;
(b) 3.35 amperes; (c) 8.55 amperes; (d) 9.91 amperes; (e) 2.71 amperes 31. (a) $\frac{2}{3}\pi$; (b) en la posición central;
(c) 0.28 cm arriba de la posición central; (d) 0.56 cm abajo de la posición central; (e) 1.30 cm arriba de la posición central
33. (a) $\frac{1}{750}$; (b) 0.0173 din/cm^2; (c) -0.02 din/cm^2; (d) 0.0156 din/cm^2; (e) 0

Ejercicios 7.3 (página 406)

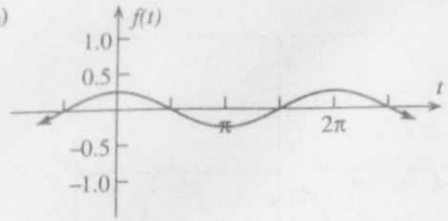
1. (a) 0.519; (b) -0.916 3. (a) -0.958; (b) -0.0423 5. (a) 1.35, 1.79; (b) 1.06, 5.22 7. (a) 3.84, 5.59;
(b) 2.10, 4.18
9. (a)



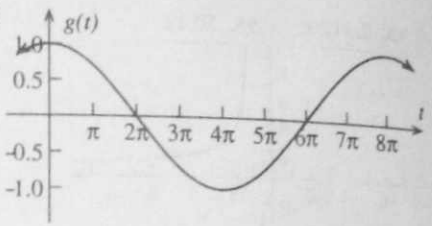
(b)



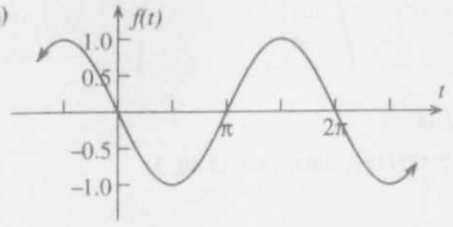
11. (a)



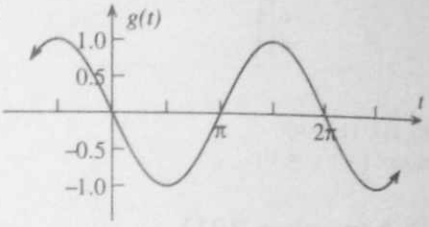
(b)



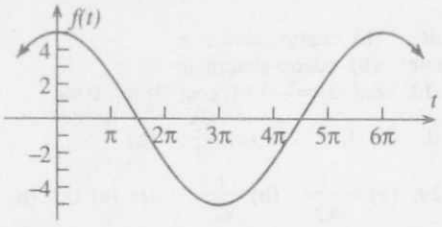
13. (a)



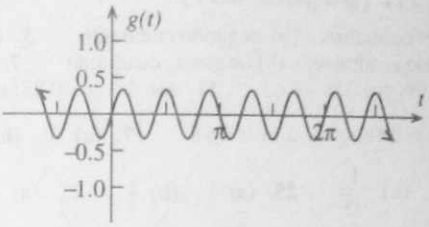
(b)



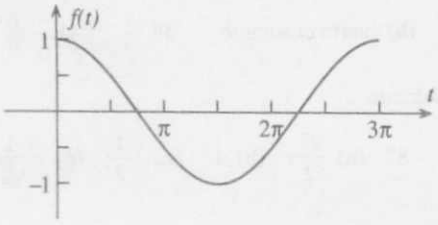
15. (a)



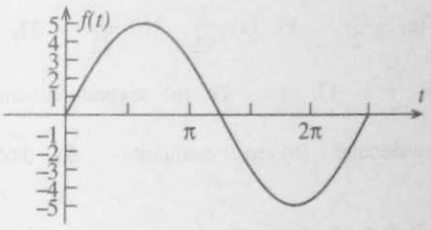
(b)



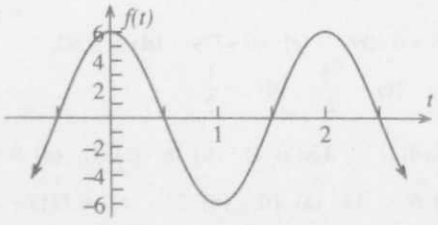
17.



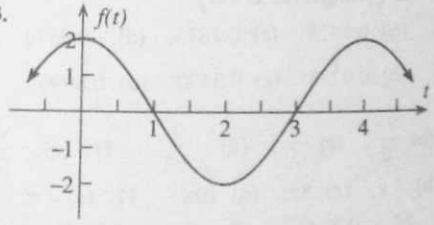
19.



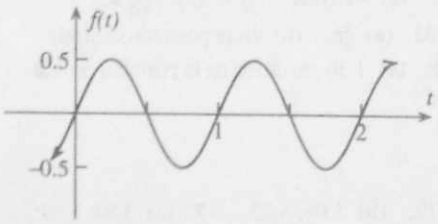
21.



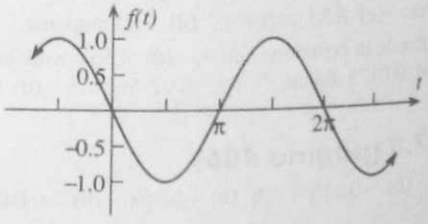
23.



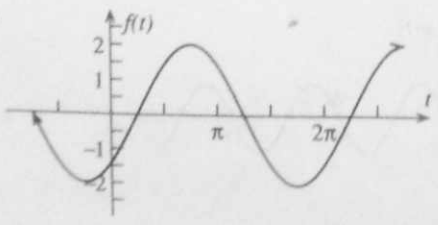
25.



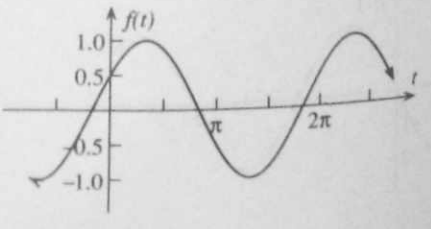
27.



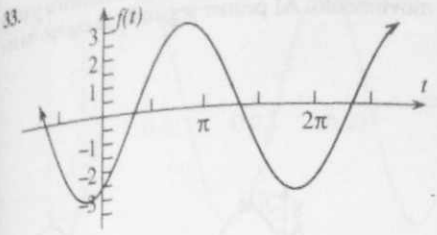
29.



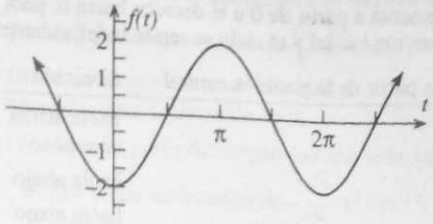
31.



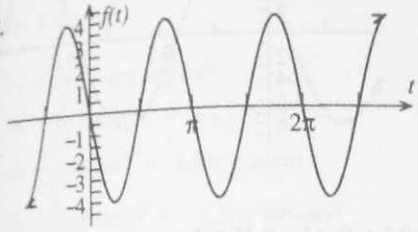
33.



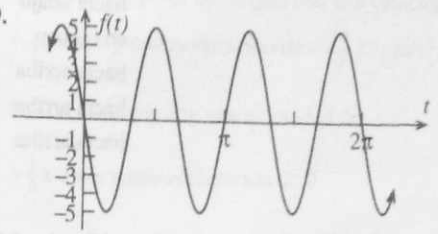
35.



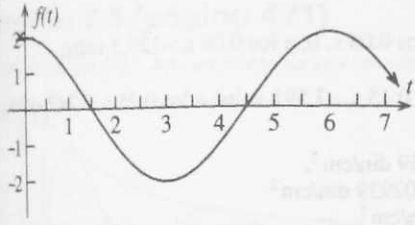
37.



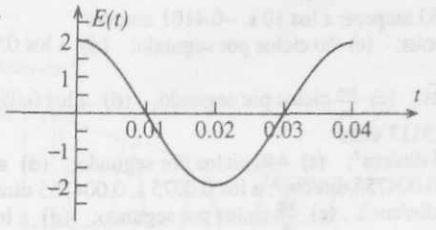
39.



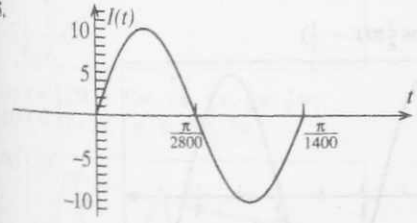
41.



43.



45.



47. **(a)** $T(t) = -5\cos\frac{1}{12}\pi t$; **(b)** −2.5° Celsius; **(c)** 4.33° Celsius; **(d)** 4.33° Celsius; **(e)** −2.5° Celsius

49. **(a)** 0.998, 0.998; **(b)** 0.999, 0.999; **(c)** 0.9999, 0.9999; **(d)** 0.99998, 0.99998; **(e)** 0.9999998, 0.9999998; **(f)** 1

Ejercicios 7.4 (página 414)

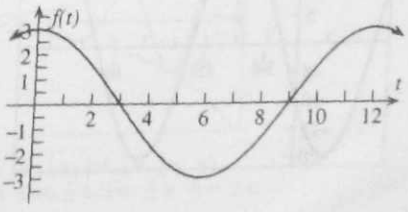
1. (a) 3; (b) 12; (c) $\frac{1}{12}$ de una vibración por segundo; (d) $f(0) = +3, f(2) = +\frac{3}{2}, f(4) = -\frac{3}{2}, f(6) = -3$

3. (a) 5; (b) π; (c) $\frac{1}{\pi}$ de una vibración por segundo; (d) $f(0) = 0, f(\frac{1}{4}\pi) = +5, f(\frac{1}{2}\pi) = 0, f(\frac{3}{4}\pi) = -5$

5. (a) 8; (b) 1; (c) una vibración por segundo; (d) $f(0) = +4, f(\frac{1}{6}) = +8, f(\frac{1}{3}) = +4, f(\frac{1}{2}) = -4$

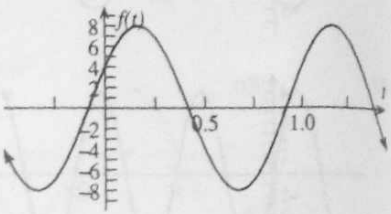
7. La tabla de abajo describe las distancias dirigidas del cuerpo a partir de la posición central, su dirección de movimiento y si su rapidez se incrementa a partir de 0 o si decrece hacia 0, para los primeros 12 segundos de movimiento. A los 12 segundos, el cuerpo ha regresado a su posición inicial y el ciclo se repite indefinidamente.

x	cm a partir de la posición central	dirección	la rapidez es . . .
0	+3	en reposo	0
0-3		hacia abajo	creciente
3	0	hacia abajo	constante
3-6		hacia abajo	decreciente
6	−3	en reposo	0
6-9		hacia arriba	creciente
9	0	hacia arriba	constante
9-12		hacia arriba	decreciente



9. La tabla de abajo describe las distancias dirigidas del cuerpo a partir de la posición central, su dirección de movimiento y si su rapidez se incrementa a partir de 0 o si decrece hacia 0, para el primer segundo de movimiento. Al primer segundo, el cuerpo ha regresado a su posición inicial y el ciclo se repite indefinidamente.

s	cm a partir de la posición central	dirección	la rapidez es . . .
0-$\frac{1}{6}$		hacia arriba	decreciente
$\frac{1}{6}$	+8	en reposo	0
$\frac{1}{6}$-$\frac{5}{12}$		hacia abajo	creciente
$\frac{5}{12}$	0	hacia abajo	constante
$\frac{5}{12}$-$\frac{2}{3}$		hacia abajo	decreciente
$\frac{2}{3}$	−8	en reposo	0
$\frac{2}{3}$-$\frac{11}{12}$		hacia arriba	creciente
$\frac{11}{12}$	0	hacia arriba	constante
$\frac{11}{12}$-1		hacia arriba	decreciente



11. **(b)** 5 ampere; **(c)** 15 ciclos por segundo; **(d)** a los 0.05 s, −5 ampere; a los 0.1 s, 0; a los 0.15 s, 5 ampere; a los 0.2 s, 0

13. **(b)** 0.6 ampere; **(c)** $\frac{200}{\pi}$ ciclos por segundo; **(d)** a 1 s, −0.5106 ampere; a los 3.5 s, −0.5477 ampere; a los 8 s, 0.5753 ampere; a los 10 s, −0.4101 ampere

15. **(b)** 220 volts; **(c)** 60 ciclos por segundo; **(d)** a los 0.01 s, −129.3 volts; a los 0.05 s, 0; a los 0.06 s, −129.3 volts; a los 0.1 s, 0

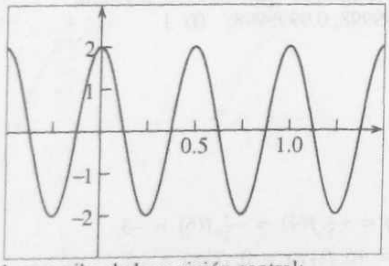
17. **(b)** 8 volts; **(c)** $\frac{166}{\pi}$ ciclos por segundo; **(d)** a los 0.05 s, −6.227 volts; a los 0.15 s, −3.591 volts; a los 0.25 s, 7.747 volts; a los 0.35 s, 0.3113 volts

19. **(b)** 0.005 din/cm^2; **(c)** 440 ciclos por segundo; **(d)** a los 0.0025 s, 0.002939 din/cm^2; a los 0.005 s, 0.004755 din/cm^2; a los 0.0075 s, 0.004755 din/cm^2; a los 0.01 s, 0.002939 din/cm^2

21. **(b)** 0.02 din/cm^2; **(c)** $\frac{300}{\pi}$ ciclos por segundo; **(d)** a los 0.002 s, 0.01864 din/cm^2; a los 0.006 s, − 0.008850 din/cm^2; a los 0.018 s, − 0.01962 din/cm^2; a los 0.054 s, 0.01666 din/cm^2

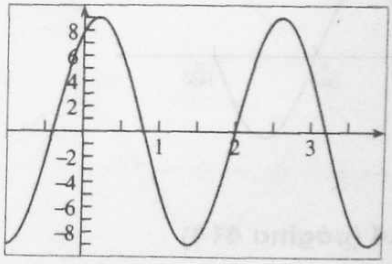
23. **(a)** $f(t) = 2 \operatorname{sen} 4\pi(t + \frac{1}{8})$ o, equivalentemente, $f(t) = 2 \cos 4\pi t$;

(b)

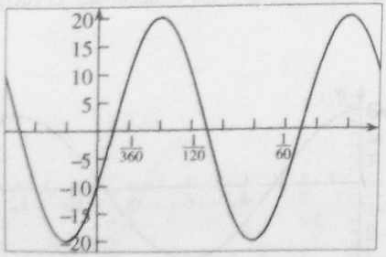


(c) 1 cm arriba de la posición central;
(d) 2 cm abajo de la posición central

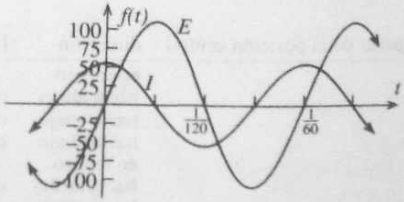
25. $f(t) = 9 \cos \frac{5}{6}\pi(t - \frac{1}{5})$



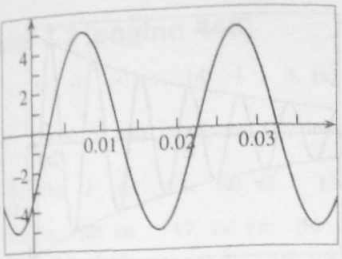
27. $I(t) = 20 \operatorname{sen} 120\pi(t - \frac{1}{720})$



29. La corriente se retrasa, con respecto a la fuerza electromotriz, por $\frac{1}{240}$ s.



31. (a)



(b) 5 din/cm^2;

(c) 50 ciclos por segundo

(d) $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ din/cm^2 ≈ -3.536 din/cm^2;

(e) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ din/cm^2 ≈ 3.536 din/cm^2;

(f) $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ din/cm^2 ≈ -3.536 din/cm^2

33. (a) $-\sqrt{3}$ cm a partir del origen con una velocidad de $\frac{1}{3}\pi$ cm/s y una aceleración de $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2$ cm/s^2;

(b) en el origen con una velocidad de $\frac{2}{3}\pi$ cm/s y una aceleración de 0;

(c) $\sqrt{3}$ cm a partir del origen con una velocidad de $\frac{1}{3}\pi$ cm/s y una aceleración de $-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2$ cm/s^2;

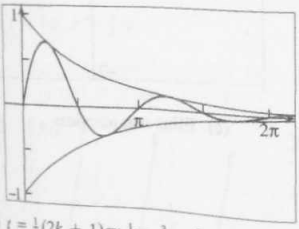
(d) $\sqrt{3}$ cm a partir del origen con una velocidad de $-\frac{1}{3}\pi$ cm/s y una aceleración de $-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2$ cm/s^2;

(e) en el origen con una velocidad de $-\frac{2}{3}\pi$ cm/s y una aceleración de 0

Ejercicios 7.5 (página 421)

En los ejercicios 1-15, hay un punto de intersección para cada valor entero de k.

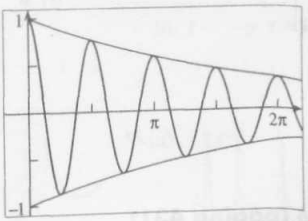
1. (b)



(c) $t = \frac{1}{4}(2k+1)\pi$; $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$;

(d) $t = \frac{1}{2}k\pi$; $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

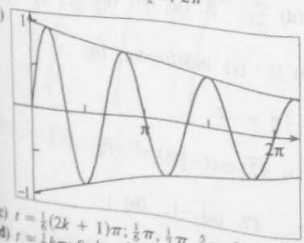
3. (b)



(c) $t = \frac{1}{4}k\pi$; $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi$;

(d) $t = \frac{1}{8}(2k+1)\pi$; $\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$

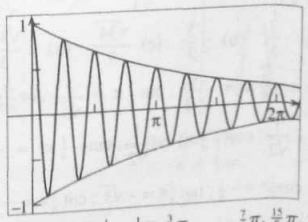
5. (b)



(c) $t = \frac{1}{6}(2k+1)\pi$; $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$;

(d) $t = \frac{1}{3}k\pi$; $0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

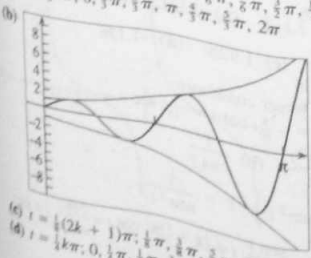
7. (b)



(c) $t = \frac{1}{8}k\pi$; $0, \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi, \ldots, \frac{7}{4}\pi, \frac{15}{8}\pi, 2\pi$;

(d) $t = \frac{1}{16}(2k+1)\pi$; $\frac{1}{16}\pi, \frac{3}{16}\pi, \frac{5}{16}\pi, \ldots, \frac{29}{16}\pi, \frac{31}{16}\pi$

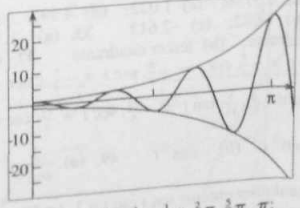
9. (b)



(c) $t = \frac{1}{8}(2k+1)\pi$; $\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi$;

(d) $t = \frac{1}{4}k\pi$; $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$

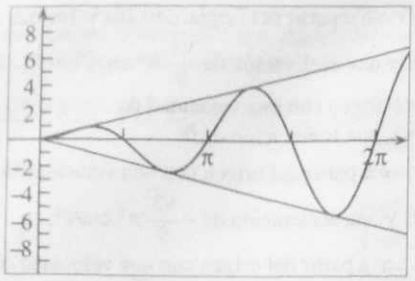
11 (b)



(c) $t = \frac{1}{6}k\pi$; $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$;

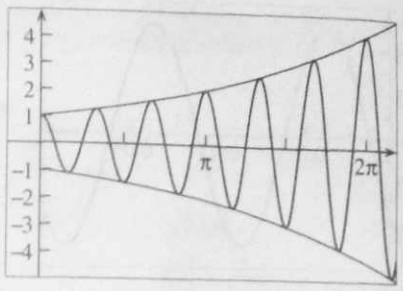
(d) $t = \frac{1}{12}(2k+1)\pi$; $\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{3}{4}\pi$

13. (b)



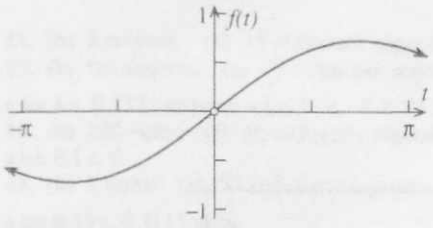
(c) $t = \frac{1}{4}(2k + 1)\pi$; $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$;
(d) $t = \frac{1}{2}k\pi$; $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

15. (b)



(c) $t = \frac{1}{6}k\pi$; $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \ldots, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi$;
(d) $t = \frac{1}{12}(2k + 1)\pi$; $\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{23}{12}\pi$

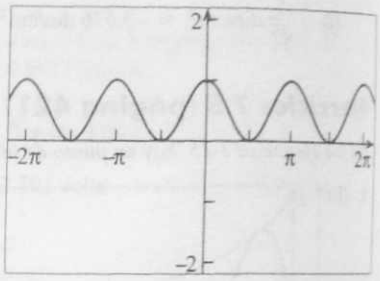
17.



19. (b) $\frac{1}{2}$; (c) 0.4996, 0.4996;
(d) 0.499996, 0.499996;
(e) 0.49999996, 0.49999996;
(f) sí

21. (b) 2; (c) 2.0067, 2.0067;
(d) 2.000067, 2.000067;
(e) 2.00000067, 2.00000067;
(f) sí

23. (a-b)



(c) Ellas son idénticas

Ejercicios 7.6 (página 431)

1. (a) $\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (c) 2; (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 3. (a) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; (b) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; (c) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$; (d) $\frac{3}{2}$ 5. (a) $\frac{12}{5}$; (b) $\frac{5}{12}$; (c) $-\frac{13}{5}$; (d) $-\frac{13}{12}$ 7. (a) $-\frac{3}{5}$; (b) $-\frac{5}{3}$; (c) $\frac{\sqrt{34}}{5}$; (d) $-\frac{\sqrt{34}}{3}$ 9. (a) indefinido; (b) 0; (c) indefinido; (d) −1

11. $\operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$; $\cos\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cot\frac{7}{6}\pi = \sqrt{3}$; $\sec\frac{7}{6}\pi = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\csc\frac{7}{6}\pi = -2$

13. $\operatorname{sen}(-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos(-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan(-\frac{1}{4}\pi) = -1$; $\cot(-\frac{1}{4}\pi) = -1$; $\sec(-\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$; $\csc(-\frac{1}{4}\pi) = -\sqrt{2}$

15. $\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$; $\tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$; $\cot\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec\frac{2}{3}\pi = -2$; $\csc\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 17. (a) −1; (b) 1

19. (a) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$; (b) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 21. (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) 2 23. (a) −1; (b) 0 25. (a) 3.113; (b) 0.3212; (c) 1.060; (d) 2.998

27. (a) 1.743; (b) 0.5736; (c) 1.022; (d) 4.797 29. (a) −3.624; (b) 1.037; (c) 1.928; (d) −1.126

31. (a) 6.955; (b) 1.082; (c) −2.613 33. (a) −1.376; (b) −4.494; (c) −1.236

35. (a) cuarto cuadrante; (b) tercer cuadrante 37. (a) segundo cuadrante; (b) tercer cuadrante

39. $\operatorname{sen} t = \frac{3}{5}$; $\tan t = -\frac{3}{4}$; $\cot t = -\frac{4}{3}$; $\sec t = -\frac{5}{4}$; $\csc t = \frac{5}{3}$ 41. $\operatorname{sen} t = -\frac{15}{17}$; $\cos t = -\frac{8}{17}$; $\cot t = \frac{8}{15}$; $\sec t = -\frac{17}{8}$; $\csc t = -\frac{17}{15}$

43. $\operatorname{sen} t = -\frac{12}{13}$; $\cos t = \frac{5}{13}$; $\tan t = -\frac{12}{5}$; $\sec t = \frac{13}{5}$; $\csc t = -\frac{13}{12}$ 45. (a) $\frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^3 t}$; (b) $\frac{1}{\cos t}$

47. (a) $\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t$; (b) $-\cos^2 t$ 49. (a) $\frac{1}{\operatorname{sen} t}$; (b) $\frac{\pm 1}{(1 - \cos t)^{3/2}}$ 51. $\operatorname{sen}^2 t + 1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$

53. k representa cualquier entero; $\operatorname{sen} t \csc t = 1$, $t \neq k\pi$; $\cos t \sec t = 1$, $t \neq (k + \frac{1}{2})\pi$; $\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$, $t \neq (k + \frac{1}{2})\pi$; $\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$, $t \neq k\pi$; $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, todo t; $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$, $t \neq (k + \frac{1}{2})\pi$; $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$, $t \neq k\pi$

Ejercicios 7.7 (página 443)

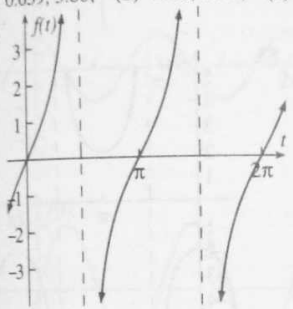
1. (a) -1; (b) -1; (c) -1; (d) -1 **3.** (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (d) $\sqrt{3}$ **5.** (a) $-\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (c) $-\sqrt{3}$; (d) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **7.** (a) 0; (b) indefinido; (c) indefinido; (d) 0 **9.** (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{2}$; (c) -2; (d) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

11. (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; (b) -2; (c) $-\sqrt{2}$; (d) $\sqrt{2}$ **13.** (a) -1; (b) indefinido; (c) indefinido; (d) -1 **15.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{6}\pi$; (c) 5π; (d) 4π **17.** (a) $\frac{2}{7}\pi$; (b) $\frac{7}{2}\pi$; (c) $\frac{1}{7}\pi$; (d) $\frac{4}{7}\pi$ **19.** (a) $\frac{2}{5}$; (b) 4; (c) $\frac{1}{5}$; (d) $\frac{4}{3}$

21. (a) 1.24; (b) -1.42; (c) -0.703; (d) 0.433; (e) -3.75; (f) 1.00

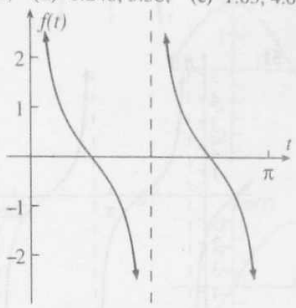
23. (a) 0.659, 3.80; (b) 2.23, 5.37; (c) 1.84, 4.98; (d) 0.240, 3.38; (e) 1.65, 4.63; (f) 0.366, 2.77

25. (a)



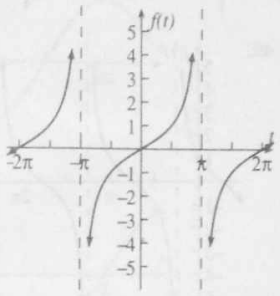
(b) $t = \frac{1}{2}\pi, t = \frac{3}{2}\pi$

27. (a)



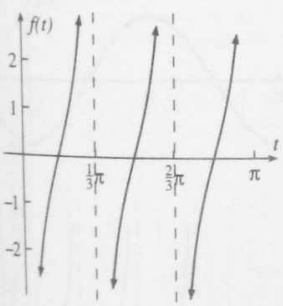
(b) $t = \frac{1}{2}\pi$

29. (a)



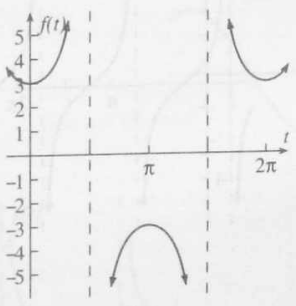
(b) $t = -\pi, t = \pi$

31. (a)



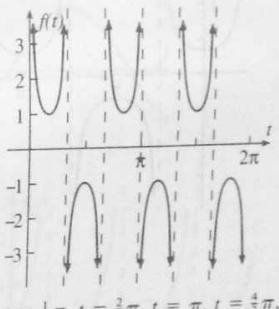
(b) $t = \frac{1}{3}\pi, t = \frac{2}{3}\pi$

33. (a)



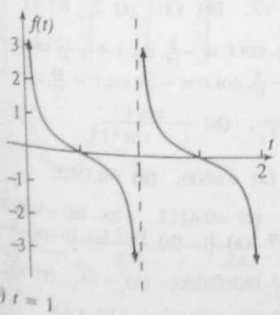
(b) $t = \frac{1}{2}\pi, t = \frac{3}{2}\pi$

35. (a)



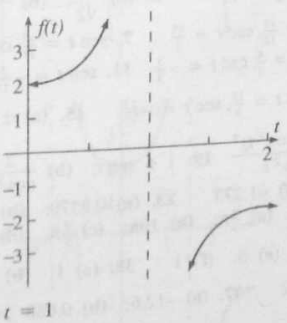
(b) $t = \frac{1}{3}\pi, t = \frac{2}{3}\pi, t = \pi, t = \frac{4}{3}\pi, t = \frac{5}{3}\pi$

37. (a)



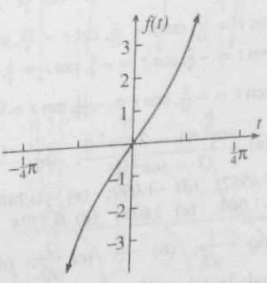
(b) $t = 1$

39. (a)

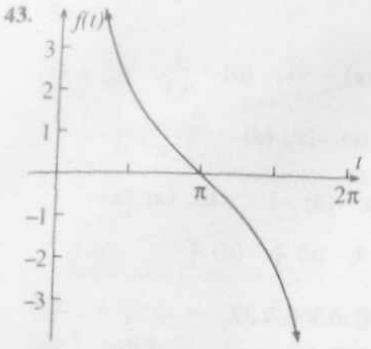


(b) $t = 1$

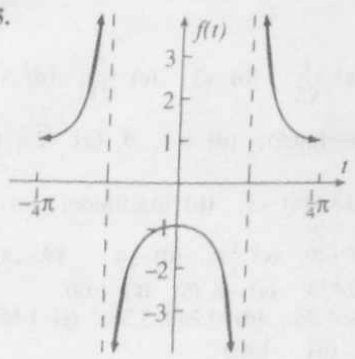
41.



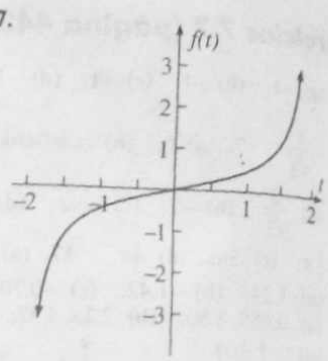
43.



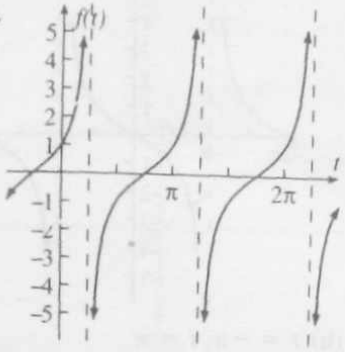
45.



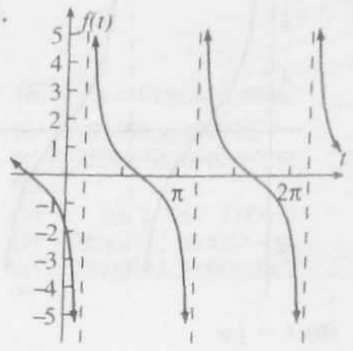
47.



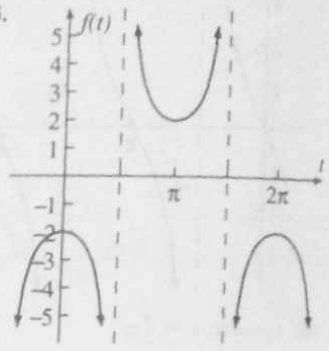
49.



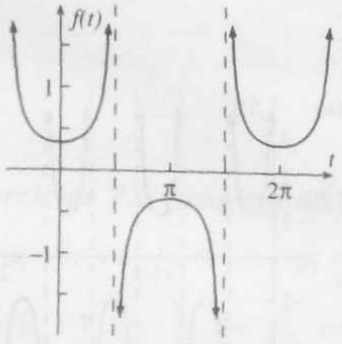
51.



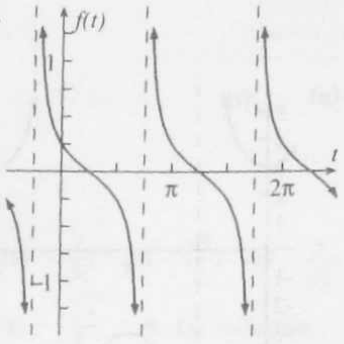
53.



55.



57.



59. Mediante expansión vertical por un factor a; no tiene amplitud

Ejercicios de repaso para el Capítulo 7 (página 445)

1. (a) 1; (b) 0; (c) -1; (d) $\frac{1}{2}$; (e) $-\frac{1}{2}$; (f) -1 **3.** (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $\sqrt{3}$; (d) $\sqrt{3}$; (e) 2; (f) -2

5. $\cos t = \frac{12}{13}$, $\tan t = \frac{5}{12}$, $\cot t = \frac{12}{5}$, $\sec t = \frac{13}{12}$, $\csc t = \frac{13}{5}$ **7.** $\operatorname{sen} t = \frac{15}{17}$, $\cos t = -\frac{8}{17}$, $\cot t = -\frac{8}{15}$, $\sec t = -\frac{17}{8}$, $\csc t = \frac{17}{15}$

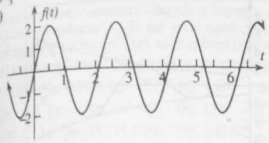
9. $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{5}$, $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\tan t = \frac{3}{4}$, $\cot t = \frac{4}{3}$, $\csc t = -\frac{5}{3}$ **11.** $\operatorname{sen} t = -\frac{5}{13}$, $\tan t = -\frac{5}{12}$, $\cot t = -\frac{12}{5}$, $\sec t = \frac{13}{12}$, $\csc t = -\frac{13}{5}$

13. $\operatorname{sen} t = -\frac{8}{17}$, $\cos t = -\frac{15}{17}$, $\tan t = \frac{8}{15}$, $\cot t = \frac{15}{8}$, $\sec t = -\frac{17}{15}$ **15.** (a) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}}$; (b) $\dfrac{\cos t}{1 - \cos^2 t}$

17. (a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 t(1 - 2\operatorname{sen}^2 t)}{(1 - \operatorname{sen}^2 t)^2}$; (b) $-\dfrac{(1 - \cos^2 t)^2}{\cos^2 t}$ **19.** $1 + \operatorname{sen} t$; (b) $\dfrac{2}{\cos^2 t}$ **21.** (a) 0.6606; (b) -0.7508;
(c) 0.4567; (d) -1.099; (e) -0.7884; (f) -1.273 **23.** (a) 0.8579; (b) -0.7499; (c) -0.6113 **25.** (a) -0.9399;
(b) -1.064; (c) 3.078; (d) 0.5774 **27.** (a) $\frac{2}{5}\pi$; (b) 10π; (c) $\frac{4}{5}\pi$; (d) $\frac{8}{3}\pi$; **29.** (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{10}{3}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) 3

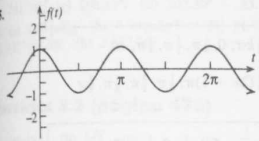
31. (a) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $-\dfrac{1}{2}$; (c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; (d) 0; (e) 0; (f) 1 **33.** (a) 1; (b) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; (c) indefinido; (d) $-\sqrt{3}$; (e) $\sqrt{3}$;
(f) indefinido **35.** (a) 0.955; (b) 0.762 **37.** (a) -12.6; (b) 0.688 **39.** (a) 0.573, 2.57; (b) 1.86, 4.42
41. (a) 1.46, 4.60; (b) 4.47, 4.95

43. (a) $\frac{2}{3}\pi$;
(b)

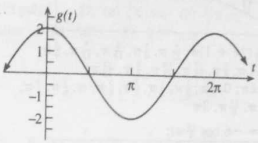


(c) en la posición central;
(d) 0.28 cm arriba de la posición central;
(e) 0.56 cm abajo de la posición central;
(f) 1.50 cm abajo de la posición central

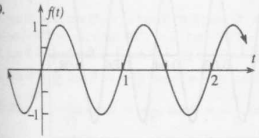
45.



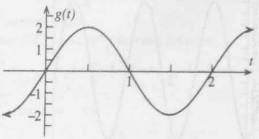
47.



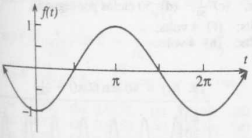
49.



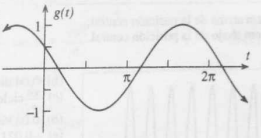
51.



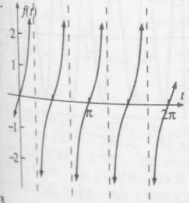
53.



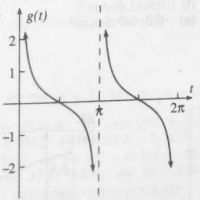
55.



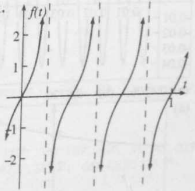
57.



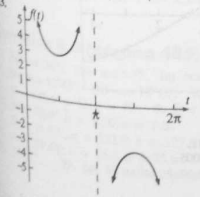
59.



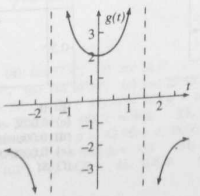
61.



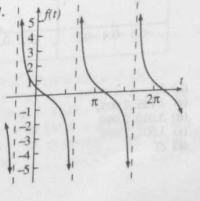
63.



65.

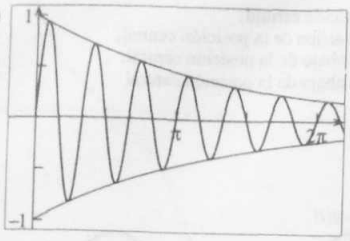


67.



En los ejercicios 69-71, hay un punto de intersección para cada valor entero de k.

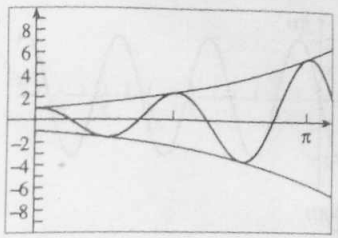
69. (b)



(c) $t = \frac{1}{12}(2k + 1)\pi$; $\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{23}{12}\pi$;

(d) $t = \frac{1}{6}k\pi$; $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi$

71. (b)

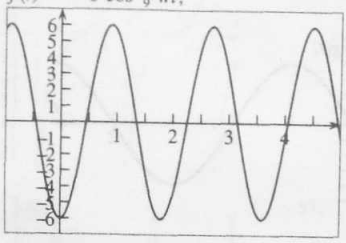


(c) $t = \frac{1}{4}k\pi$; $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$;

(d) $t = \frac{1}{8}(2k + 1)\pi$; $\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi$

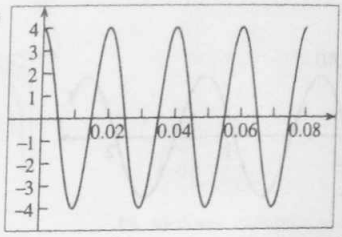
73. (a) $f(t) = -6 \cos \frac{10}{9}\pi t$;

(b)



(c) 5.64 cm arriba de la posición central;
(d) 1.04 cm abajo de la posición central

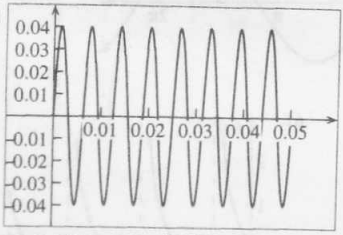
75. (a)



(b) 4 volts; (c) $\frac{1}{50}$; (d) 50 ciclos por segundo;
(e) −4 volts; (f) 4 volts;
(g) −4 volts; (h) 4 volts

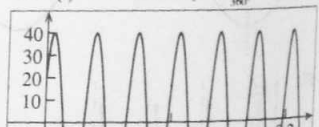
77.

(a)



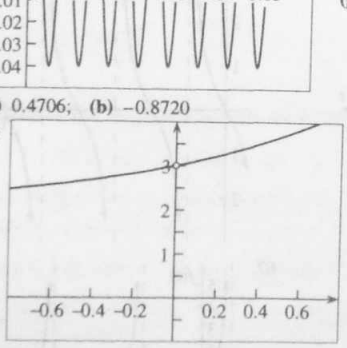
(b) 0.04 din/cm^2;
(c) $\frac{500}{\pi}$ ciclos por segundo;
(d) 0.03366 din/cm^2;
(e) −0.02176 din/cm^2;
(f) 0.03652 din/cm^2;
(g) −0.01049 din/cm^2

79. $I(t) = 40 \text{ sen } 60\pi(t + \frac{1}{360})$



81. (a) 0.4706; (b) −0.8720

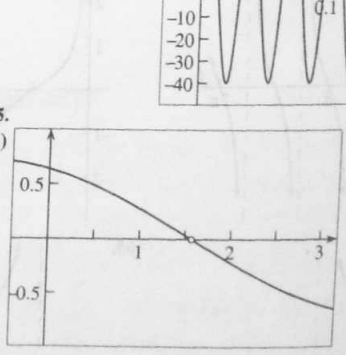
83. (a)



(b) 3;
(c) 3.105, 2.905;
(d) 3.010, 2.990;
(e) 3.001, 2.999;
(f) Sí

85.

(a)



(b) 0;
(c) 0.005, −0.0046;
(d) 0.000898, −0.001;
(e) 0.000048, −0.00005;
(f) Sí

Ejercicios 8.1 (página 458)

1. (a) en el primer cuadrante; (b) en el segundo cuadrante; (c) ángulo cuadrantal; (d) en el tercer cuadrante; (e) en el cuarto cuadrante **3.** (a) en el cuarto cuadrante; (b) ángulo cuadrantal; (c) en el tercer cuadrante; (d) en el segundo cuadrante; (e) en el primer cuadrante **5.** (a) en el primer cuadrante; (b) en el segundo cuadrante; (c) en el tercer cuadrante; (d) en el cuarto cuadrante; (e) en el segundo cuadrante **7.** (a) $\frac{5}{4}\pi$; (b) $\frac{7}{6}\pi$; (c) $\frac{3}{2}\pi$; (d) $\frac{5}{3}\pi$
9. (a) 1.00; (b) 2.72; (c) 2.03; (d) 1.56 **11.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{3}{4}\pi$; (c) $\frac{7}{6}\pi$; (d) $-\frac{5}{6}\pi$ **13.** (a) $\frac{1}{9}\pi$; (b) $\frac{5}{2}\pi$; (c) $-\frac{5}{12}\pi$; (d) $\frac{5}{9}\pi$ **15.** (a) 45°; (b) 120°; (c) 330°; (d) −90° **17.** (a) 28.65°; (b) −114.59°; (c) 273.87°; (d) 13.18° **19.** (a) 35.37°, 0.62; (b) 102.52°, 1.79 **21.** (a) 315°; (b) 150°; (c) 180°; (d) 240° **23.** (a) 22.56°; (b) 241.76°; (c) 106.15°; (d) 302.36° **25.** (a) 6π pulg; (b) 27π pulg^2 **27.** (a) $\frac{9}{2}\pi$ cm; (b) $\frac{27}{2}\pi$ cm^2
29. (a) 1.82 pulg; (b) 4.30 pulg^2 **31.** 21.70° N **33.** 1 009 millas **35.** 560 **37.** 2.79 pulg
39. (a) 611.56; (b) 2 342.76

Ejercicios 8.2 (página 475)

1. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (c) 1 **3.** (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $-\frac{1}{2}$; (c) $-\sqrt{3}$ **5.** (a) $-\frac{1}{2}$; (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $\sqrt{3}$
7. sen 0° = 0; cos 0° = 1; tan 0° = 0; sec 0° = 1; cot 0° y csc 0° no están definidos
9. sen(−90°) = −1; cos(−90°) = 0, cot(−90°) = 0; csc(−90°) = −1; tan(−90°) y sec(−90°) no están definidos
11. sen $\theta = \frac{4}{5}$; cos $\theta = \frac{3}{5}$; tan $\theta = \frac{4}{3}$; cot $\theta = \frac{3}{4}$; sec $\theta = \frac{5}{3}$; csc $\theta = \frac{5}{4}$
13. sen $\theta = \frac{8}{17}$; cos $\theta = -\frac{15}{17}$; tan $\theta = -\frac{8}{15}$; cot $\theta = -\frac{15}{8}$; sec $\theta = -\frac{17}{15}$; csc $\theta = \frac{17}{8}$
15. sen $\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; cos $\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; tan $\theta = -\frac{1}{2}$; cot $\theta = -2$; sec $\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; csc $\theta = -\sqrt{5}$
17. sen $\theta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$; cos $\theta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; tan $\theta = 4$; cot $\theta = \frac{1}{4}$; sec $\theta = -\sqrt{17}$; csc $\theta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$
19. sen $\theta = \frac{4}{\sqrt{65}}$; cos $\theta = \frac{7}{\sqrt{65}}$; tan $\theta = \frac{4}{7}$; cot $\theta = \frac{7}{4}$; sec $\theta = \frac{\sqrt{65}}{7}$; csc $\theta = \frac{\sqrt{65}}{4}$
21. sen $\theta = \frac{2}{3}$; cot $\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; tan $\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; cot $\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; sec $\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$; csc $\theta = \frac{3}{2}$
23. (a) 0.5358; (b) 0.5358; (c) 3.4197; (d) 3.4197; (e) 1.4020; (f) 1.4020
25. (a) 0.9677; (b) 0.9252; (c) 0.6950; (d) 0.0332; (e) 1.6464; (f) 21.2285
27. (a) 0.9239; (b) 0.8974; (c) 3.1566; (d) 0.3249
29. (a) sen 45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) − cos 30° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (c) − tan 60° = $-\sqrt{3}$; (d) − cot 30° = $-\sqrt{3}$;
(e) −sec 0° = −1; (f) − csc 60° = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
31. (a) $-\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$; (d) $\cot\frac{1}{2}\pi = 0$; (e) $-\sec\frac{1}{6}\pi = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; (f) $-\csc\frac{1}{6}\pi = -2$
33. (a) sen 55°42′ ≈ 0.8261; (b) − cos 63°36′ ≈ −0.4446; (c) − tan 15°6′ ≈ −0.2698
35. (a) − cos 7.6° ≈ −0.9912; (b) sen 83.8° ≈ 0.9942; (c) tan 20.2° ≈ 0.3679
37. (a) cot 10°30′ ≈ 5.3955; (b) sec 67.4° ≈ 2.6022; (c) csc 4.5° ≈ 12.746 **39.** (a) 30°, 150°; (b) 120°, 240°; (c) 45°, 225°
41. (a) $\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; (b) $\frac{1}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$; (c) $0, \pi$ **43.** (a) 31.1°, 148.9°; (b) 80.3°, 279.7°; (c) 67.1°, 247.1°; (d) 43.5°, 223.5°
45. (a) 0.4342, 2.707; (b) 1.938, 4.346; (c) 1.142, 4.284; (d) 2.917, 6.058

Ejercicios 8.3 (página 485)

1. (a) cos 30°; (b) sen 5.7°; (c) cot 40.2°; (d) tan 37.9°; (e) sec 22.5°
3. (a) cos 42°42′; (b) sen 18°18′; (c) cot 44°; (d) tan 34°54′; (e) csc 25°30′ **5.** $\beta = 30°; a = 2.3; b = 1.4$
7. $\alpha = 45°; b = 56; c = 79$ **9.** $\beta = 66°; b = 36; c = 39$ **11.** $\alpha = 19°; a = 14; b = 42$ **13.** $\alpha = 47°; \beta = 43°; a = 28$
15. $\alpha = 52.6°; b = 3.20; c = 5.26$ **17.** $\beta = 73.1°; b = 448; c = 468$ **19.** $\alpha = 47.6°; \beta = 42.4°; c = 86.1$
21. $\beta = 31.57°; a = 532.8; b = 327.4$ **23.** $\alpha = 49.08°; a = 42.36; c = 56.06$ **25.** $\alpha = 22.74°; \beta = 67.26°; b = 746.1$
27. $\alpha = 24°42′; a = 16.4; b = 35.6$ **29.** $\beta = 60°24′; a = 163; c = 330$ **31.** $(3.0)10^2$ **33.** $(1.167)10^5$ **35.** 333 m
37. 13.32° **39.** (a) 50 millas náuticas; (b) 162°; (c) 342° **41.** 108 m **43.** 367 m

Ejercicios 8.4 (página 498)

1. $b = 5.6$ 3. $a = 51$ 5. $\gamma = 75°$; $b = 41$; $c = 41$ 7. $\alpha = 70.0°$; $a = 56.9$; $b = 45.5$
9. $\beta = 83.0°$; $a = 2.22$; $c = 0.935$ 11. $\gamma = 51°42'$; $a = 335$; $c = 331$ 13. un triángulo; $\beta = 29°$; $\gamma = 109°$; $c = 9.0$
15. un triángulo; $\alpha = 60°$; $\gamma = 90°$; $a = 29$ 17. dos triángulos; $\alpha_1 = 67.3°$; $\beta_1 = 77.5°$; $b_1 = 72.0$; $\alpha_2 = 112.7°$; $\beta_2 = 32.1°$; $b_2 = 39.2$ 19. un triángulo; $\alpha = 27.2°$; $\gamma = 36.4°$; $c = 560$ 21. no hay triángulo 23. dos triángulos; $\alpha_1 = 64.48°$; $\gamma_1 = 65.29°$; $a_1 = 4.182$; $\alpha_2 = 15.06°$; $\gamma_2 = 114.71°$; $a_2 = 1.204$ 25. $(4.7)10^2$ 27. 1.03 29. 14 31. $(1.08)10^5$
33. 61.8 m 35. 296 m 37. 9.80 pie

Ejercicios 8.5 (página 505)

1. $c = 5.6$ 3. $b = 34$ 5. $\beta = 55°$; $\gamma = 43°$; $a = 4.1$ 7. $\alpha = 26.4°$; $\beta = 37.2°$; $c = 22.6$
9. $\alpha = 18.51°$; $\gamma = 150.97°$; $b = 1\,176$ 11. $\alpha = 26°23'$; $\beta = 18°25'$; $c = 8.34$ 13. 12.3 15. 76.7 17. $(5.836)10^5$
19. $\alpha = 44°$; $\beta = 108°$; $\gamma = 28°$ 21. $\alpha = 57.5°$; $\beta = 24.6°$; $\gamma = 97.9°$ 23. $\alpha = 98.3°$; $\beta = 38.4°$; $\gamma = 43.3°$
25. $\alpha = 144.36°$; $\beta = 27.74°$; $\gamma = 7.90°$ 27. (a) 33°; (b) $(3.9)10^2$ 29. (a) 30.4 cm; (b) 194 cm^2
31. (a) 17.3 millas náuticas; (b) 188.1° 33. 58.7 m 35. 31.3° 37. 56° 39. (a) 39.2 millas; (b) 212.5°
45. $(3.83)10^4$ 47. 20

Ejercicios de repaso para el Capítulo 8 (página 509)

1. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $\frac{5}{4}\pi$ 3. (a) $-\frac{2}{3}\pi$; (b) 1.75 5. (a) 60°; (b) 315° 7. (a) −19.1°; (b) 135.2°
9. (a) 10π cm; (b) $60\pi\ cm^2$ 11. $\operatorname{sen}\theta = \frac{15}{17}$; $\cos\theta = -\frac{8}{17}$; $\tan\theta = -\frac{15}{8}$; $\cot\theta = -\frac{8}{15}$; $\sec\theta = -\frac{17}{8}$; $\csc\theta = \frac{17}{15}$
13. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$; $\cos\theta = -\frac{5}{13}$; $\tan\theta = -\frac{12}{5}$; $\cot\theta = -\frac{5}{12}$; $\sec\theta = -\frac{13}{5}$; $\csc\theta = \frac{13}{12}$
15. $\operatorname{sen}45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan 45° = 1$; $\cot 45° = 1$; $\sec 45° = \sqrt{2}$; $\csc 45° = \sqrt{2}$
17. $\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$; $\tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$; $\cot\frac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec\frac{2}{3}\pi = -2$; $\csc\frac{2}{3}\pi = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
19. $\operatorname{sen}(-150°) = -\dfrac{1}{2}$; $\cos(-150°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan(-150°) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cot(-150°) = \sqrt{3}$; $\sec(-150°) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\csc(-150°) = -2$
21. $\operatorname{sen}(-\frac{9}{4}\pi) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cot(-\frac{9}{4}\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\tan(-\frac{9}{4}\pi) = -1$; $\cot(-\frac{9}{4}\pi) = -1$; $\sec(-\frac{9}{4}\pi) = \sqrt{2}$; $\csc(-\frac{9}{4}\pi) = -\sqrt{2}$
23. sen 270° = −1; cos 270° = 0; cot 270° = 0; csc 270° = −1; tan 270° y sec 270° no están definidas
25. $\operatorname{sen}(-\pi) = 0$; $\cos(-\pi) = -1$; $\tan(-\pi) = 0$; $\sec(-\pi) = -1$; $\cot(-\pi)$ y $\csc(-\pi)$ no están definidas
27. (a) 45°; (b) 38°; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) 1.13; (e) $\frac{4}{9}\pi$; (f) 1.33 29. (a) $\operatorname{sen}30° = \dfrac{1}{2}$; (b) $-\cos 45° = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
(c) $-\tan 60° = -\sqrt{3}$; (d) $-\cot\frac{1}{4}\pi = -1$; (e) $-\sec\frac{1}{3}\pi = -2$; (f) $-\csc\frac{1}{6}\pi = -2$
31. (a) sen 43.6° ≈ 0.6869; (b) cos 10.8° ≈ 0.9823; (c) −tan 32.9° ≈ −0.6469; (d) −cot 25.7° ≈ −2.0778;
(e) −sec 14.8° ≈ −1.0343; (f) −csc 81.4° ≈ −1.0114 33. (a) 60°, 300°; (b) 135°, 315° 35. (a) $\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$; (b) π
37. (a) 18.8°, 161.2°; (b) 61.3°, 298.7°; (c) 71.3°, 251.3°; (d) 168.0°, 348.0° 39. (a) 3.924, 5.501; (b) 1.351, 4.933;
(c) 2.206, 5.348; (d) 0.8685, 4.010 41. 32 43. 3.7 45. 70 47. $\alpha = 56°$; $\beta = 34°$; $c = 5.8$
49. $\gamma = 75.4°$; $a = 20.9$; $c = 29.5$ 51. $\alpha = 28.7°$; $\beta = 46.0°$; $c = 43.4$ 53. $\alpha = 54.46°$; $\beta = 43.67°$; $\gamma = 81.87°$
55. 271 57. $(1.128)10^5$ 59. dos triángulos; $\beta_1 = 72.0°$; $\gamma_1 = 53.6°$; $c = 111$; $\beta_2 = 108.0°$; $\gamma_2 = 17.6°$; $c_2 = 41.6$
61. un triángulo; $\alpha = 107.7°$; $\gamma = 32.6°$; $a = 19.1$ 63. 336 65. (a) 111 pie; (b) 256 pie 67. 60°
69. (a) 241 millas; (b) 73.0° 71. 40.6 pie 73. 27.5 75. 78.8

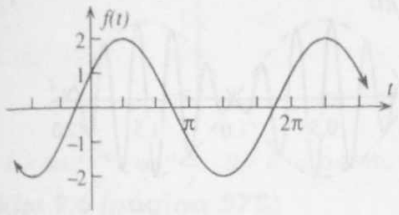
Ejercicios 9.1 (página 520)

1. (a) sen x; (b) $\cos^2 x$ 3. (a) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$; (b) $\cos^2 x$ 5. (a) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$; (b) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ 43. sea $t = \frac{1}{4}\pi$
45. sea $y = \frac{1}{4}\pi$ 47. no es identidad; sea $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 49. identidad 51. no es identidad; sea $x = \frac{3}{4}\pi$ 53. identidad

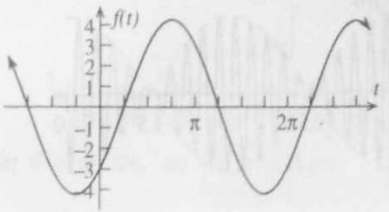
Ejercicios 9.2 (página 533)

1. (a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; (b) $\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 3. (a) $\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; (b) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ 5. (a) $-2-\sqrt{3}$; (b) $2-\sqrt{3}$ 7. (a) 1; (b) −1
9. (a) $\dfrac{1}{2}$; (b) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 11. (a) 1; (b) $-\sqrt{3}$ 13. (a) $\frac{323}{325}$; (b) $\frac{36}{325}$; (c) $\frac{253}{325}$; (d) $\frac{204}{325}$; (e) primero; (f) primero

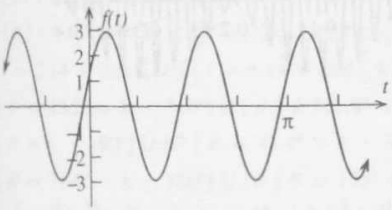
15. (a) $\frac{16}{65}$; (b) $-\frac{63}{65}$; (c) $\frac{56}{65}$; (d) $-\frac{33}{65}$; (e) segundo; (f) segundo **17.** (a) $-\frac{37}{9}$; (b) $\frac{19}{33}$; (c) segundo; (d) primero
19. (a) $-\frac{38}{55}$; (b) $\frac{62}{25}$; (c) cuarto; (d) primero **31.** (a) $\cos 7x$; (b) $\operatorname{sen} 7x$ **33.** (a) $-\cos 10x$; (b) $-\operatorname{sen} x$
35. (a) $\tan 10x$; (b) $-\tan 2x$
43. (a) $f(t) = 2\operatorname{sen}(t + \frac{1}{6}\pi)$;
(b) la amplitud es 2, el periodo es 2π,
el defasamiento es $\frac{1}{6}\pi$;
(c)



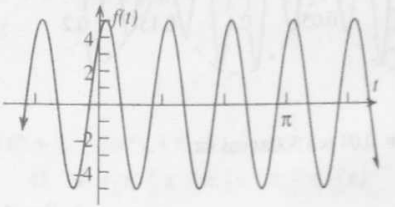
45. (a) $f(t) = 3\sqrt{2}\operatorname{sen}(t - \frac{1}{4}\pi)$;
(b) la amplitud es $3\sqrt{2}$, el periodo es 2π,
el defasamiento es $-\frac{1}{4}\pi$;
(c)



47. (a) $f(x) = 2.94\operatorname{sen}(4t + 0.45)$;
(b) la amplitud es 2.94; el periodo es $\frac{1}{2}\pi$,
el defasamiento es 0.11;
(c)



49. (a) $f(t) = 5\operatorname{sen}(6t + 0.93)$;
(b) la amplitud es 5, el periodo es $\frac{1}{3}\pi$,
la frecuencia es $\frac{3}{\pi}$;
(c)



51. $f(t) = 0.043\operatorname{sen}(2\pi nt - 0.72)$ **53.** (a) $s = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(4t + \frac{1}{4}\pi)$; (b) la amplitud es $\dfrac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, la frecuencia es $\dfrac{2}{\pi}$
55. $10\sqrt{5}$ pie **57.** (b) $\cos x$

Ejercicios 9.3 (página 546)

1. (a) $\frac{24}{25}$; (b) $-\frac{7}{25}$; (c) $-\frac{24}{7}$ **3.** (a) $-\frac{120}{169}$; (b) $-\frac{119}{169}$; (c) $\frac{120}{119}$ **5.** (a) $\frac{240}{289}$; (b) $\frac{161}{289}$; (c) $\frac{240}{161}$
7. (a) $-\frac{336}{625}$; (b) $\frac{527}{625}$; (c) $-\frac{336}{527}$ **9.** $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ **11.** $\operatorname{sen} 4x = \pm 4\operatorname{sen} x\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}(1 - 2\operatorname{sen}^2 x)$
13. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$ **15.** $\sec 2x = \dfrac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$ **17.** $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t$ **19.** $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 12t$
23. (a) $\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ **25.** $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ **27.** $-1 - \sqrt{2}$ **29.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **31.** $\frac{3}{5}$ **33.** 5
35. (a) $\cos 2x$; (b) $\cos 4x$; (c) $\operatorname{sen} 3x$ **37.** (a) $\operatorname{sen} 2x$; (b) $2\operatorname{sen} 8x$; (c) $\operatorname{sen} x$
39. (a) $\tan 2x$; (b) $-2\tan 4x$; (c) $3\tan 3x$ **41.** (a) $\tan t$; (b) $\tan 2t$; (c) $-\tan 2t$
43. (a) $\operatorname{sen} 2t$; (b) $\operatorname{sen} 4t$; (c) $2\operatorname{sen} 4t$ **55.** $\dfrac{2 - 2z}{1 + z^2}$ **57.** $\dfrac{4z(1 - z^2)}{(1 + z^2)^2} + \dfrac{2z}{1 - z^2}$ **59.** $\dfrac{z^4 + 6z^2 + 1}{(1 - z^2)^2}$
61. (a) $s = 6\operatorname{sen}(8t + \frac{1}{2}\pi)$; (b) la amplitud es 6, la frecuencia es $\frac{4}{\pi}$

Ejercicios 9.4 (página 554)

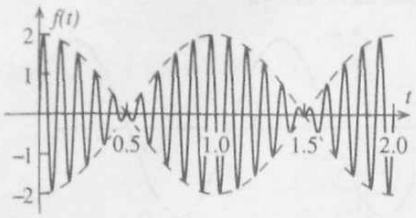
1. (a) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x)$; (b) $\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 5x)$; (c) $\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x)$
3. (a) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 4x)$; (b) $\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$; (c) $\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x)$ **5.** (a) $\frac{1}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$; (b) $\dfrac{-2 - \sqrt{2}}{4}$

7. (a) $\frac{-2-\sqrt{2}}{4}$; (b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$ **9.** (a) $2 \operatorname{sen} 4t \cos 2t$; (b) $2 \cos 4t \operatorname{sen} 2t$; (c) $2 \cos 4t \cos 2t$; (d) $-2 \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen} 2t$

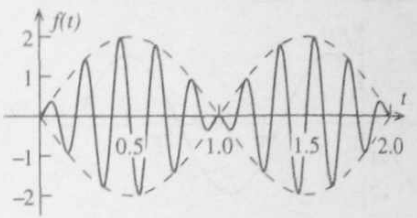
11. (a) $2 \operatorname{sen} 5\theta \cos 2\theta$; (b) $-2 \cos 5\theta \operatorname{sen} 2\theta$; (c) $2 \cos 5\theta \cos 2\theta$; (d) $2 \operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen} 2\theta$

13. (a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **15.** (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

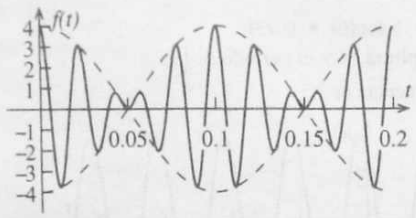
35. $\operatorname{sen} 21\pi t + \operatorname{sen} 19\pi t = 2 \operatorname{sen} 20\pi t \cos \pi t$



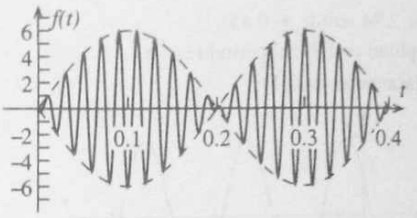
37. $\cos 9\pi t - \cos 11\pi t = 2 \operatorname{sen} 10\pi t \operatorname{sen} \pi t$



39. $2 \cos 80\pi t + 2 \cos 100\pi t = 4 \cos 90\pi t \cos 10\pi t$



41. $3 \operatorname{sen} 95t - 3 \operatorname{sen} 105t = -6 \cos 100t \operatorname{sen} 5t$



47. $f(t) = 0.04 \operatorname{sen} 500\pi t \cos 4\pi t$

Ejercicios 9.5 (página 568)

1. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **3.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{7}{6}\pi$

5. (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) $-\frac{1}{2}\pi$; (c) $\frac{1}{2}\pi$; (d) $-\frac{1}{2}\pi$; (e) 0 **7.** (a) 0.51; (b) −0.51; (c) 1.06; (d) 2.08

9. (a) 0.41; (b) −0.41; (c) 1.16; (d) 1.98 **11.** (a) 1.07; (b) 4.21; (c) 0.50; (d) −2.64

13. (a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; (b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; (c) $2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; (e) 3 **15.** (a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; (b) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; (c) $-2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; (e) −3

17. (a) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\sqrt{5}$; (e) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ **19.** (a) $-\frac{2}{3}$; (b) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$; (c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; (e) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$

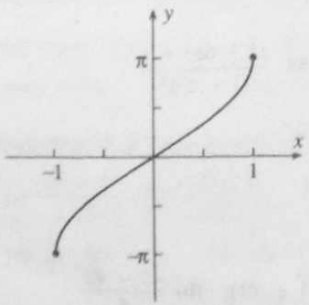
21. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{6}\pi$ **23.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{2}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$

25. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{3}\pi$ **27.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $\frac{2}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$

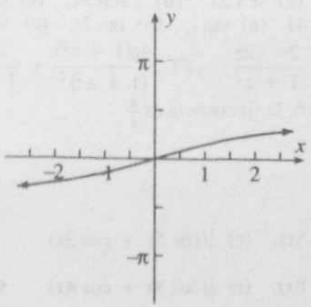
29. (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{4}{3}\pi$; (d) $\frac{4}{3}\pi$ **31.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{5}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{5}{6}\pi$ **33.** (a) $\sqrt{3}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

35. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **37.** $\frac{119}{169}$ **39.** $\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$ **41.** $\frac{7\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{27}$ **43.** $\frac{3\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}+3} = \frac{48-25\sqrt{3}}{39}$ **45.** $\frac{4\sqrt{2}+1}{3\sqrt{5}}$

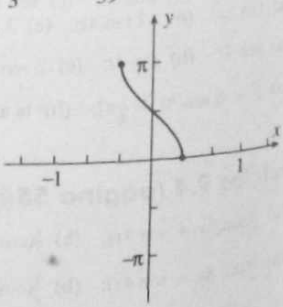
49.



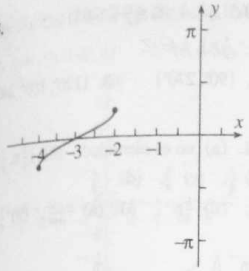
51.



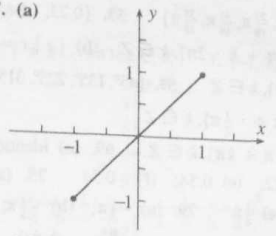
53.



55.

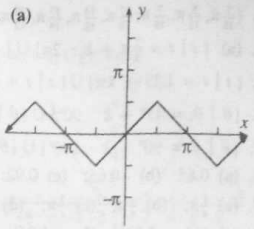


57. (a)



(b) $[-1, 1]$; (c) $[-1, 1]$

59. (a)



(b) $(-\infty, +\infty)$; (c) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

61. (a) $\theta = \tan^{-1}\frac{5}{x} - \tan^{-1}\frac{2}{x}$; (b) $\theta \approx 0.4049$; (c) $\theta \approx 0.4424$; (d) $\theta \approx 0.4324$; (e) $\sqrt{10} \approx 3.16$ pie

Ejercicios 9.6 (página 578)

1. (a) $\{\frac{1}{2}\pi\}$; (b) $\{\frac{1}{3}\pi\}$ **3.** (a) $\{\frac{1}{4}\pi\}$; (b) $\{\frac{1}{3}\pi\}$; **5.** (a) $\{0\}$; (b) $\{\frac{1}{4}\pi\}$ **7.** (a) $\{0, \frac{1}{2}\pi\}$; (b) $\{\frac{1}{2}\pi\}$

9. (a) $\{0, \frac{1}{3}\pi\}$; (b) $\{0, \frac{1}{4}\pi\}$ **11.** (a) $\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$; (b) $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$ **13.** (a) $\{\frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi\}$; (b) $\{\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$

15. (a) $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\}$ (b) $\{\frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi\}$ **17.** (a) $\{\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$; (b) $\{\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$ **19.** $\{2.14, 4.14\}$ **21.** $\{0.87, 2.44, 4.01, 5.58\}$

23. (a) $\{48.2°, 311.8°\}$ **25.** $\{0°, 41.4°, 180°, 318.6°\}$ **27.** $\{71.6°, 135°, 251.6°, 315°\}$

29. (a) $\{t \mid t = \frac{1}{6}\pi + k\pi\} \cup \{t \mid t = \pi + k\pi\}, k \in Z$; (b) $\{t \mid t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi\}, k \in Z$

31. (a) $\{t \mid t = \frac{1}{4}\pi + k\pi\}, k \in Z$; (b) $\{t \mid t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\}, k \in Z$

33. $\{t \mid t = 2.14 + 2k\pi\} \cup \{t \mid t = 4.14 + 2k\pi\}, k \in Z$

35. $\{\theta \mid \theta = 48.2° + k \cdot 360°\} \cup \{\theta \mid \theta\ 311.8° + k \cdot 360°\}, k \in Z$

37. $\{\theta \mid \theta = k \cdot 180°\} \cup \{\theta \mid \theta = 41.4° + k \cdot 360°\} \cup \{\theta \mid \theta = 318.6° + k \cdot 360°\}, k \in Z$

39. $\{\theta \mid \theta = 71.6° + k \cdot 180°\} \cup \{\theta \mid \theta = 135° + k \cdot 180°\}, k \in Z$ **41.** (a) $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi\}$;

(b) $\{\frac{1}{18}\pi, \frac{5}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi, \frac{17}{18}\pi, \frac{25}{18}\pi, \frac{29}{18}\pi\}$ **43.** (a) $\{\frac{5}{24}\pi, \frac{11}{24}\pi, \frac{17}{24}\pi, \frac{23}{24}\pi, \frac{29}{24}\pi, \frac{35}{24}\pi, \frac{41}{24}\pi, \frac{47}{24}\pi\}$;

(b) $\{\frac{1}{15}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{7}{15}\pi, \frac{11}{15}\pi, \frac{13}{15}\pi, \frac{17}{15}\pi, \frac{19}{15}\pi, \frac{23}{15}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{19}{15}\pi\}$ **45.** (a) $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$; (b) $\{\frac{4}{3}\pi\}$ **47.** (a) $\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\}$; (b) $\{\frac{1}{2}\pi\}$

49. (a) $\{x \mid x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi\}, k \in Z$; (b) $\{x \mid x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\} \cup \{x \mid x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi\}, k \in Z$

51. (a) $\{x \mid x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi\}, k \in Z$; (b) $\{x \mid x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi\}, k \in Z$

53. $\{0°, 20°, 90°, 100°, 140°, 180°, 220°, 260°, 270°, 340°\}$ **55.** $\{22.5°, 73.2°, 112.5°, 163.2°, 202.5°, 253.2°, 292.5°, 343.2°\}$

57. (a) identidad **59.** (a) no es identidad; (b) $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$

61. (a) no es identidad; (b) $\{0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$ **63.** (a) $\frac{1}{25}$; (b) $\frac{1}{50}$ **65.** (a) $\frac{5}{9}$; (b) 0.61

67. (a) $\left\{t \mid t = \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} - \frac{1}{8} + k \cdot \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{t \mid t = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} + k \cdot \frac{1}{2}\right\}, k \in Z$; (b) $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$

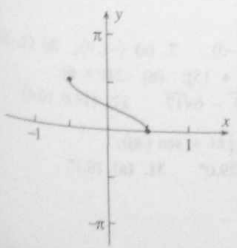
69. Para $[-\pi, \pi]$ el conjunto solución de $\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{4}\pi = 0$ es $\{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\}$; y para $x^2 - (\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2})^2 = 0$ es $\{-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi\}$.

Ejercicios de repaso para el Capítulo 9 (página 581)

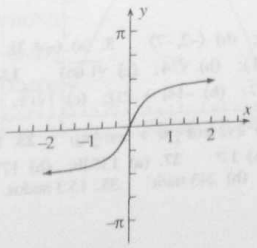
29. (a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; (b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ **31.** (a) $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$; (b) $-2 - \sqrt{3}$ **33.** (a) $\frac{253}{325}$; (b) $\frac{204}{325}$; (c) $-\frac{323}{325}$; (d) $-\frac{36}{325}$;

(e) primero; (f) tercero **35.** -2 **37.** $\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 4t - \frac{1}{16}\cos 8t + \frac{1}{32}\cos 12t$ **39.** $\frac{6 - 4z}{1 + z^2}$

41.



43.



45. (a) $\{\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\}$; (b) $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$

47. $\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\}$

49. $\{1.25, \frac{3}{4}\pi, 4.39, \frac{7}{4}\pi\}$

51. $\{\frac{1}{18}\pi, \frac{5}{18}\pi, \frac{7}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi, \frac{17}{18}\pi, \frac{19}{18}\pi, \frac{23}{18}\pi, \frac{25}{18}\pi, \frac{29}{18}\pi, \frac{31}{18}\pi, \frac{35}{18}\pi\}$ **53.** $\{0.23, 1.34, 1.80, 2.91, 3.37, 4.48, 4.94, 6.05\}$

55. (a) $\{t \mid t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi\} \cup \{t \mid t = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi\}, k \in Z$; (b) $\{t \mid t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi\}, k \in Z$

57. $\{t \mid t = 1.25 + k\pi\} \cup \{t \mid t = \frac{3}{4}\pi + k\pi\}, k \in Z$ **59.** $\{45°, 135°, 225°, 315°\}$ **61.** $\{90°, 270°\}$ **63.** $\{120°, 180°, 240°\}$

65. $\{\theta \mid \theta = 45° + k \cdot 90°\} \cup \{\theta \mid \theta = \frac{1}{4}\pi + \cdot \frac{1}{2}\pi\}, k \in Z$

67. $\{\theta \mid \theta = 90° + k \cdot 180°\} \cup \{\theta \mid \theta = \frac{1}{2}\pi + k\pi\}, k \in Z$ **69.** (a) identidad **71.** (a) no es identidad; (b) $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\}$

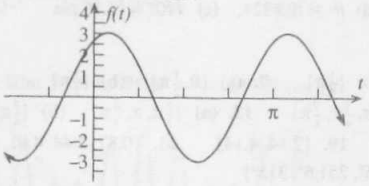
73. (a) 0.65 (b) −0.65; (c) 0.92; (d) 2.22; (e) 0.54; (f) −0.54 **75.** (a) $\frac{4}{5}$; (b) $\frac{3}{5}$; (c) $\frac{3}{4}$; (d) $-\frac{3}{4}$

77. (a) $\frac{1}{4}\pi$; (b) $\frac{1}{4}\pi$; (c) $\frac{3}{4}\pi$; (d) $-\frac{1}{4}\pi$; (e) $\frac{1}{4}\pi$ **79.** (a) $-\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{1}{3}\pi$ **81.** (a) $-\frac{120}{169}$; (b) $\frac{3}{4}$

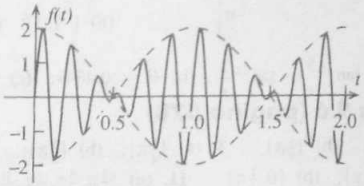
83. (a) $f(t) = 3.03 \operatorname{sen}(2t + 1.06)$;

(b) la amplitud es 3.030, el periodo es π, el defasamiento es 0.53;

(c)

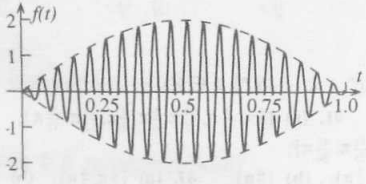


85.



87. (a) $f(t) = 2 \operatorname{sen} 40\pi t \cos \pi t$;

(b)



89. $f(t) = 0.061 \operatorname{sen}(200\pi t + 0.158)$

91. (a) $s = \sqrt{2} \operatorname{sen}(6t - 0.26)$;

(b) la amplitud es $\sqrt{2}$, la frecuencia es $\frac{3}{\pi}$

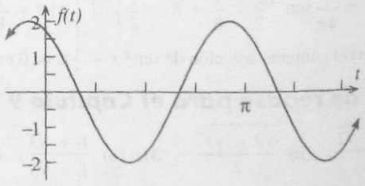
93. (a) $\left\{t \mid t = \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{4} - \frac{1}{6} + k\right\} \cup \left\{t \mid t = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{4} + k\right\}, k \in Z$; (b) 0.20, 0.97

95. (a) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5x}{x^2 + 36}\right)$; (b) 0.3890; (c) 0.3948; (d) 0.3906; (e) 6.0 pie

97. (a) $f(t) = 2\cos(2t + \frac{1}{6}\pi)$;

(b) la amplitud es 2, el periodo es π, el defasamiento es $\frac{1}{12}\pi$;

(c)



Ejercicios 10.1 (página 596)

1. $|\mathbf{A}| = 5$; (b) $|\mathbf{A}| = 2$ **3.** (a) $\langle 2, -3\rangle$; (b) $\langle -2, -7\rangle$ **5.** (a) $\langle -4, 3\rangle$; (b) $\langle 12, -5\rangle$ **7.** (a) $\langle -1, 9\rangle$; (b) $\langle 1, -5\rangle$

9. (a) $\langle 7, 3\rangle$; (b) $\langle -9, -4\rangle$ **11.** (a) $\langle 6, 1\rangle$; (b) $\sqrt{74}$; (c) $\sqrt{1\,061}$ **13.** (a) $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$; (b) $-24\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$;

(c) $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; (d) $2\sqrt{10}$ **15.** (a) $\sqrt{13} + \sqrt{17}$; (b) $-14\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$; (c) $7\sqrt{13}$; (d) $5\sqrt{13} - 6\sqrt{17}$ **17.** $\langle 14.6, 10.6\rangle$

19. $\langle -12.0, -32.9\rangle$ **21.** (a) $5(\frac{1}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j})$; (b) $2\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi\mathbf{j})$ **23.** (a) $8(\cos\frac{2}{3}\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\mathbf{j})$;

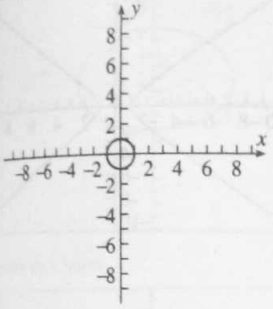
(b) $16(\cos\pi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\pi\mathbf{j})$ **25.** (a) 135 lb; (b) 17° **27.** (a) 135 lb; (b) 17° **29.** 29.0° **31.** (a) 28.1°;

(b) 1.7 mi/h; (c) 0.53 mi **33.** (a) 346.1°; (b) 243 mi/h **35.** 15.3 nudos, 191.3°

Ejercicios 10.2 (página 605)

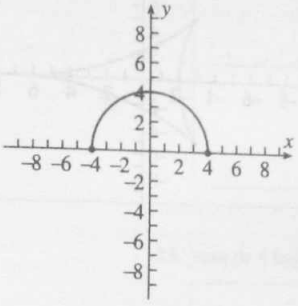
1. $(-\infty, 0) \cup (0, 4]$ 3. $(0, +\infty)$ 5. $\{ t \mid t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi \}, k \in Z$ 7. $[-1, 1]$ 9. $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

11.



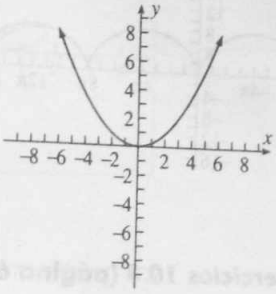
$x^2 + y^2 = 1$

13.



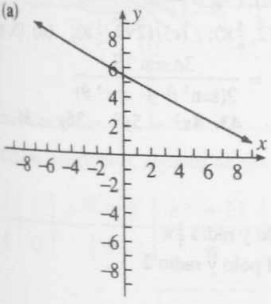
$x^2 + y^2 = 16,\ y \geq 0$

15.



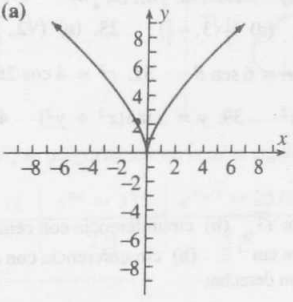
$y = \frac{2}{9}x^2$

17. (a)



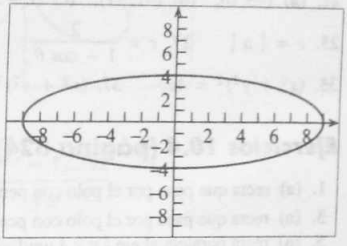
(b) $x + 2y = 11$

19. (a)



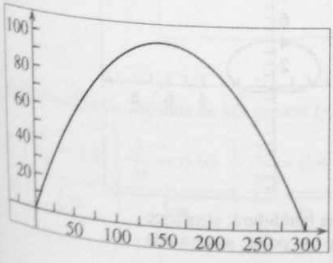
(b) $y = (4x)^{2/3}$

21. (a)

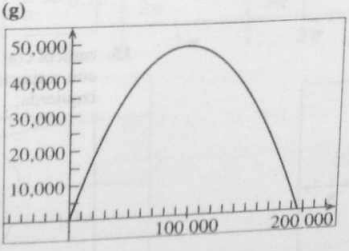


(b) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$

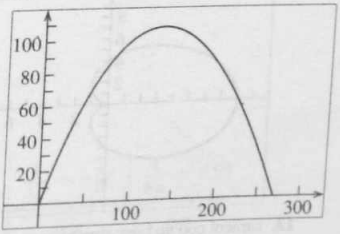
23. (a) 5 s; (b) 300 pie; (c) 100 pie; (d) $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{225}x^2$; (e)



25. Si t es el número de segundos después del disparo, entonces
(a) $1\,250\sqrt{2}t\mathbf{i} + (1\,250\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j}$;
(b) $x = 1\,250\sqrt{2}t$,
$y = 1\,250\sqrt{2}t - 16t^2$;
(c) 110.5 s;
(d) 195 312.5 pie $\approx$ 37 mi;
(e) 48 828.125 pie $\approx$ 9.25 mi;
(f) $y = x - \frac{2x^2}{390\,625}$;
(g)

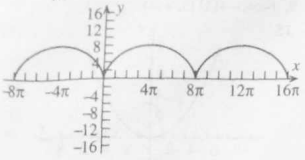


27. (a) 270 pie; (b) 108 pie; (c)

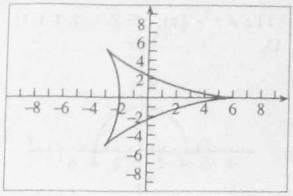


(d) $y = 1.60x - 0.00593x^2$

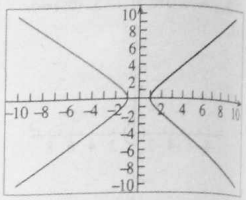
29. (a) $x = 4(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 4(1 - \cos t)$; (b)



31.



33. La gráfica del inciso (b) se muestra más delgada que la del inciso (a)



Ejercicios 10.3 (página 613)

5. (a) $(-4, \frac{5}{4}\pi)$; (b) $(4, -\frac{7}{4}\pi)$; (c) $(-4, -\frac{3}{4}\pi)$ **7.** (a) $(-2, \frac{3}{2}\pi)$; (b) $(2, -\frac{3}{2}\pi)$; (c) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$

9. (a) $(-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$; (c) $(-\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$ **11.** (a) $(-2, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(-2, -\frac{5}{4}\pi)$; (c) $(2, \frac{15}{4}\pi)$

13. $(3, \frac{4}{3}\pi)$; $(-3, \frac{1}{3}\pi)$ **15.** $(-4, -\frac{7}{6}\pi)$; $(4, -\frac{1}{6}\pi)$ **17.** $(-2, \frac{3}{4}\pi)$; $(2, \frac{7}{4}\pi)$ **19.** $(2, 2\pi + 6)$; $(-2, 6 - \pi)$

21. (a) $(-3, 0)$; (b) $(-1, -1)$; (c) $(2, -2\sqrt{3})$; (d) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ **23.** (a) $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$; (b) $(2, \frac{5}{6}\pi)$; (c) $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (d) $(5, \pi)$

25. $r = |a|$ **27.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ **29.** $r = 6 \operatorname{sen}\theta$ **31.** $r^2 = 4\cos 2\theta$ **33.** $r = \dfrac{3a \operatorname{sen} 2\theta}{2(\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta)}$

35. $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ **37.** $(x^2 + y^2)^3 = x^2$ **39.** $y = x\tan(x^2 + y^2)$ **41.** $x = -1$ **43.** $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$

Ejercicios 10.4 (página 624)

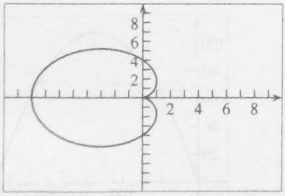
1. (a) recta que pasa por el polo con pendiente $\sqrt{3}$; (b) circunferencia con centro en el polo y radio $\frac{1}{3}\pi$

3. (a) recta que pasa por el polo con pendiente $\tan^{-1} 2$; (b) circunferencia con centro en el polo y radio 2

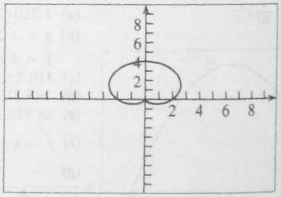
5. (a) recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$ y 4 unidades a su derecha;
(b) circunferencia tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$ con centro en el eje polar y radio 2.

7. (a) recta paralela al eje polar y 4 unidades abajo de él;
(b) circunferencia tangente al eje polar con centro en la prolongación del eje $\frac{1}{2}\pi$ y radio 2.

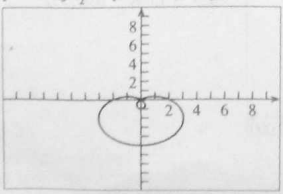
9. cardioide; simétrico con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda;



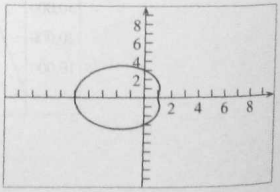
11. cardioide; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba;



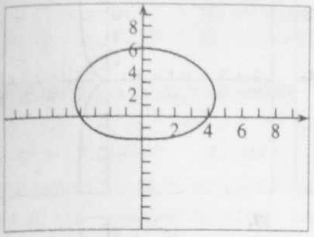
13. caracol con un lazo; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo;



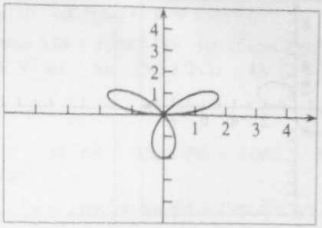
15. caracol con una hendidura; simétrico con respecto al eje polar; apunta a la izquierda;



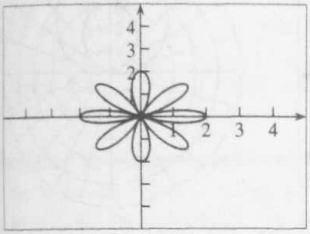
17. caracol convexo; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo;



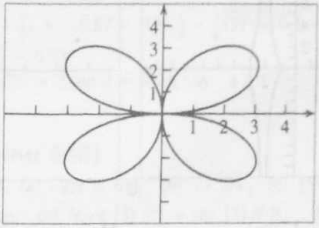
19. rosa de 3 hojas



21. rosa de 8 hojas

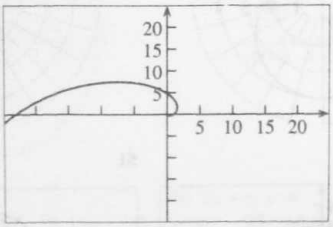


23. rosa de 4 hojas



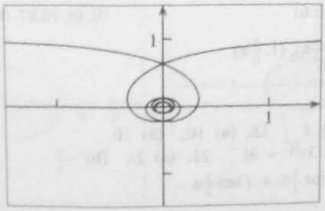
25. espiral logarítmica, algunos de sus puntos (r, θ) se proporcionan en la tabla siguiente

r	1	$e^{\pi/2} \approx 5$	$e^{\pi} \approx 23$	$e^{3\pi/2} \approx 111$	$e^{2\pi} \approx 535$	$e^{5\pi/2} \approx 2576$	$e^{3\pi} \approx 12{,}392$
θ	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π

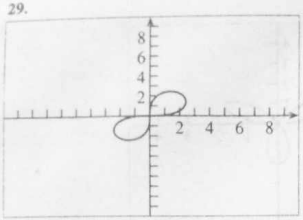


27. espiral recíproca, algunos de sus puntos (r, θ) se proporcionan en la tabla siguiente

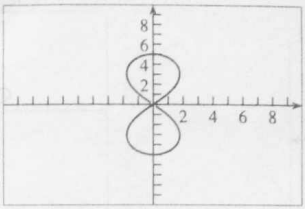
r	$\frac{6}{\pi} \approx 1.9$	$\frac{3}{\pi} \approx 0.95$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.63$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.32$	$\frac{1}{2\pi} \approx 0.16$	$\frac{1}{3\pi} \approx 0.12$	$\frac{1}{4\pi} \approx 0.08$	$\frac{1}{6\pi} \approx 0.05$
θ	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π	3π	4π	6π



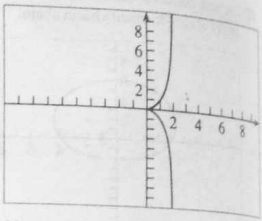
29.



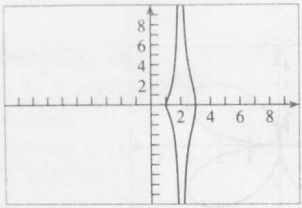
31.



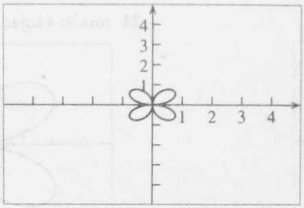
33.



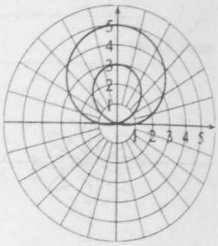
35.



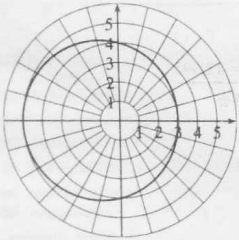
37. rosa de 4 hojas



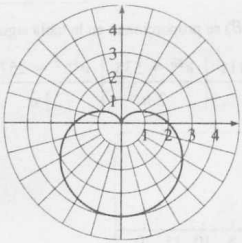
39.



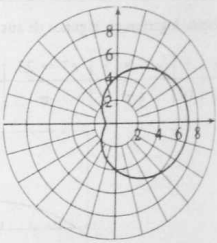
41.



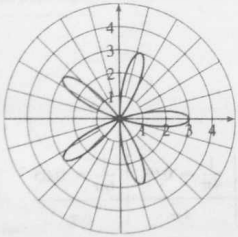
43.



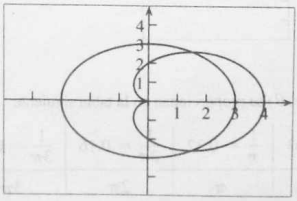
45.



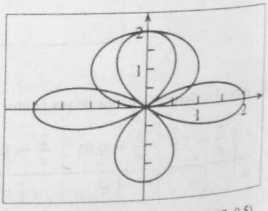
47.



49.



51.



(1.5, 2.6), (1.5, −2.6)

(0, 0), (0.87, 0.5), (0.2); (−0.87, 0.5)

53. $(3, \frac{1}{3}\pi), (3, -\frac{1}{3}\pi)$

55. polo, $(1, \frac{1}{6}\pi), (2, \frac{1}{2}\pi), (1, \frac{5}{6}\pi)$

Ejercicios 10.5 (página 632)

9. (a) $\sqrt{29}$; (b) $\sqrt{5}$ **11.** (a) 3; (b) 3 **13.** (a) 2; (b) 2 **15.** (a) 10; (b) 10
17. (a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$; (b) $-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$ **19.** (a) $-3\sqrt{3} + 3i$ (b) $3\sqrt{3} - 3i$ **21.** (a) $2i$; (b) $-\frac{2}{3}$
23. (a) $4\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi)$; (b) $6(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$; (c) $\cos\frac{1}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi$

25. (a) $6(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi)$; (b) $7(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$; (c) $7(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi)$

27. (a) $5[\cos(\arctan\frac{4}{3}) + i\,\text{sen}(\arctan\frac{4}{3})]$; (b) $5(\cos 0.93 + i\,\text{sen}\,0.93)$; (c) $5(\cos 53.1° + i\,\text{sen}\,53.1°)$

29. (a) $\sqrt{5}[\cos(\arctan(-2) + 2\pi) + i\,\text{sen}(\arctan(-2) + 2\pi)]$; (b) $\sqrt{5}(\cos 5.18 + i\,\text{sen}\,5.18)$; (c) $\sqrt{5}(\cos 296.6° + i\,\text{sen}\,296.6°)$

31. $0+10i$; **33.** $1+\sqrt{3}i$ **35.** $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ **37.** $2\sqrt{3}-2i$ **39.** $\sqrt{3}+i$ **41.** $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ **43.** $\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}i$ **45.** $0-\frac{2}{3}i$

Ejercicios 10.6 (página 646)

1. $2+2\sqrt{3}i$ **3.** 64 **5.** -1 **7.** $-16-16\sqrt{3}i$ **9.** $-2+2i$ **11.** 64 **13.** $4\,096-4\,096i$ **15.** -1 **17.** 1

19. $-6^{30} \approx (-2.2107)10^{23}$ **21.** (a) $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$; (b) $3, -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}i$

23. (a) $1, \cos\frac{2}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{7}\pi, \cos\frac{4}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{7}\pi, \cos\frac{6}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{6}{7}\pi, \cos\frac{8}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{8}{7}\pi, \cos\frac{10}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{10}{7}\pi, \cos\frac{12}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{12}{7}\pi$,
(b) $2, 2(\cos\frac{2}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{7}\pi), 2(\cos\frac{4}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{7}\pi), 2(\cos\frac{6}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{6}{7}\pi), 2(\cos\frac{8}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{8}{7}\pi), 2(\cos\frac{10}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{10}{7}\pi)$;
$2(\cos\frac{12}{7}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{12}{7}\pi)$ **25.** $\pm 2, \pm 2$ **27.** $i, \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ **29.** $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i, \sqrt{2}-\sqrt{2}i$

31. $-i, \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$ **33.** $-0.35+1.97i, -1.53-1.29i, 1.88-0.68i$

35. $\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i \approx 0.87+0.5i; -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i \approx -0.5+0.87i; -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i \approx -0.87-0.5i; \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i \approx 0.5-0.87i$

37. $1.21+0.66i, -0.25+1.36i, -1.37+0.18i, -0.59-1.25i, 1.00-0.95i$

41. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$; $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ **43.** $\text{sen}\,3\theta = 3\,\text{sen}\,\theta - 4\,\text{sen}^3\theta$

45. $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

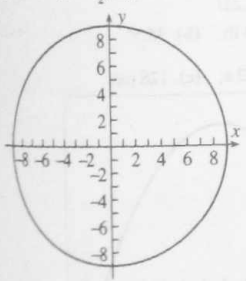
Ejercicios de repaso para el Capítulo 10 (página 648)

1. (a) $\langle 5, 3\rangle$; (b) $\langle -1, 3\rangle$ **3.** (a) $\langle 6, 7\rangle$; (b) $\langle -6, 13\rangle$; **5.** (a) $-25\mathbf{i} + 63\mathbf{j}$; (b) $\sqrt{4\,594}$; (c) $15\sqrt{2} - 14\sqrt{13}$

7. (a) $\langle 6\sqrt{3}, 6\rangle$; (b) $\langle -13.5, 33.4\rangle$ **9.** (a) $6\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \text{sen}\,\frac{1}{4}\pi\mathbf{j})$; (b) $6(\cos 131.8°\,\mathbf{i} + \text{sen}\,131.8°\,\mathbf{j})$ **11.** $(0, 2)\cup(2, +\infty)$

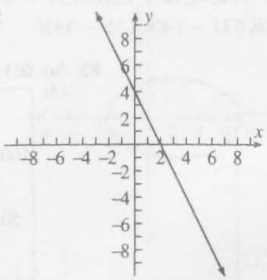
13. $\{t \mid t \neq (k+\frac{1}{2})\pi\}, k \in Z$

15.



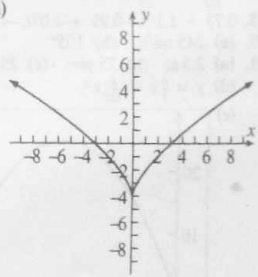
$x^2 + y^2 = 81$

17. (a)



(b) $2x + y = 4$

19. (a)



(b) $y = 3(\frac{1}{2}x)^{2/3} - 4$

21. (a) $(2, \frac{11}{4}\pi), (-2, \frac{7}{4}\pi)$; (b) $(-3, -\frac{5}{6}\pi), (3, \frac{1}{6}\pi)$ **23.** (a) $(0, 1)$; (b) $(1, -\sqrt{3})$; (c) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$

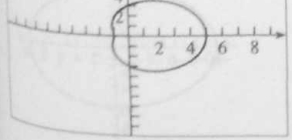
25. (a) $(4\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $(2, \frac{5}{3}\pi)$; (c) $(6, \frac{1}{2}\pi)$; (d) $(4, \frac{7}{6}\pi)$ **27.** $r^2(4\cos^2\theta - 9\,\text{sen}^2\theta) = 36$

29. $r = 9\cos\theta - 8\,\text{sen}\,\theta$ **31.** $xy = 2$ **33.** $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2 = 0$

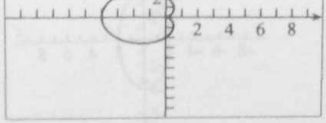
35. (a) recta que pasa por el polo con pendiente 1; (b) circunferencia con centro en el polo y radio 4.

37. (a) recta perpendicular al eje polar que pasa por el punto $(3, 0)$; (b) circunferencia con centro en $(\frac{3}{2}, 0)$ y tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$ en el polo.

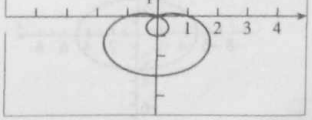
39. caracol con una hendidura; simétrico con respecto al eje polar; apunta a la derecha;



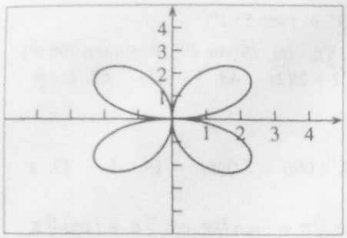
41. cardioide, simétrico con respecto al eje polar; apunta a la izquierda;



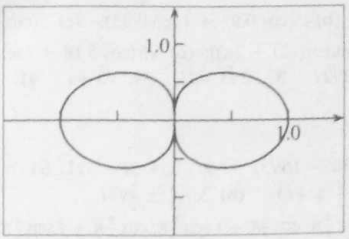
43. caracol con un lazo; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo;



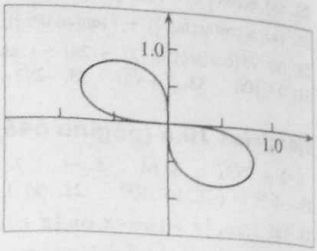
45. rosa de 4 hojas



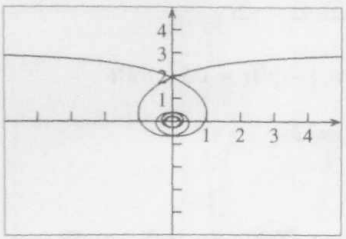
47.



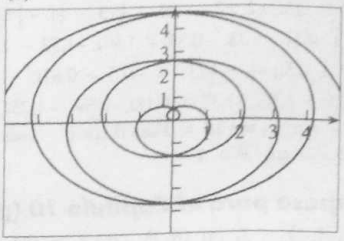
49. lemniscata



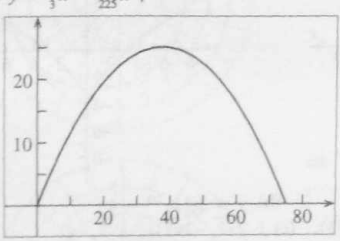
51. (a)



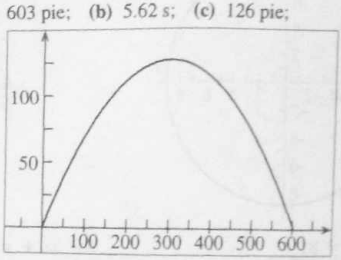
(b)



55. (a) 5; (b) $2\sqrt{10}$ 57. (a) $2\sqrt{3}(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi)$; (b) $4(\cos\frac{1}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{1}{6}\pi)$; (c) $4(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi)$; (d) $\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi)$ 59. $\sqrt{3} + i$ 61. $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ 63. $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$ 65. $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ 67. $0 + 8i$
69. $-\frac{1}{512}i$ 71. $2, -1 \pm \sqrt{3}i$ 73. $1.21 + 0.14i, -0.14 + 1.21i, -1.21 - 0.14i, 0.14 - 1.21i$
75. $0.73 + 1.19i, -0.91 + 1.07i, -1.29 - 0.53i, 0.11 - 1.40i, 1.36 - 0.33i$ 77. (a) 104.4 lb; (b) 35.5°
79. (a) 245 mi/h; (b) 105°
81. (a) 2.5 s; (b) 75 pie; (c) 25 pie;
(d) $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{225}x^2$;
(e)



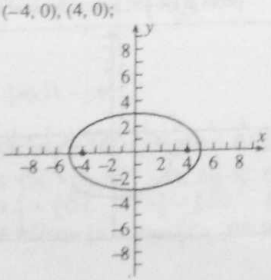
83. (a) 603 pie; (b) 5.62 s; (c) 126 pie;
(d)



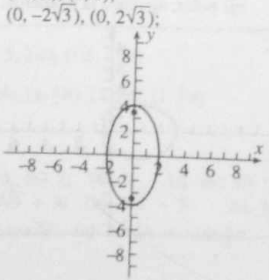
(e) $y = 0.839x - 0.00139x^2$

Ejercicios 11.1 (página 663)

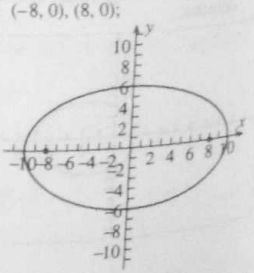
1. (a) (0, 0); (b) eje x;
(c) (−5, 0), (5, 0);
(d) (0, −3), (0, 3);
(e) (−4, 0), (4, 0);
(f)



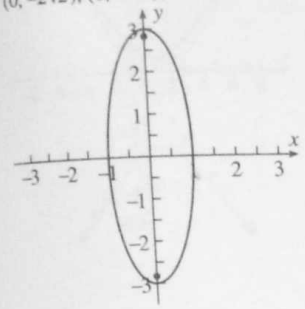
3. (a) (0, 0); (b) eje y;
(c) (0, −4), (0, 4);
(d) (−2, 0), (2, 0);
(e) $(0, -2\sqrt{3}), (0, 2\sqrt{3})$;
(f)



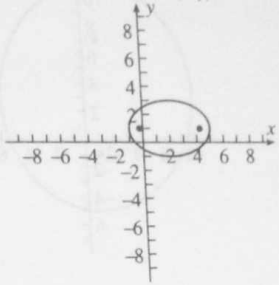
5. (a) (0, 0); (b) eje x;
(c) (−10, 0), (10, 0);
(d) (0, −6), (0, 6);
(e) (−8, 0), (8, 0);
(f)



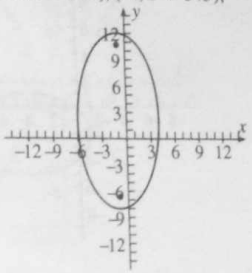
7. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** eje y;
(c) $(0, -3), (0, 3)$;
(d) $(-1, 0), (1, 0)$;
(e) $(0, -2\sqrt{2}), (0, 2\sqrt{2})$;
(f)



9. **(a)** $(2, 1)$; **(b)** $y = 1$;
(c) $(-1, 1), (5, 1)$;
(d) $(2, -1), (2, 3)$;
(e) $(2 - \sqrt{5}, 1), (2 + \sqrt{5}, 1)$;
(f)

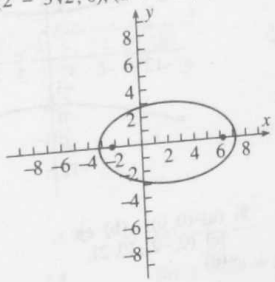


11. **(a)** $(-1, 2)$; **(b)** $x = -1$;
(c) $(-1, -8), (-1, 12)$;
(d) $(-6, 2), (4, 2)$;
(e) $(-1, 2 - 5\sqrt{3}), (-1, 2 + 5\sqrt{3})$;
(f)



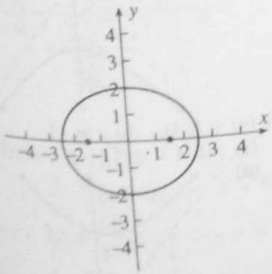
13. punto $(-\frac{5}{2}, 4)$

15. **(a)** $(2, 0)$; **(b)** eje x;
(c) $(2 - 3\sqrt{3}, 0), (2 + 3\sqrt{3}, 0)$;
(d) $(2, -3), (2, 3)$;
(e) $(2 - 3\sqrt{2}, 0), (2 + 3\sqrt{2}, 0)$
(f)

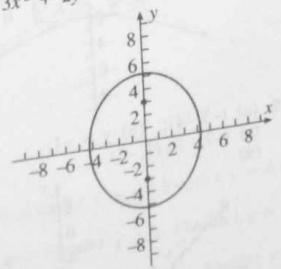


17. punto $(1, -1)$

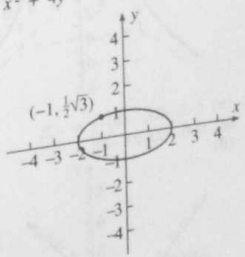
19. $16x^2 + 25y^2 = 100$



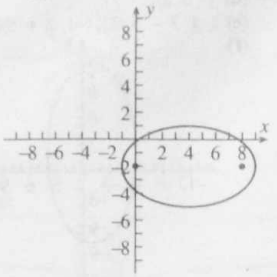
21. $3x^2 + 2y^2 = 54$



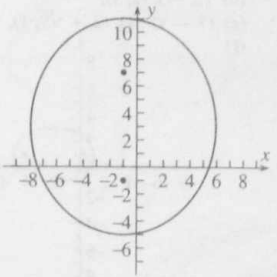
23. $x^2 + 4y^2 = 4$



25. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$



27. $\frac{(x+1)^2}{48} + \frac{(y-3)^2}{64} = 1$

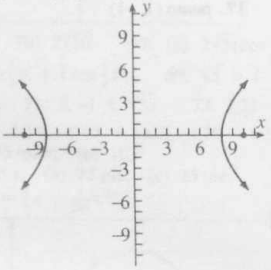


29. 8.4 m

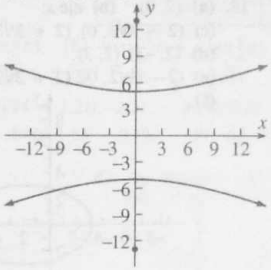
31. $9x^2 + 25y^2 = 562\,500$, donde la unidad es un millón de millas

Ejercicios 11.2 (página 677)

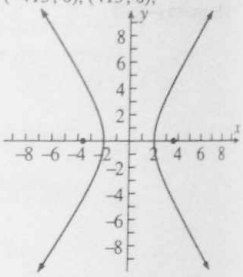
1. (a) (0, 0); (b) eje x; (c) (−8, 0), (8, 0); (d) (−10, 0), (10, 0); (e)



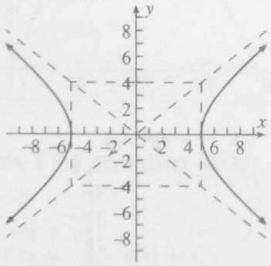
3. (a) (0, 0); (b) eje y; (c) (0, −5), (0, 5); (d) (0, −13), (0, 13); (e)



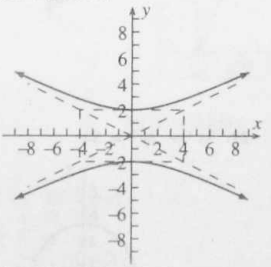
5. (a) (0, 0); (b) eje x; (c) $(-2, 0), (2, 0)$; (d) $(-\sqrt{13}, 0), (\sqrt{13}, 0)$; (e)



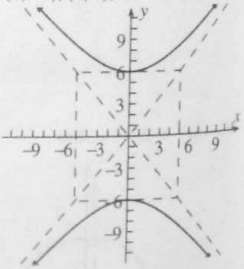
7. (a) (0, 0); (b) eje x; (c) (−5, 0), (5, 0); (d)



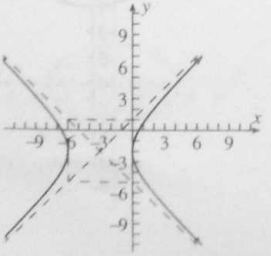
9. (a) (0, 0); (b) eje y; (c) (0, −2), (0, 2); (d)



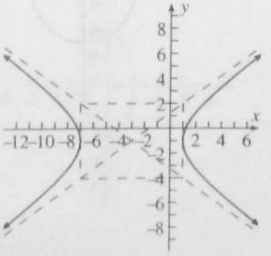
11. (a) (0, 0); (b) eje y; (c) (0, −6), (0, 6); (d)



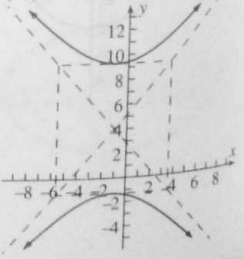
13. (a) (−3, −2); (b) $y = -2$; (c) (−6, −2), (0, −2); (d)



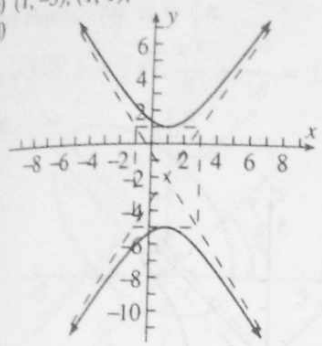
15. (a) (−3, −1); (b) $y = -1$; (c) (−7, −1), (1, −1); (d)



17. (a) (−1, 4), (b) $x = -1$; (c) $(-1, 4 - 2\sqrt{7}), (-1, 4 + 2\sqrt{7})$; (d)



19. (a) $(1, -2)$; (b) $x = 1$; (c) $(1, -5), (1, 1)$; (d)

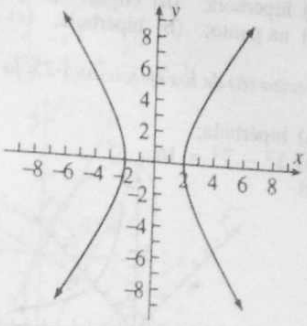


21. $y = -\frac{4}{5}x, y = \frac{4}{5}x$

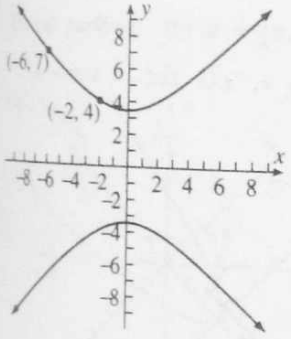
23. $y = -x - 5, y = x + 1$

25. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

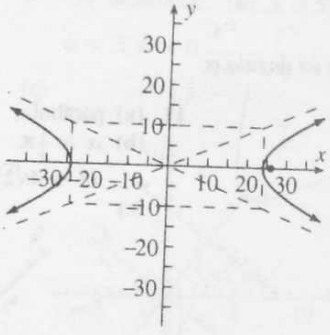
27. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$



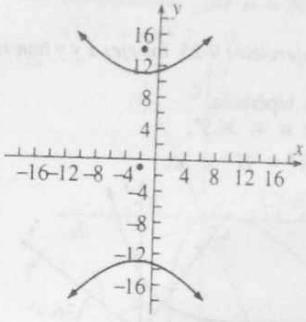
29. (a) $32y^2 - 33x^2 = 380$



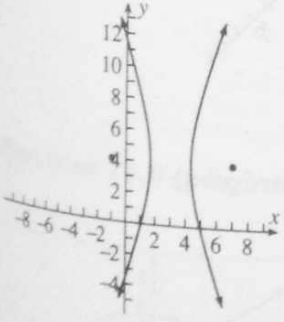
31. $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$



33. $\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x+2)^2}{81} = 1$



35. $72(x-3)^2 - 9(y-4)^2 = 128$



37. (a) $\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$;

(b) $y = 2x + 3, y = -2x - 5$

39. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{7} = 1$

41. la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{1\,600} = 1$

43. $x = \frac{8}{\cos t}, y = 6 \tan t$; o, $x = 8 \cosh t, y = 6 \operatorname{senh} t$ y $x = -8 \cosh t, y = 6 \operatorname{senh} t$

47. $x = 12 \tan t, y = \frac{5}{\cos t}$; o, $x = 12 \operatorname{senh} t, y = 5 \cosh t$ y $x = 12 \operatorname{senh} t, y = -5 \cosh t$

49. $x = 3 + \frac{3}{\cos t}, y = -2 + 3 \tan t$; o, $x = 3 + 3 \cosh t, y = -2 + 3 \operatorname{senh} t$ y $x = 3 - 3 \cosh t, y = -2 + 3 \operatorname{senh} t$

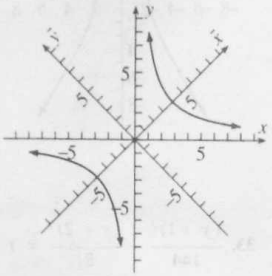
51. $x = -1 + \sqrt{21} \tan t, y = 4 + \frac{2\sqrt{7}}{\cos t}$; o, $x = -1 + \sqrt{21} \operatorname{senh} t, y = 4 + 2\sqrt{7} \cosh t$ y $x = -1 + \sqrt{21} \operatorname{senh} t, y = 4 - 2\sqrt{7} \cosh t$

Ejercicios 11.3 (página 687)

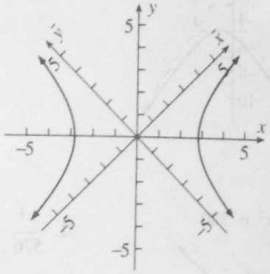
1. (a) hipérbola; (b) elipse; (c) parábola; (d) dos rectas que se intersectan
3. (a) un punto; (b) hipérbola; (c) parábola; (d) conjunto vacío

En el inciso (a) de los ejercicios 5-25, la cónica puede ser degenerada.

5. (a) hipérbola;
(b) $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 16$;
(c)

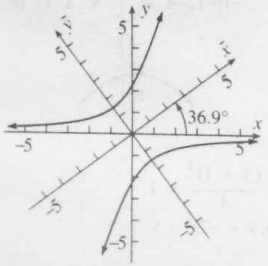


7. (a) hipérbola;
(b) $\bar{x}\bar{y} = -4$;
(c)

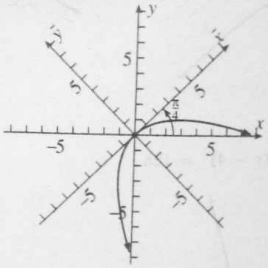


En los ejercicios 9-25, los ejes x y y han sido rotados un ángulo α.

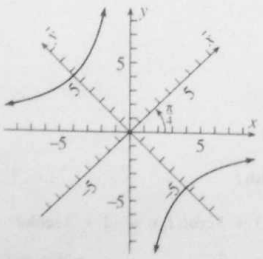
9. (a) hipérbola;
(b) $\alpha \approx 36.9°$,
$16\bar{y}^2 - 9\bar{x}^2 = 36$;
(c)



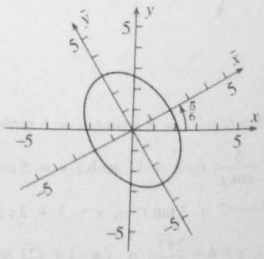
11. (a) parábola;
(b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,
$\bar{x}^2 + 4\sqrt{2}\bar{y} = 0$;
(c)



13. (a) hipérbola
(b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,
$\bar{y}^2 - \bar{x}^2 = 32$;
(c)

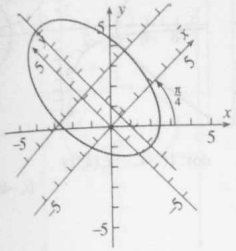


15. (a) elipse;
(b) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$,
$\frac{\bar{x}^2}{4} + \frac{\bar{y}^2}{9} = 1$
(c)

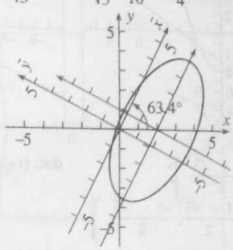


En los ejercicios 17-25, los ejes x' y y' han sido trasladados de modo que $x' = \bar{x} - h$, $y' = \bar{y} - k$.

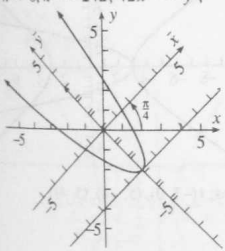
17. (a) elipse; (b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,
$h = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $k = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{18} = 1$;
(c)



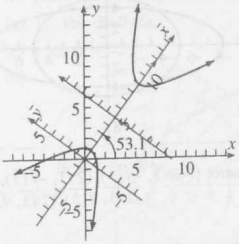
19. (a) elipse; (b) $\alpha \approx 63.4°$,
$h = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $k = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$;
(c)



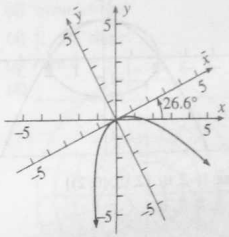
21. (a) parábola; (b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,
$h = 0$, $k = -2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}x'^2 = y'$;
(c)



23. (a) hipérbola; (b) $\alpha \approx 53.1°$,
$h = 5$, $k = 0$, $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1$;
(c)

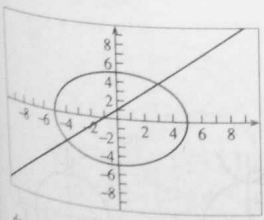


25. (a) parábola; (b) $\alpha \approx 26.6°$,
$\sqrt{5}\,\bar{x}^2 + 6\sqrt{5}\,\bar{y} = 0$;
(c)



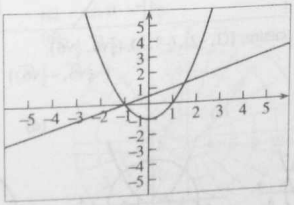
Ejercicios 11.4 (página 696)

1.



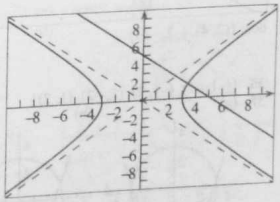
dos; $\{(3, 4), (-4, -3)\}$

3.



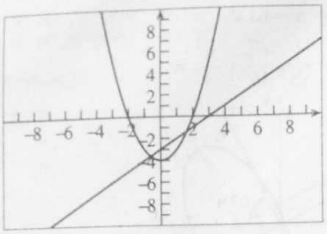
dos; $\{(-1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})\}$

5.



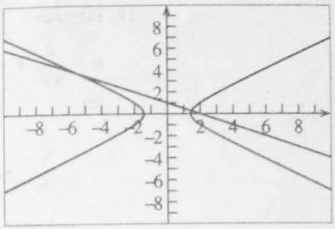
uno; $\{(\frac{17}{5}, \frac{8}{5})\}$

7.



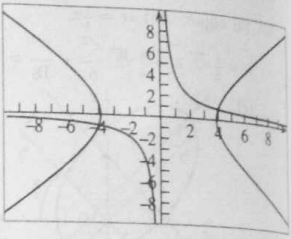
dos; $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

9.



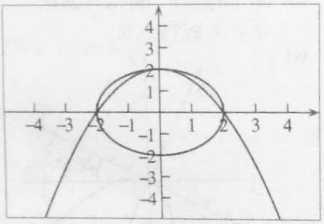
dos; $\{(-2+2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}), (-2-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})\}$

11.



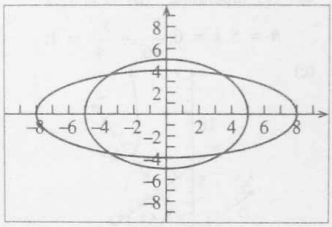
dos; $\{(-4,-1), (4,1), (i,-4i), (-i,4i)\}$

13.



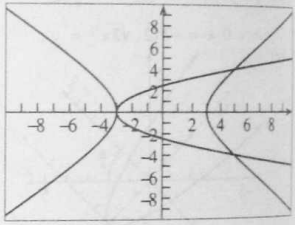
tres; $\{(-2,0), (2,0), (0,2)\}$

15.



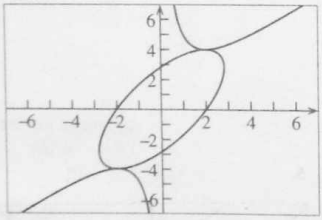
cuatro; $\{(-2\sqrt{3}, -\sqrt{13}), (2\sqrt{3}, -\sqrt{13}), (-2\sqrt{3}, \sqrt{13}), (2\sqrt{3}, \sqrt{13})\}$

17.



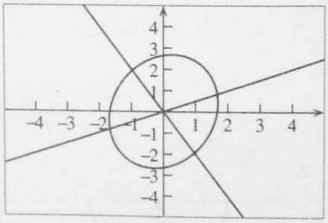
tres; $\{(-3,0), (5,-4), (5,4)\}$

19.



dos; $\{(2,4), (-2,-4)\}$

21.

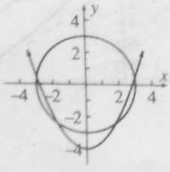


cuatro; $\{(1,-2), (-1,2), (\frac{2}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}), (-\frac{2}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6})\}$

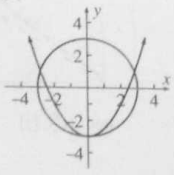
23. 6, 10
25. 12 cm, 35 cm
27. 8 m, 12 m
29. 25, \$6.00
31. 9.9 cm, 49.1 cm
33. 4 pie por 4 pie por 7 pie

35. $\{(-1,-2), (-1,2), (1,-2), (1,2)\}$

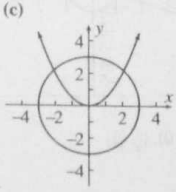
37. (a)



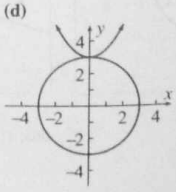
(b)



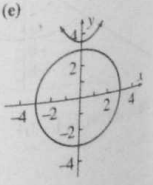
(c)



(d)

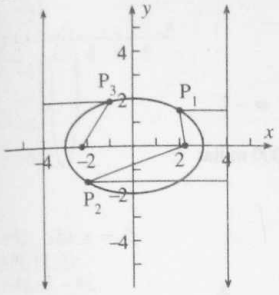


(e)

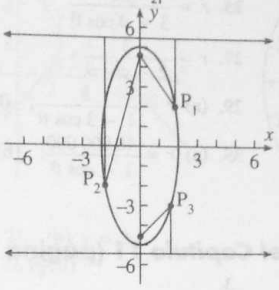


Ejercicios 11.5 (página 707)

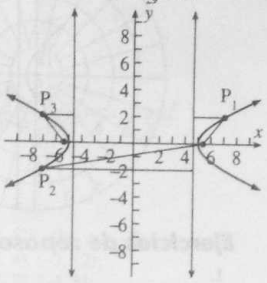
1. (a) $e = \frac{1}{3}\sqrt{5}$,
focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$,
directrices: $x = \pm\frac{9}{5}\sqrt{5}$;
(b)



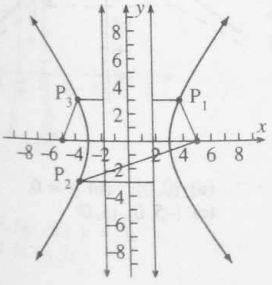
3. (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{21}$,
focos: $(0, \pm\sqrt{21})$,
directrices: $y = \pm\frac{25}{21}\sqrt{21}$;
(b)



5. (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{29}$
focos: $(\pm\sqrt{29}, 0)$,
directrices: $x = \pm\frac{25}{29}\sqrt{29}$;
(b)

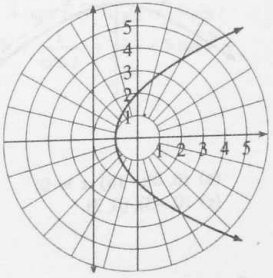


7. (a) $e = \frac{5}{3}$,
focos: $(\pm 5, 0)$,
directrices: $x = \pm\frac{9}{5}$;
(b)

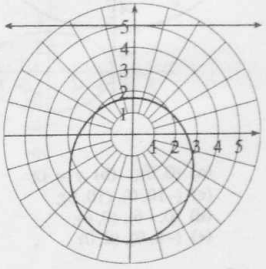


9. (a) parábola; (b) hipérbola; (c) elipse; (d) circunferencia

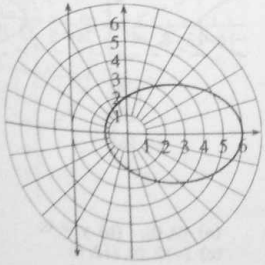
11. (a) 1; (b) parábola;
(c) $r\cos\theta = -2$;
(d)



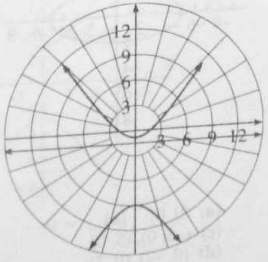
13. (a) $\frac{1}{2}$; (b) elipse;
(c) $r\,\text{sen}\,\theta = 5$;
(d)



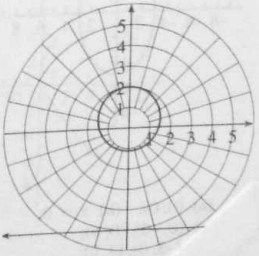
15. (a) $\frac{2}{3}$; (b) elipse;
(c) $r = \cos\theta = -3$;
(d)



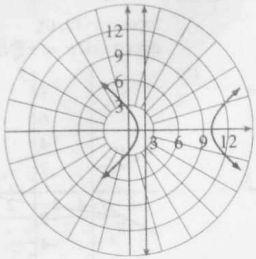
17. (a) $\frac{6}{5}$; (b) hipérbola;
(c) $r\,\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{2}$;
(d)



19. (a) $\frac{2}{7}$; (b) elipse;
(c) $r\,\text{sen}\,\theta = -5$;
(d)



21. (a) $\frac{5}{4}$; (b) hipérbola;
(c) $r \cos \theta = 2$;
(d)



23. $r = \dfrac{8}{1 - \operatorname{sen} \theta}$

25. $r = \dfrac{36}{3 + 4 \cos \theta}$

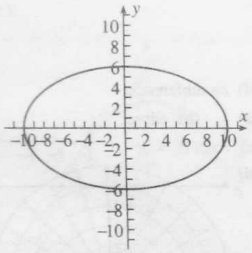
27. $r = \dfrac{3}{2 - \cos \theta}$

29. (a) $r = \dfrac{5}{1 - 3 \cos \theta}$; (b) $r \cos \theta = -\frac{5}{3}$

35. (a) $r = \dfrac{40\,000\,000}{1 - \cos \theta}$; (b) 20 000 000 millas

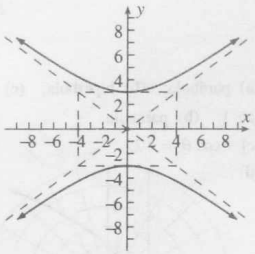
Ejercicios de repaso para el Capítulo 11 (página 709)

1.



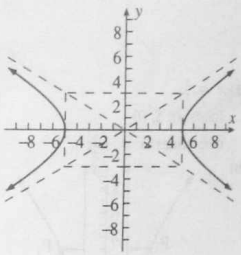
(a) (0, 0); (b) $y = 0$;
(c) (−10, 0), (10, 0);
(d) (0, −6), (0, 6);
(e) (−8, 0), (8, 0)

3.



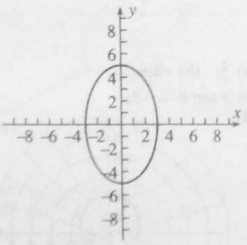
(a) (0, 0); (b) $x = 0$;
(c) (0, −3), (0, 3)

5.



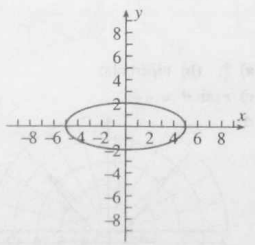
(a) (0, 0); (b) $y = 0$;
(c) (−5, 0), (5, 0)

7.



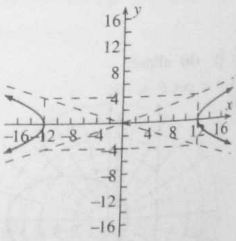
(a) (0, 0); (b) $x = 0$;
(c) (0, −5), (0, 5);
(d) (−3, 0), (3, 0);
(e) (0, −4), (0, 4)

9.



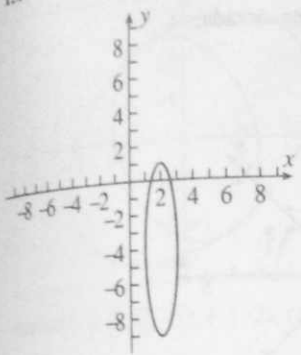
(a) (0, 0); (b) $y = 0$;
(c) (−5, 0), (5, 0);
(d) (0, −2), (0, 2);
(e) $(-\sqrt{21}, 0)$, $(\sqrt{21}, 0)$

11.



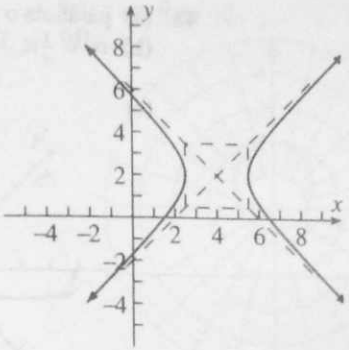
(a) (0, 0); (b) $y = 0$;
(c) (−12, 0), (12, 0)

13.



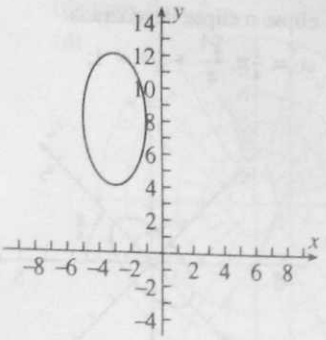
(a) $(2, -4)$; (b) $x = 2$;
(c) $(2, -9), (2, 1)$;
(d) $(1, -4), (3, -4)$;
(e) $(2, -4 - 2\sqrt{6}), (2, -4 + 2\sqrt{6})$

15.



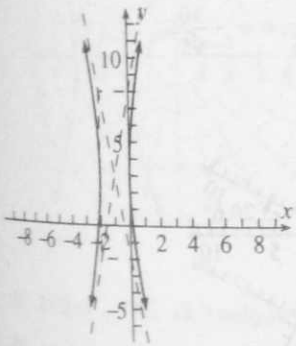
(a) $(4, 2)$; (b) $y = 2$;
(c) $(\frac{5}{2}, 2), (\frac{11}{2}, 2)$

17.



(a) $(-3, 8)$; (b) $x = -3$;
(c) $(-3, 4), (-3, 12)$;
(d) $(-5, 8), (-1, 8)$;
(e) $(3, 8 - 2\sqrt{3}), (-3, 8 + 2\sqrt{3})$

19.



(a) $(-1, 3)$; (b) $y = 3$;
(c) $(-2, 3), (0, 3)$

21. $y = \frac{3}{4}x,\ y = -\frac{3}{4}x$

23. $y = -x + 6,\ y = x - 2$

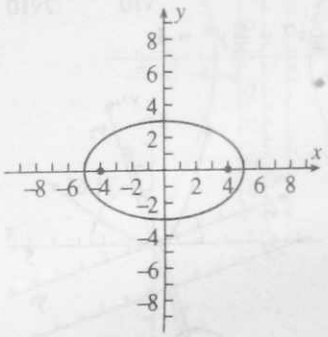
25. $x = 10 \cos t,\ y = 6 \operatorname{sen} t$

27. $x = 4 \tan t,\ y = \dfrac{3}{\cos t}$

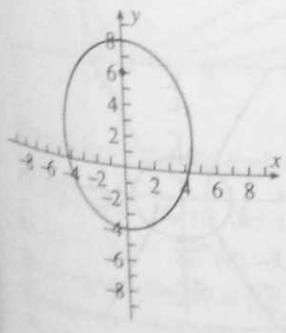
29. $x = 2 + \cos t,\ y = -4 + 4 \operatorname{sen} t$

31. $x = -1 + \dfrac{1}{\cos t},\ y = 3 + 5 \tan t$

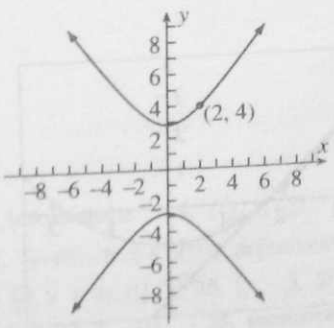
33. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



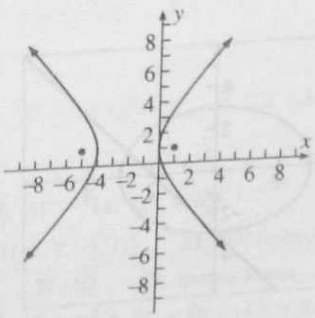
35. $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$



37. $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{4} = 1$



39. $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1$

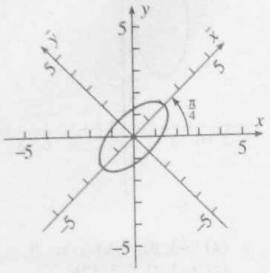


En los ejercicios 41-47, los ejes $\bar{x}$ y $\bar{y}$ han sido rotados un ángulo α.

41. (a) elipse o elipse degenerada;

(b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 = 1$;

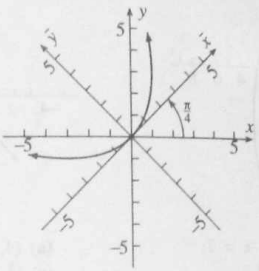
(c)



43. (a) parábola o parábola degenerada;

(b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\bar{x}^2 = 4\sqrt{2}\bar{y}$;

(c)



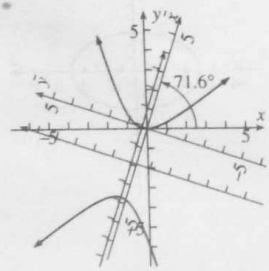
En los ejercicios 45-47, los ejes x' y y' han sido trasladados de modo que $x' = \bar{x} - h$, $y' = \bar{y} - k$.

45. (a) hipérbola o dos rectas que se intersectan;

(b) $\alpha \approx 71.6°$, $h = \frac{-6}{\sqrt{10}}$, $k = \frac{6}{7\sqrt{10}}$,

$\frac{7}{24}x'^2 - \frac{49}{72}y'^2 = 1$;

(c)

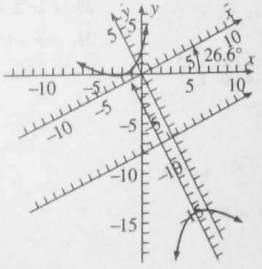


47. (a) hipérbola o dos rectas que se intersectan;

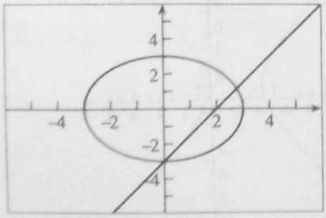
(b) $\alpha \approx 26.6°$, $h = -\frac{3}{\sqrt{5}}$, $k = -\frac{16}{\sqrt{5}}$,

$\frac{y'^2}{63} - \frac{4x'^2}{63} = 1$;

(c)

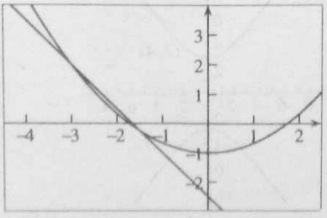


53.



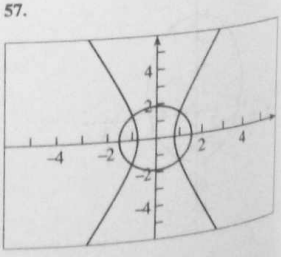
dos: $\{(0, -3), (\frac{36}{13}, \frac{15}{13})\}$

55.



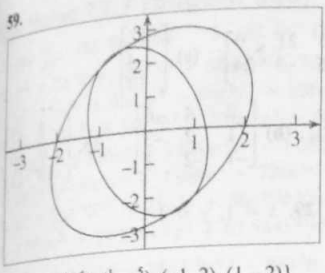
dos: $\{(-3, 2), (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})\}$

57.



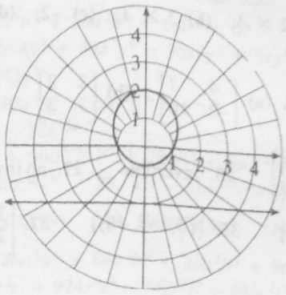
cuatro; $\{(1, \sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2})\}$

59.

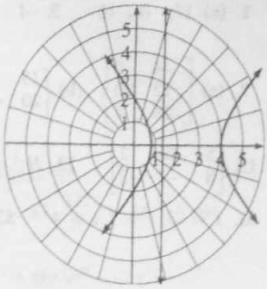


cuatro: $\{(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}), (-1, 2), (1, -2)\}$

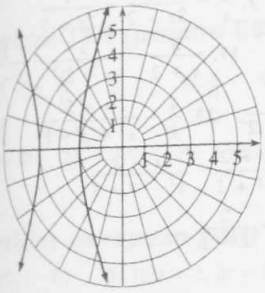
61. (a) $\frac{1}{2}$; (b) elipse;
(c) $r \operatorname{sen} \theta = -2$
(d)



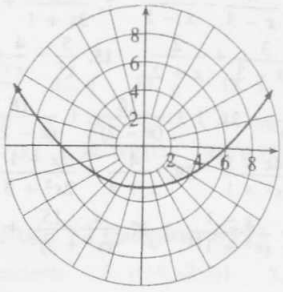
63. (a) $\frac{3}{2}$; (b) hipérbola;
(c) $r \cos \theta = \frac{4}{3}$;
(d)



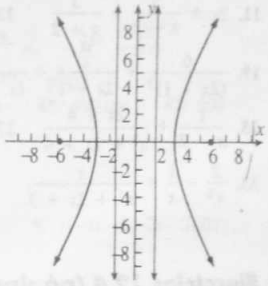
65. $r = \dfrac{8}{1 - 3 \cos \theta}$



67. $r = \dfrac{6}{1 - \operatorname{sen} \theta}$

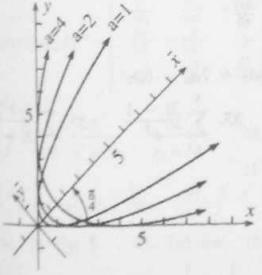


69. (a) $e = \frac{1}{3}\sqrt{34}$;
focos: $(\pm\sqrt{34}, 0)$;
directrices: $x = \pm\frac{9}{34}\sqrt{34}$;
(b)



73. 18.9 m **75.** 12.0 pulg por 10.0 pulg **77.** $r = \dfrac{1}{1 - \cos \theta}$

81. parábola en el primer cuadrante



Ejercicios 12.1 (página 727)

1. $\{(3, 1, 0)\}$ **3.** $\{(1, 2, 1)\}$ **5.** $\varnothing$; inconsistente **7.** $\{(3, 1, -2)\}$ **9.** $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)\}$ **11.** $\{(3, 1, 0)\}$
13. $\{(3, -1, 2)\}$ **15.** $\{(2, -3, 8)\}$ **17.** $\{(-10 - 7t, 8 + 6t, t)\}$, dependiente **19.** $\{(-2, 2, -3, 1)\}$ **21.** $\varnothing$; inconsistente
23. el conjunto solución es $\{(\frac{20}{3} + \frac{7}{3}t, \frac{35}{3} + \frac{22}{3}t, 9 + 4t, t)\}$ **25.** $\{t - 3, 2t - 4, t)\}$ **27.** $\varnothing$ **29.** inconsistente
31. consistente; $\{(-3, -2)\}$ **33.** consistente; $\{(3, 2, -4)\}$ **35.** inconsistente **37.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
39. $y = 4x^2 - 8x + 3$ **41.** \$10 000 al 10%, \$5 000 al 12%, \$10 000 al 6%
43. 20 oz de la primer aleación, 40 oz de la segunda aleación, 10 oz de la tercer aleación
45. 2 grandes, 7 medianos y 1 pequeño; 3 grandes, 5 medianos y 2 pequeños; 4 grandes, 3 medianos y 3 pequeños; o 5 grandes, 1 mediano y 4 pequeños **47.** (b) $0 \le x \le \frac{5}{2}; \frac{5}{3} \le y \le \frac{5}{2}; 0 \le z \le \frac{10}{3}$

Ejercicios 12.2 (página 744)

1. (a) 17; (b) 16 3. -1 5. (a) 2×4; (b) 3×1; (c) -2; (d) $\begin{bmatrix} 9 & -6 & 21 & 0 \\ 12 & 15 & -3 & 24 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ -10 \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 12 & 20 \\ -24 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 20 & -30 \end{bmatrix}$ 9. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 16 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ 11. (a) [7]; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} -8 & 15 \\ 0 & -6 \\ -10 & 12 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 5 & -26 & 2 \\ 8 & -1 & 13 \end{bmatrix}$ 23. $H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ 25. invertible 27. no invertible 29. $x = 1$, $y = 4$

31. $x = -3$, $y = 1$, $z = 4$ 33. $\{(-3, 4)\}$ 35. $\{(\frac{58}{7}, -\frac{18}{7}, -8)\}$ 37. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicios 12.3 (página 753)

1. $\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+2}$ 3. $-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$ 5. $\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-1}$ 7. $\frac{-5}{3x+1} + \frac{2}{x-2}$ 9. $\frac{2}{x} - \frac{3}{3x-2} - \frac{1}{2x+3}$

11. $2x + \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+2}$ 13. $2x - 5 + \frac{3}{2x-3} + \frac{2}{x+2}$ 15. $\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{7}{x-2}$ 17. $\frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2}$

19. $\frac{6}{(2x+1)^2} + \frac{\frac{14}{3}}{2x+1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{\frac{7}{3}}{x-1}$ 21. $1 + \frac{16}{(x-2)^3} + \frac{18}{(x-2)^2} + \frac{6}{x-2}$ 23. $\frac{4}{x} - \frac{x+5}{x^2+x+1}$

25. $\frac{1}{x-2} + \frac{2x+4}{x^2+2x+4}$ 27. $-\frac{2}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2+1}$ 29. $\frac{4}{x+4} + \frac{3x+1}{2x^2+3}$ 31. $\frac{x+2}{x^2+1} - \frac{x-2}{x^2-x-1}$

33. $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+2x+3}$ 35. $\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{(x^2+1)^2}$ 37. $\frac{x-15}{(x^2+2)^2} + \frac{3x+4}{x^2+2} - \frac{2}{x-1}$

Ejercicios 12.4 (página 762)

1. 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 3. $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \frac{37}{6}, \frac{50}{7}, \frac{65}{8}$ 5. $2, -1, \frac{4}{5}, -\frac{5}{7}, \frac{6}{9}, -\frac{7}{11}, \frac{8}{13}, -\frac{9}{15}$ 7. $-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{9}, \frac{16}{17}, -\frac{32}{33}, \frac{64}{65}, -\frac{128}{129}, \frac{256}{257}$

9. $\frac{1}{3}x, -\frac{1}{4}x^2, \frac{1}{5}x^3, -\frac{1}{6}x^4, \frac{1}{7}x^5, -\frac{1}{8}x^6, \frac{1}{9}x^7, -\frac{1}{10}x^8$ 11. 0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, 16 13. $1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{4}, 2$

15. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 17. $1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45$ 19. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} = \frac{437}{60}$

21. $5 + 5 + 5 + \ldots + 5$ (100 términos); 500 23. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$

25. $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11} + x^{13} - x^{15}$ 27. $a_0 - 2a_1 + 3a_2 - 4a_3 + 5a_4 - 6a_5 + 7a_6 - 8a_7$

29. $f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})$ 31. $\sum_{i=0}^{5} (2i + 1)$ 33. $\sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1}(3i + 1)$ 35. $\sum_{i=1}^{6} \frac{2i - 1}{i^2}$ 37. $\sum_{i=0}^{4} \frac{(-x^2)^i}{2i + 2}$

39. $a_n = 2n - 1$: 1, 3, 5, 7, 9, 11; $a_n = 2n - 1 + (n - 1)(n - 2)(n - 3)$: 1, 3, 5, 13, 33, 71;
$a_n = 2n - 1 - (n - 1)(n - 2)(n - 3)$: 1, 3, 5, 1, -15, -49

Ejercicios 12.6 (página 787)

1. (a) 5, 8, 11, 14, 17; (b) 10, 6, 2, -2, -6 3. (a) $-5, -12, -19, -26, -33$; (b) $x, x + 2y, x + 4y, x + 6y, x + 8y$

5. (a) 5, 15, 45, 135, 405; (b) $8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}$ 7. (a) $-\frac{9}{16}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}$; (b) $\frac{x}{y}, -1, \frac{y}{x}, -\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}$

9. (a) sucesión aritmética; $-9, -13$; (b) sucesión geométrica; 27, 81; (c) sucesión geométrica; $3\sqrt{6}, 9\sqrt{2}$
(d) sucesión no aritmética ni geométrica

11. (a) sucesión aritmética; 0, -1.11; (b) sucesión aritmética, $\frac{1}{12}$, 0; (c) sucesión geométrica; $\frac{2}{9}, -\frac{2}{27}$;
(d) sucesión aritmética, $4x + 3y$, $5x + 4y$

13. 35 15. 16 17. trigésimo 19. $\frac{729}{4}$ 21. -3 23. undécimo 25. (a) $\frac{26}{5}, \frac{27}{5}, \frac{28}{5}, \frac{29}{5}$; (b) 2, 4, 8, 16, 32

27. (a) -2; (b) 21 29. (a) 100; (b) 510 31. (a) -66; (b) $\frac{5\,465}{729}$ 33. (a) 13.412; (b) 1 030 35. 71.5

37. 2 430 39. \$280, \$260, \$240, \$220 41. 120 43. $\frac{117\,649}{262\,144}$ 45. 18 47. \$33 065.95 49. 23, 27, 31

Ejercicios 12.7 (página 800)

1. (a) $\frac{1}{504}$; (b) 863 040 **3.** (a) $\frac{33}{2}$; (b) $\frac{1}{168}$ **5.** (a) 35; (b) 1 **7.** (a) 220; (b) 1 225

9. $a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

11. $x^9 - 9x^8y + 36x^7y^2 - 84x^6y^3 + 126x^5y^4 - 126x4y^5 + 84x^3y^6 - 36x^2y^7 + 9xy^8 - y^9$

13. $x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$

15. $4\,096 - 6\,144ab + 3\,840a^2b^2 - 1\,280a^3b^3 + 240a^4b^4 + 24a^5b^5 + a^6b^6$

17. $243e^{5x} - 810e^{3x} + 1\,080e^{x} - 720e^{-x} + 240e^{-3x} - 32e^{-5x}$

19. $a^4 + 8a^{7/2}b^{1/2} + 28a^3b + 56a^{5/2}b^{3/2} + 70a^2b^2 + 56a^{3/2}b^{5/2} + 28ab^3 + 8a^{1/2}b^{7/2} + b^4$

21. $4\,096x^{24} + 24\,576x^{22}y^2 + 67\,584x^{20}y^4 + 112\,640x^{18}y^6$ **23.** $u^{-11} - 33u^{-10}v^2 + 495u^{-9}v^4 - 4\,455u^{-8}v^6$

25. $a^3 - 9a^{8/3}b^{1/3} + 36a^{7/3}b^{2/3} - 84a^2b$ **27.** $3\,003a^8b^6$ **29.** $-489\,888x^4$ **31.** $\frac{924x^{18}}{y^{12}}$ **33.** $\frac{231}{16}a^6$ **35.** $-8\,064$

37. $a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$

39. $r^{12} - 12r^{11}t + 66r^{10}t^2 - 220r^9t^3 + 495r^8t^4 - 792r^7t^5 + 924r^6t^6 - 792r^5t^7 + 495r^4t^8 - 220r^3t^9 + 66r^2t^{10} - 12rt^{11} + t^{12}$

41. 28 **43.** (a) 120; (b) 120 **47.** $32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1\,080x^2 + 810x - 243$

Ejercicios 12.8 (página 809)

1. $\frac{64}{3}$ **3.** $\frac{600}{11}$ **5.** $\frac{4}{5}$ **7.** $\frac{16}{21}$ **9.** $\frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$ **11.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{9}{11}$ **15.** 3 **17.** $\frac{137}{111}$ **19.** $\frac{47}{101}$ **21.** $\frac{29\,029}{9\,000}$

23. $\frac{244}{99}$ **25.** $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ **27.** $1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \ldots$ **29.** $2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{288}x^2 - \frac{5}{20\,736}x^3 - \ldots$

31. 1.020 **33.** 3.979 **35.** 4.990 **37.** 2.7183 **39.** 0.9211 **41.** 0.3746 **43.** 84 m **45.** 400 cm **47.** 500

Ejercicios de repaso para el Capítulo 12 (página 812)

1. $\{(3, 1, -2)\}$ **3.** $\{(3t + 1, 2t - 1, t)\}$; dependiente **5.** $\{(-4, -2, 3)\}$ **7.** $\{(1, -1, 2, \frac{1}{3})\}$ **9.** $\{(-4t - 5, -2t - 3, t)\}$

11. $\{(5t + 7, 39t + 43, -26t - 29, t)\}$ **13.** consistente; $\{(4, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3})\}$ **15.** (a) 1; (b) -35

17. (a) $\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 2 & -6 \\ 16 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ -12 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ **19.** (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ **21.** $H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$

23. invertible; $H^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{151} & \frac{30}{151} & -\frac{12}{151} \\ \frac{26}{151} & -\frac{5}{151} & \frac{2}{151} \\ -\frac{3}{151} & \frac{18}{151} & \frac{23}{151} \end{bmatrix}$ **25.** $\{(-1, 2, 1)\}$ **27.** $\{(\frac{1}{4}t - \frac{1}{2}, 1 - \frac{2}{3}t, t)\}$, dependiente

29. $-\frac{3}{x - 1} + \frac{6}{x + 4} - \frac{1}{x + 2}$ **31.** $\frac{6}{7(x - 2)} + \frac{x + 10}{7(x^2 + x + 1)}$ **33.** $1 + \frac{x - 2}{x^2 + 1} - \frac{3}{(x^2 + 1)^2}$

35. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{5}{27}, -\frac{7}{81}, \frac{1}{27}, -\frac{11}{729}$ **37.** $3 + 2 + \frac{5}{3} + \frac{3}{2} + \frac{7}{5} + \frac{4}{3} = \frac{109}{10}$ **39.** $\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i-1}\frac{x^{2i}}{2^i}$ **41.** $\frac{3\,069}{1\,024}$ **43.** 130

45. (a) 55; (b) $\frac{8}{7}$ **47.** (a) 84; (b) 91 390 **49.** (a) sucesión aritmética, 24, 28; (b) sucesión geométrica, $-1, \frac{1}{3}$

51. (a) sucesión geométrica, $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) sucesión no aritmética ni geométrica **53.** $\frac{7}{16}$ **55.** $\frac{1}{9}$ o $-\frac{1}{9}$

57. vigésimo primero **59.** $\frac{13}{24}, \frac{7}{12}, \frac{5}{8}$ **61.** 96, 48, 24, 12, 6 **63.** (a) 20; (b) -16 **65.** $\frac{87}{5}$ **67.** (a) 50; (b) 15 000

69. $\frac{8}{19}$ **71.** $\frac{8}{11}$ **77.** $128x^7 - 448x^6y + 672x^5y^2 - 560x^4y^3 + 280x^3y^4 - 84x^2y^5 + 14xy^6 - y^7$

79. $x^{20} + 40x^{18} + 760x^{16} + 9\,120x^{14}$ **81.** $-5\,005t^{-3/2}$ **83.** $-\frac{231}{16}z^{12}$ **85.** 2.924 **87.** 0.5646 **89.** 1.6487

91. $y = 2x^2 - 3x + 1$ **93.** $4 000 en bonos al 6%, $8 000 en la cuenta de ahorro al 5%, $3 000 en el negocios **95.** 455

97. (a) 1 049 000; (b) 2 097 000 **99.** 120 **101.** 107 km **103.** 20, 10, 5 o 5, 10, 20

Ejercicios A-1 (página 822)

1. ley conmutativa para la multiplicación (Axioma 2)
3. existencia del elemento idéntico aditivo (Axioma 5)

5. ley conmutativa para la adición (Axioma 2)
7. ley asociativa para la multiplicación (Axioma 3)
9. existencia del inverso aditivo (Axioma 6)
11. ley conmutativa para la adición (Axioma 2)
13. existencia del inverso multiplicativo (Axioma 7)
15. ley conmutativa para la multiplicación (Axioma 2)
17. existencia del elemento idéntico aditivo (Axioma 5)
19. existencia del elemento idéntico multiplicativo (Axioma 5)
21. ley distributiva (Axioma 4) **23.** ley asociativa para la adición (Axioma 3)
25. cerrado; $2 + 3 = 5$ **27.** cerrado; $3 \cdot 5 = 15$ **29.** cerrado; $0 + 0 = 0$
31. cerrado; $1 \cdot 1 = 1$ **33.** no cerrado; $1 + 2 = 3$
35. cerrado; $0 \cdot 1 = 0, 0 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$

Índice de materias

A

Abel, Niels Henrik, 275
Abscisa, 42
Acimut, 484
Adición, 7, 817
 de números complejos, 35
 de números reales, 7, 817
 de vectores, 589
Algoritmo
 de Horner, 262
 de la división para polinomios, 254
Al-Khowarizmi, 88
Amplitud
 de la presión, 413
 de un número complejo, 627
Ángulo(s),
 central, de una circunferencia, 453
 complementario, 479
 coterminal, 453
 cuadrantal, 451
 de depresión, 483
 de elevación, 483
 de referencia, 469
 del caso ambiguo, 495
 definición de, 450
 director de un vector, 588
 entre dos vectores, 590
 funciones trigonométricas de, 460
 lado terminal de un, 450
 medida en grados de, 455
 negativo, 450
 posición estándar de, 450
 positivo, 450
Área de un triángulo, 497
Argumento (o amplitud) de un número complejo, 627
Argumento principal, 627
Aritmética, 763
Ars Magna, 275
Asíntota
 horizontal, 288
 oblicua, 293
 vertical, 287
Axioma(s)
 de campo, 817-821
 de orden, 821-822

B

Base, de una potencia, 17
Batidos, 553
Binomial(es)
 desarrollo, 789
 serie, 807
Binomio, 18
Boyle, ley de, 239
Briggs, Henry, 358

C

Calculadora gráfica. *Véase* Graficadora
Campo
 axiomas de, 39, 817-821
 ordenado, 821
Cantidad escalar, 586
Caracol (o limaçon), 621
 con un lazo, 621
 con hendidura, 621
 convexo, 621
Cardioide, 621
Cardano, Girolamo, 275
Caso ambiguo, 495
Centro
 de una circunferencia, 172
 de una elipse, 653
Cero(s)
 complejo de un función polinomial, 275
 de multiplicidad k, 265
 de una función, 210
 exponente, 21
 racional de una función polinomial, 264
Ciclo, 393
Cicloide, 604
Circunferencia
 ángulo central en una, 453
 centro de una, 172
 definición de, 172
 ecuación de una, 172
  forma general de la, 175
 ecuación polar de una, 618
 radio de una, 172
 trazado de una, 173

unitaria, 173
longitud de arco en, 372-373
Cisoide, 625
Cociente
de funciones, 196
de números complejos, 37
de números reales, 7
diferencia, 195
Coeficiente, 18
constante, 18
Cofunciones, 479
Columna de una matriz, 717
Completación de cuadrados, 78
Comportamiento al infinito de una gráfica, 251
Concoide de Nicómedes, 625
Cónica, 680, 685
central, 654, 666
ecuación de una, 703
definición de una, 704
ecuación polar de una, 704
Conjugado
de un binomio, 29
de un número complejo, 37
Conjuntamente proporcional, 223
Conjunto(s), 2
ajenos(s), 3
de números cabales, 4
de números complejos, 32, 39
de números enteros, 4
negativos, 4
no negativos, 4
no positivos, 4
positivos, 4
de numeros imaginarios, 32
de números irracionales, 5
de números naturales, 3
de números racionales, 4
de números reales, 5
elementos de un, 2
igualdad de, 3
intersección de, 3
notación por construcción de, 3
solución
de una desigualdad, 110
de una ecuación, 50, 65
subconjunto de un, 3
unión de, 3
vacío, 3
Cono
elemento de un, 652
generatriz de un, 652
vértice de un, 652
Constante, 17
de proporcionalidad, 221
Contradominio de una función, 193
Contraejemplo, 519
Coordenada(s)
cartesianas rectangulares, 42
polares, 607
Crecimiento
exponencial, 330
limitado, 332
logístico, 333
Cuadrantal
ángulo, 451
número, 376
Cuadrante, 43
Curso de un barco, 484
Curva
cosenoidal, 394
de aprendizaje, 332
ecuación vectorial de una, 599
ecuaciones paramétricas de una, 599
senoidal, 393

D

Dandelin, G. P., 662
Decimal(es)
finitos, 5
infinitos, 5
periódicos, 5
Decrecimiento exponencial, 331
Defasamiento de una gráfica, 401
Desigualdad(es), 9
absoluta, 111
condicional, 111
conjunto solución de una, 111
continua, 9
cuadrática, 110
cúbica, solución de una, 121, 122
equivalentes, 111
estricta, 9
lineal, 110
no estricta, 9
que implican valor absoluto, 128-133
solución de una, 110
triangular, 132

De Moivre, Abraham, 634
teorema de
para enteros positivos, 635
para todos los enteros, 637
Denominador, 19
Desarrollo binomial, 789
Descartes, René, 17, 33, 42, 281
regla de los signos de, 281
Determinante
de segundo orden, 731
de tercer orden, 731
Diagonal principal, de una matriz, 717
Diferencia
común, 774
de funciones, 196
de números complejos, 36
de números reales, 7
de vectores, 592
Dirección de un vector, 587
Directamente proporcional, 221
Directriz
de una elipse, 702
de una hipérbola, 702
de una parábola, 165
Discriminante, 685
de una ecuación cuadrática, 81
Distancia
dirigida, 43
fórmula de la, 44
no dirigida, 44
División, 19
de funciones, 196
de números complejos, 37
de números reales, 7
entre cero, 8
sintética, 257
Dominio
de una función, 193
de una función vectorial, 599
de una incógnita, 64
de una variable, 2, 110

E

e, 322
Ecuación(es)
algebraica, 50
cartesiana, 599
como modelos matemáticos, 69, 88
sugerencias para obtener, 89
condicional, 65
conjunto solución de una, 64
consistentes, 155
con radicales, 98
cuadrática(s), 74
carácter de las raíces de una, 81
discriminante de una, 81
forma estándar de una, 74
sistemas que contienen, 689
solución de una
mediante completación de cuadrados, 78
mediante factorización, 74,75
mediante la fórmula cuadrática, 80
mediante raíz cuadrada, 76
cúbica, 104
raíz irracional de una, 105
dependientes,
de movimiento, 83
de primer grado
en una variable, 64
en dos variables (x y y), 147
de una cónica central, 703
de una circunferencia, 172, 175
de una elipse, 653, 657
de una gráfica, 144
de una hipérbola, 665, 670
de una parábola, 166, 169, 181
de una recta
forma punto-pendiente de una, 144
forma pendiente-intercepción de una, 145
de segundo grado
en dos variables, 679
en una variable, 74
dependientes, 156, 724
en forma cuadrática, 102
equivalentes, 65
exponencial, 358
gráfica de una, 51
inconsistentes, 155, 721
independientes, 155, 714
lineal(es), 66, 143
sistemas de, 154
literal, 70
logarítmica, 355
paramétricas, 599
de una curva, 599
de una gráfica polar, 620
de rotación de ejes, 682
de traslación de ejes, 179

polar, 611
de una cónica, 704
polinomial, 65
que contiene valor absoluto, 126
resolver una, 65
raíz de una, 64
solución de una, 64
soluciones extrañas de una, 100
trigonométricas, 570
vectorial, 599
de una curva, 599
Eje(s), 9
conjugados, 666
coordenado(s), 43
de una parábola, 166
imaginario, 626
mayor, de una elipse, 654
menor, de una elipse, 654
polar, 607
principal
de una elipse, 653
de una hipérbola, 666
real, 626
rotación de, 681
transverso, de una hipérbola, 666
traslación de, 179
ecuaciones para, 179
x, 42
regla de reflexión, 249
y, 42
Elemento(s)
de un conjunto, 2
de un cono, 652
de una matriz, 717
de una sucesión, 754
general de una sucesión, 754
Elipse
caso degenerado de una, 660
definición de, 652
ecuación de una, 653
forma estándar de la, 657
excentricidad de la, 661
Enteros, *Véase* Conjunto de números enteros
Enunciados de problemas, 88
Epicicloide, 650
Equivalente(s)
desigualdades, 111
ecuaciones, 65
sistemas, de ecuaciones, 156
Escalar, 733
cantidad, 586
multiplicación, de vectores, 594
Espiral, 624
de Arquímedes, 624
de Fermat, 625
logarítmica, 624
recíproca, 624
Euler, Leonhard, 33, 193, 316, 811
fórmula de, 811
Excentricidad
de una cónica, 698
de una elipse, 661
de una hipérbola, 673
Exponencial
crecimiento, 330
decrecimiento, 331
ecuación, 358
función
de base *b*, 327
gráfica de una, 328
de base *e*, 329, 330
natural, 329
gráfica de una, 329
Exponente(s)
cero, 22
entero
negativo, 22
positivo, 17
irracional, 315
racional, 25
negativo, 27
Expresión
algebraica, 17
racional, 19
Extremos relativos, 251
de una función polinomial, 251

F

Factor(es), 16, 817
de amortiguamiento, 416
teorema del, 256
Foco
de una elipse, 652
de una hipérbola, 665
de una parábola, 165
Forma
cartesiana o algebraica de un número complejo, 627

escalonada de una matriz, 717
pendiente intercepción de una ecuación de una recta, 145
polar (o trigonométrica) de un número complejo, 627
polar estándar, 627
punto-pendiente de una ecuación de una recta, 144
triangular, 716
trigonométrica de un número complejo, 627
Fórmula(s)
cuadrática, 80
de Herón, 507
de la distancia, 44
de reducción, 529
de rotación de ejes, 682
del punto medio, 46
recursiva, 774
Fracción(es), 19
compleja, 19
impropia, 746
parciales, 746
propia, 746
simple, 19
Frecuencia del movimiento armónico simple, 408
Función
algebraica, 205
arco coseno, 559
arco seno, 558
arco tangente, 562
ceros de una, 210
circulares, 375
cociente de, 196
compuesta, 230
constante, 204
continua, 251
contradominio de una, 193
cosecante, 425
gráfica de la, 441
inversa, 567
periodo de la, 435
coseno, 374
gráfica del, 394-395
hiperbólico, 674
inversa, 559
periodo del, 385
cotangente, 424
gráfica de la, 437
inversa, 565
periodo de la, 434
creciente, 306
cuadrática, 205, 210
cúbica, 205
decreciente, 306
definición de, 193
definida a trozos, 200
diferencia de, 196
discontinua, 200
dominio de una, 193
exponencial
de base b, 327
de base e, 329
natural, 329
gráfica de una, 198
identidad, 204
impar, 205
inversa(s), 303
inversa de, 308
lineal, 204
logarítmica
como modelos matemáticos, 221
de base b, 338
de base e, 342
natural, 342
máximo entero, 202
monótona, 306
par, 205
periódica, 385
polinomial(es), 205
ceros complejos de una, 275
ceros racionales de una, 264
extremos relativos de una, 251
gráficas de, 243
potencia, 243
producto de, 196
racional, 205
gráfica de una, 294
recíprocas, 425
salto unitario, 208
secante, 425
gráfica de la, 440
inversa, 566-567
periodo de la, 434
seno, 374
gráfica del, 392
hiperbólico, 674
inverso, 556
periodo del, 385
signo, 208
sucesión, 754
finita, 754
infinita, 754

suma de, 196
tangente, 422
gráfica de la, 437
inversa, 562
periodo de la, 433-434
trascendentales, 205
trigonométrica
de ángulos, 460
de números reales, 375
de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, 465-466
uno a uno, 305
valor de, 193
vectorial, 598

G

Gauss, Karl Friedrich, 275, 719
método de reducción de, 719
Generatriz de un cono, 652
Grado(s)
de un monomio, 18
de un polinomio, 18
medida de un ángulo en, 455
Gráfica(s), 599
asíntota
horizontal de una, 288
oblicua de una, 293
vertical de una, 287
comportamiento al infinito de una, 251
de ecuaciones
paramétricas, 600
polares, 614
de funciones, 198
polinomiales, 243
racionales, 294
de la función
cosecante, 441
coseno, 395
cotangente, 437
exponencial
de base b, 328
natural, 329
logarítmica
de base b, 341, 342
de base e, 342
natural, 342
potencia, 243
secante, 440
seno, 392
tangente, 437
de un número complejo, 626
de una ecuación, 51
de una función, 198
defasamiento de una, 401
ecuación de una, 144
polares, 614
ecuaciones paramétricas para, 620
pruebas de simetría para, 619
reflexión de una, 311
simetría de una, 55
Graficadora, 51

H

Herón
fórmula de, 507
Hipérbola
caso degenerado de una, 672
definición de, 665
ecuación de una, 666
forma estándar de la, 671
equilátera, 668
excentricidad de una, 673
unitaria, 668
Hipocicloide, 606
Horner, William, 262
algoritmo de, 262

I

i,
definición de, 32
potencias de, 39
Idéntico
aditivo
de números complejos, 36
para números reales, 819
multiplicativo
de números complejos, 37
para números reales, 819
Identidad(es), 65
de ángulo doble, 537
de cofunciones, 525
de diferencia

de cosenos, 551-552
de senos, 551-552
de semiángulo, 543
de semivalor, 541
de suma
de cosenos, 551-552
de senos, 551-552
de la tangente
de la diferencia, 528
de la suma, 527
de semivalor, 542
de valor doble, 538
del coseno
de la diferencia, 523
de la suma, 524
de valor doble, 536
del producto
de cosenos, 549
de senos, 549
del seno
de la diferencia, 526
de la suma, 526
de valor doble, 536
pitagórica fundamental, 380
pitagóricas, 429
trigonométricas fundamentales, 429
Igualdad
de conjuntos, 3
de números complejos, 35
de sucesiones, 755-756
de vectores, 587
ilm al-jabr w'al muqabalah, 2, 88
Imaginario(s)
eje, 626
números
conjunto de, 32
puros, 33
Incógnita
dominio de una, 64
variable como, 64
Índice
de sumatoria, 758
de un radical, 24
Inducción matemática, 763
principio de, 763
Infinito
negativo, 11
positivo, 11
Interés
compuesto, 320
continuamente, 322
simple, 319
Intersección de conjuntos, 3
Intervalo
abierto, 11
cerrado, 11
semiabierto, 11
por la derecha, 11
por la izquierda, 11
Invariante, 685
Inversamente proporcional, 222
Inversa de una función, 308
Inverso
aditivo, 820
de un número complejo, 36
de un número real, 820
multiplicativo
de un número complejo, 38
de un número real, 820
de una matriz, 738

K

Kowa, Seki, 732

L

Lado
inicial de un ángulo, 450
recto de una parábola, 167
terminal de un ángulo, 450
Ley(es)
asociativas de los números reales, 818
conmutativas de los números reales, 818
de Boyle, 239
de cerradura para los números reales, 817
de enfriamiento de Newton, 337
de los cosenos, 501
de los senos, 489
del paralelogramo, 590
distributiva de los números reales, 819
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 732
Lemniscata, 624
Limaçon. *Véase* Caracol
Límite, 176, 251
Lineal
desigualdad, 110

ecuación
en dos variables, 147
en tres variables, 713
en una variable, 66
función, 204
Localización acústica, 674
Logaritmo
común, 358
natural, 342

M

Magnitud de un vector, 587
Manto(s) de un cono, 652
Matriz(ces), 717
aumentada, 717
columna, 732
cuadrada(s), 717
de coeficientes, 717
idéntico multiplicativo para, 737
diagonal principal de una, 717
elementos de una, 717
forma escalonada de una, 717
inverso multiplicativo, 738
invertible, 739
no singular, 739
operaciones elementales con renglones de una, 718
orden de una, 717
producto de, 735
renglón, 732
singular, 739
Maurolycus, Francesco, 763
Máximo, relativo, de una función, 251
Mayor que, 8
Medida
de un ángulo en grados, 455
Media
aritmética (o promedio), 777
geométrica, 783, 784
Medios
aritméticos, 776
geométricos, 782
Menor que, 8
Método
de eliminación para la solución de un sistema de ecuaciones, 157
de Newton, 284
Mínimo relativo de una función, 251
Modelo(s) matemático(s)
ecuaciones como, 69, 89
sugerencias para obtener, 89
funciones como, 221
Módulo (o valor absoluto)
de un número complejo, 626
Monomio, 18
grado de un, 18
Movimiento
armónico
amortiguado, 409, 416
simple, 407
ecuación de, 83
rectilíneo, 83
Multiplicación
de funciones, 196
de matrices, 735
de números complejos, 35
de números reales, 7, 817
escalar, de vectores, 594

N

n-ésima
potencia, 17
raíz. *Véase* Raíz n-ésima
Napier, John, 358
Natural(es)
función
exponencial, 329
logarítmica, 342
logaritmo, 343
números, conjunto de, 3
Negativo(s)
ángulo, 450
conjunto de enteros, 4
conjunto de números, 821
raíz cuadrada principal de, 34
de un vector, 592
exponentes enteros, 22
infinito, 11
Newton, Sir Issac, 28, 634
ley de enfriamiento de, 337
método de, 284
Notación
científica, 317
de coeficientes binomiales, 790
de conjuntos, 2

de valor de función, 193
factorial, 789
por construcción, 3
sigma, 758
Número(s)
cabales, 4
complejo(s), 32
adición de, 35
argumento de, 627
cociente de, 37
conjugado de un, 37
conjunto de, 32, 39
diferencia de, 36
división de, 37
exponentes negativos de, 637
forma
estándar de, 34
polar estándar de, 627
gráfica de un, 626
idéntico
aditivo para un, 36
multiplicativo para un, 37
igualdad de, 35
inverso
aditivo de, 36
multiplicativo de, 38
multiplicación de, 35
parte
imaginaria de un, 32
real de un, 32
producto de, 35
raíces *n*-ésimas de, 639
suma de, 35
sustracción de (resta de), 36
valor absoluto (o módulos) de, 626
crítico, de una desigualdad, 118
cuadrantal, 376
imaginario(s)
conjunto de, 32
puro, 33
irracionales
como exponentes, 315
conjunto de, 5
negativos
conjunto de, 821
raíz cuadrada principal de, 34
pares ordenados de reales, 42
positivos, conjunto de, 821
prueba del, 118
racionales, conjunto de, 4
reales
adición de, 7, 817
campo ordenado de, 821
cociente de, 7
conjunto de, 5
diferencia de, 7
división de, 7
idéntico
aditivo para un, 819
multiplicativo para un, 819
inverso
aditivo de un, 820
multiplicativo de un, 820
ley(es)
asociativas para, 818
de cerradura para, 817
distributiva, 819
multiplicación de, 7, 817
negativo de un, 821
opuesto de un, 820
pares ordenados de, 42
positivo, 821
producto de, 7, 817
propiedades de, 817
raíz cuadrada de, 33-34
raíz *n*-ésima de un, 23
recíproco de un, 820
suma de, 7, 817
sustracción de, 7
Numerador, 19

O

Onda senoidal, 393
Operación(es)
binaria, 817
elementales con renglones de una matriz, 718
inversa, 303
Orden
axiomas de, 821
de una matriz, 717
de un radical, 24
propiedad de tricotomía del, 109
propiedad transitiva de, 109
Ordenada, 42
Origen, 9, 42

P

Par ordenado de numeros
reales, 42
Parábola
caso degenerado de una, 680
definición de una, 165
directriz de una, 165
ecuación de una, 166, 169
forma estándar de una, 698
eje de una, 166
excentricidad de una, 698
foco de una, 165
lado recto de una, 167
vértice de una, 166
Paralelogramo, ley del, 590
Parámetro, 599
Parte
imaginaria de un número complejo, 32
real de un número complejo, 32
Pascal, Blaise, 799
triángulo de, 799
Pendiente de una recta, 141
Periodo de una función, 385
Plano
complejo, 626
numérico, 4
Polar(es)
ecuación, 595
de una cónica, 704
gráfica de una, 614
eje, 607
sistema de coordenadas, 607
Polinomio(s)
algoritmo de división para, 254
de Taylor, 381
definición de, 18
división sintética de, 257
grado de un, 18
variación de signo de un, 281
Polinomial
ecuación, 65
de primer grado, 66
de segundo grado, 74
de tercer grado, 104
función, 205
ceros complejos de una, 275
ceros racionales de una, 264
extremos relativos de una, 251
gráfica de una, 243
Polo, 607
Posición estándar de un ángulo, 450
Positivo(s)
ángulo, 450
conjunto de enteros, 4
conjunto de números, 821
exponentes enteros, 16-17
infinito, 11
Potencia(s)
de binomios, 789
de *i*, 39
definición de, 17
función, 243
Principio
de inducción matemática, 763
de superposición, 541
Problema
de inversión, 91
de mezclas, 93
Producto, 817
de dos matrices, 735
de funciones, 196
de números complejos, 35
de números reales, 7
de un escalar y una matriz, 733
Progresión
aritmética, 773
geométrica, 781
Propiedad
aditiva, 111
de sustracción, 111
de tricotomía del orden, 109
transitiva del orden, 109
Prueba
de la recta horizontal, 305
del cono de helado, 662
del número,118
Punto(s)
colineales, 148
coordenadas
cartesianas rectangulares de un, 42
polares de un, 607
en un plano numérico, 42
inicial de un vector, 586
simetría de, 55
terminal, de un vector, 586
unidad, 9

R

Racional
 expresión, 19
 función, 205
  gráfica de una, 294
Radián(es), 452
 medida en, 451
Radical(es), 24
 orden de un, 24
 signo, 24
Radicando, 24
Radio
 de una circunferencia, 172
 vector, 599
Raíz(es)
 de la unidad, 643
 de una ecuación, 64
 doble (o de multiplicidad 2), 82
 cuadrada
  de un número negativo, 33
  principal
   de un número negativo, 34
   de un número real, 33
 n-ésima
  de un número complejo, 639
  de un número real, 23
 principal de un número real, 24
Razón común, 781
Recíproco
 de un número complejo, 38
 de un número real, 820
Recta(s)
 ecuación de una
  forma pendiente-intercepción de una, 145
  forma punto-pendiente de una, 144
 ecuación polar de una, 618
 intercepción y de una, 145
 numérica real, 10
 pendiente de una, 141

Rectángulo
 auxiliar, 669
 de inspección, 51
  estándar, 51
Redondeo a *k* dígitos significativos, 318
Reflexión
 de un punto, 311
 de una gráfica, 311
Regla
 de contracción vertical, 247
 de Descartes de los signos, 281
 de expansión vertical, 247
 de la cadena, 233
 de reflexión, con respecto al eje *x*, 249
 de traslación horizontal, 245
 de traslación vertical, 244
Renglón de una matriz, 717
Representación
 del vector, 587
 posicional (o de posición), 587
Resonancia, 418
Resultante de vectores, 590
Richter, Charles, 357
 escala de, 357
Rotación de ejes, 681
Ruffini, Paolo, 275

S

Satisfacción de una ecuación, 65
Secante. *Véase* Función secante
Sector de un círculo, 454-455
Seno. *Véase* Función seno
Serie,
 aritmética, 778
 armónica, 811
 binomial, 807
 definición de, 760
 geométrica, 784
  infinita, 802-803
  suma de, 804
 infinita, 802
 término general de una, 761
Simetría
 de dos puntos, 55
 de una gráfica, 55
 prueba de, 56
  para una gráfica polar, 618-619
Sistema(s)
 con ecuaciones cuadráticas, 689
 coordenado cartesiano rectangular, 42
 de ecuaciones lineales
  con dos incógnitas, 154
  con tres incógnitas, 713
 de números reales, 7
Solución

de una desigualdad, 110
de una ecuación, 50
Sonido simple, 413
Sucesión(es)
aritmética, 773
definición de, 754
elemento general de una, 755
elementos de una, 754
finita, 754
función de, 754
geométrica, 780
iguales, 755
infinita, 754
Subconjunto, 3
Sumandos, 817
Sustitución
regresiva, 716
sintética, 261-263
solución de un sistema de ecuaciones mediante, 156
Sustracción
de funciones, 196
de números complejos, 36-37
de números reales, 7
de vectores, 592
Suma, 817
de dos números complejos, 35
de funciones, 196
de números reales, 7
de una serie geométrica infinita, 804
de vectores, 589
límite inferior de una, 759
límite superior de una, 759

T

Tangente. *Véase* Función tangente
Taylor, Brook, 389
polinomio de, 389
Teorema
de Pitágoras, 44
recíproco del, 45
de ceros racionales, 266
prueba del, 271-272
del binomio,795
del factor cero, 74
del residuo, 256
fundamental del álgebra, 275
Término(s)
de un polinomio, 18
de una serie, 760
de una suma, 817
general de una serie, 761
semejantes, 18
Traslación
de ejes, 179
horizontal, regla de, 245
vertical, regla de, 244
Triángulo
oblicuángulo, 488
Trigonometría, 371
Trigonom, 371
Trinomio, 18

U

Unión de conjuntos, 3
Unitaria
circunferencia, 173
longitud de arco en la, 372-373
hipérbola, 668

V

Valor(es)
absoluto, 13
de un número complejo, 626
de un número real, 12
desigualdades que contienen, 128-133
ecuaciones que contienen, 126-128
teoremas sobre, 131-133
de función, 193
extremos de una función cuadrática, 211
máximo de una función cuadrática, 212
mínimo de una función cuadrática, 212
Variable(s)
definición de, 2, 221
dependiente, 192
indepediente, 192
Variación de signo de un polinomio, 281
Vector(es), 586
ángulo director de un, 588
ángulo entre, 590
cero, 587
de posición, 599
definición de, 587
diferencia de, 592

dirección de un, 587
igualdad de, 587
magnitud de un, 587
multiplicación por un escalar de, 594
negativo de un, 592
representación de un, 587
resultante de, 590
suma de, 589
unitario, 595
Vectorial(es)
análisis, 586
cantidades, 586
ecuación, 599
función, 598
Vértice(s)
de un ángulo, 450
de un cono, 652
de una elipse, 653
de una hipérbola, 666
de una parábola, 166
Vertical
asíntota, 287

regla de contracción, 247
regla de expansión, 247
regla de traslación, 244
Vida media, 346
Visual, 483

W

Wallis, John, 27

X

x, eje, 42
x, coordenada, 42

Y

y, eje, 42
y, coordenada, 42
y, intercepción, 42

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

Las ocho identidades trigonométricas fundamentales

$\operatorname{sen} x \csc x = 1$

$\cos x \sec x = 1$

$\tan x \cot x = 1$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Identidades de sumas y diferencias

$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Identidades de valor múltiple

$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$

$\cos 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$

$\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$

$$\tan 2u = \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{1 + \cos t}{2}$$

$$\tan \tfrac{1}{2} t = \frac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\tan \tfrac{1}{2} t = \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$$

Identidades para el producto, suma y diferencia de senos y cosenos

$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$

$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{s + t}{2}\right) \cos\left(\frac{s - t}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2 \cos\left(\frac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{s - t}{2}\right)$$

$$\cos s + \cos t = 2 \cos\left(\frac{s + t}{2}\right) \cos\left(\frac{s - t}{2}\right)$$

$$\cos s - \cos t = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{s - t}{2}\right)$$

Algunas fórmulas de reducción

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$

$\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x$

$\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x$

$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$

$\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x$

$\tan(\frac{1}{2}\pi + x) = -\cot x$

$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$

Ley de los senos y ley de los cosenos

a, b y c representan las longitudes de los lados de un triángulo: α, β y γ representan las medidas de los ángulos opuestos a los lados de longitudes a, b y c respectivamente

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

TABLA DE VALORES ESPECIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ radianes o número real x	θ grados	sen θ o sen x	cos θ o cos x	tan θ o tan x	csc θ o csc x	sec θ o sec x	cot θ o cot x
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	Indefinido	1	Indefinido	0
π	180°	0	−1	0	Indefinido	−1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	−1	0	Indefinido	−1	Indefinido	0

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA PLANA Y GEOMETRÍA SÓLIDA

La siguiente simbología se emplea para las medidas:
r: radio h: altura b: base a: base
C: longitud de la circunferencia A: área
S: área de la superficie B: área de la base
V: volumen

Circunferencia: $A = \pi r^2$; $C = 2\pi r$

Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$

Rectángulo y paralelogramo; $A = bh$

Trapecio: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Cilindro circular recto; $V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi rh$

Cono circular recto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$

Prisma (con bases paralelas): $V = Bh$

Pirámide: $V = \frac{1}{3}Bh$

ALFABETO GRIEGO

α alfa	ι iota	ϱ ro
β beta	$\varkappa$ kapa	σ sigma
γ gama	λ lambda	τ tau
δ delta	μ mu	υ ípsilon
ϵ épsilon	ν nu	ϕ fi
ζ zeta	ξ xi	χ ki (ji)
η eta	o ómicron	ψ psi
θ teta	π pi	ω omega